Zápočet – Fyzika V

J.D. a M.H.

18 December 2018

Maximální počet bodů je 20. Pro zápočet je třeba získat ≥ 13 bodů.

1 Vymírání kaonů (8 b)

V jaké vzdálenosti od zdroje dojde k zeslabení svazku záporně nabitých kaonů (K^-) o energii 5 GeV na 10 % (v důsledku jejich rozpadů)? *Tolerovaná chyba: 3 %.*

2 GZK (10 b)

Studujte hraniční energii kosmických protonů, pro něž již vesmír není průhledný. Konkrétně, odvoďte prahovou energii protonu, při níž mohou neelasticky interagovat s typickým fotonem reliktního záření (CMB) za vzniku pionu ($p + \gamma \to p + \pi$). Dnešní teplota reliktního záření je (2.7254±0.00057) K.
Tolerance: 1 dekadický řád

3 Hmota Higgse (2 b)

Jmenujte atom, který váží stejně jako Higgsův boson. *Tolerance: 2 %.*

Některá zajímavá čísla:

$$m_{\pi^+} = 139.57\,\mathrm{MeV/c^2} \qquad \tau_{\pi^+} = 2.603 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$
$$m_{\pi^0} = 134.98\,\mathrm{MeV/c^2} \qquad \tau_{\pi^0} = 8.5 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{s}$$
$$m_{K^+} = 493.67\ \mathrm{MeV/c^2} \qquad \tau_{K^+} = 1.238 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$$

Vzorová řešení

1 Vymírání kaonů

(3b) Střední doba života kaonu v Lab soustavě je ovlivněna dilatací času letícího kaonu:

$$\langle t\rangle = \gamma_{K^+}\tau_{K^+} = \frac{E_{K^+}}{m_{K^+}}\tau_{K^+} = \frac{5\,\mathrm{GeV}}{493\,\mathrm{MeV}} \cdot 1.24\cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} = 1.26\cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$$

Doby života částice a antičástice bývají stejné, tedy $\tau_{K^-} = \tau_{K^+} \equiv \tau_K$ a tudíž lze použít hodnotu ze zadání.
(3b) Z přežívacího zákona

$$N(t) = N(0)\, e^{-t/\langle t\rangle}$$

dostáváme, že k danému zeslabení dojde za dobu

$$t = -\langle t\rangle \ln\frac{N(t)}{N(0)}.$$

(2b) Při daném relativistickém faktoru $\gamma \approx 10$ letí kaony již takřka rychlostí světla, takže za tento čas urazí vzdálenost

$$s \approx c\,t = -c\,\langle t\rangle \ln\frac{N(t)}{N(0)} = -3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}\cdot 1.26\cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}\cdot \ln 0.1 = 87\,\mathrm{m}\,.$$

Poznámky

Ověření, že rychlost lze zanedbat

$\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}} \approx 1-\gamma^{-2}/2 = 1-0.005$. Po dosazení vyjde $s = \beta ct = 86.6$ m.

Alternativní řešení z pohledu letících částic:

Kaony stojí a rozpadají se se střední dobou života τ_K. Ke zmenšení jejich počtu na 10 % tedy dojde za jejich vlastní čas $\tau = -\tau_K \ln 0.1$. Proti nim letí laboratoř s gamma faktorem $(1-\beta^2)^{-1/2} = \gamma \approx 10$ a odpovídající rychlostí $v = \beta c \approx c$, během uvažované doby se tedy posune o vzdálenost

$$x = \beta c\tau \approx -c\tau_K \ln 0.1\,.$$

Jelikož jsou ale měřící přístroje v laboratoři kontrahované relativistickým faktorem γ, naměří laboranti $s = \gamma x = \beta\gamma c\tau_K \ln(10)$, což je v souladu s předchozím řešením.

Některé vyskytující se chyby:

- Počítáme-li s $c = 1$, pak nám vzdálenost vyjde ve světelných sekundách, nikoli v metrech!
- Záměna poločasu rozpadu a střední doby života. $T_{1/2,K} = \tau_K \ln 2 < \tau_K$.
- Neuvážení dilatace času.
- Povšimněme si, že výsledné řešení lze zapsat jako

$$s = \beta\gamma c\tau_K \ln 0.1 = \frac{p_K}{m_K}\tau_K \ln 1/0.1 \,.$$

  K tomuto správnému výsledku lze dojít následujícím nesprávným postupem při ignorování všech relativistických jevů: "Kaony vymřou za čas $t = \tau \ln(1/0.1)$, za tuto dobu uletí $s = vt$, kde $v = pc/m$." Čirou náhodou to vyjde správně, nicméně mezikroky jsou scestné, například samotná rychlost by vyšla téměř $v = 10c$. Formulky tymu $p = mv$, $T = 1/2mv^2 = p^2/m$ v relativistickém režimu neplatí!

2 GZK

Je-li celá úloha víceméně dobře, uděluje se 10 bodů. Jinak podle návodu.

(2b) Typický foton reliktního záření má energii

$$E_\gamma \sim k_B T = 8.62 \cdot 10^{-5}\mathrm{eV\,K^{-1}} \cdot 2.73\,\mathrm{K} = 2.3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}.$$

Existují i složitější způsoby, jak se dostat k podobným číslům. Všechny hodnoty mezi 10 % a 1000 % výše uvedené hodnoty uznáváme.

(1b) Ze zákona zachování náboje plyne, že při reakci vzniká neutrální, nikoli nabitý pion, tedy $\gamma + p \to p + \pi^0$. (Navíc konkurenční reakce $\gamma + p \to n + \pi^+$ má vyšší treshold kvůli $m_p < m_n, m_{\pi^0} < m_{\pi^+}$). *Kdo to explicitně nezmínil, ale má výpočet správně, nemá bod dolů.*

(3b) Prahová kinematika pro reakci $\gamma + p \to p + \pi^0$ nastává, když se proton s fotonem srazí čelně a produkty se vůči sobě nepohybují, tedy jsou v klidu v těžišťové soustavě celého dvojčásticového systému.

(4b) Označme 4-hybnost částice X jako P_X přičemž čtyřhybnost protonu po srážce je P'_p. Vypočítáme kvadrát celkové čtyřhybnosti s, jelikož *se zchovává* a navíc je to *relativistický invariant.* Proto ho můžeme spočíst před srážkou v "klidové soustavě vesmíru" UNI (protože v ní nás výsledek zajímá) a po srážce

v těžišťové soustavě (CM):

$$
\begin{aligned}
(P_\gamma + P_p)^2_{\mathrm{UNI}} &= s = (P'_p + P_\pi)^2_{\mathrm{CM}} \\
P_\gamma^2 + 2P_\gamma \cdot P_p + P_p^2 &= \left(m_p + m_{\pi^0}, \vec{0}\right)^2 \\
0 + 2\left(E_\gamma E_p - \vec{p}_\gamma \cdot \vec{p}_p\right) + m_p^2 &= (m_p + m_{\pi^0})^2 \\
E_\gamma E_p - E_\gamma p_p \cos\pi &= \frac{1}{2} m_{\pi^0}(2m_p + m_{\pi^0}) \\
E_p + p_p &= \frac{m_{\pi^0}(m_p + m_{\pi^0}/2)}{E_\gamma} \\
&\approx \frac{1.3 \cdot 10^8\,\mathrm{eV} \ \cdot 10^9\,\mathrm{eV}}{2.3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}} \approx 6 \cdot 10^{20}\,\mathrm{eV}.
\end{aligned}
$$

Proton tedy musí být vysoce relativistický, tudíž $E_p \approx p_p$ a

$$E_p \approx 3 \cdot 10^{20}\mathrm{eV}.$$

Výsledky se mohou lišit až o řád v závislosti na zvolené energii fotonu. Za citaci správné hodnoty z internetu bez úplného odvození 1 bod navíc.

Alternativní správná řešení

- Kdo neaproximoval $E_p \approx p_p$, musel po umocnění řešit kvadratickou rovnici. Někteří šťastlivci získali neekvivalentní úpravou (umocněním) správné řešení, ač původně řešili nesprávnou rovnici v důsledku znaménkových/fyzikálních chyb souvisejících se skalárním součinem.
- Někteří nevyužili invariance kvardátu čtyřhybnosti. Řešili zákony zachování přímo v CM soustavě, načež provedli Lorentzovu transformaci do UNI soustavy (v níž žijeme a v níž je reliktní záření izotropní a dané vztahy výše). Tovcelku pracné, přesto se to některým podařilo. Gratulujeme!
- Originální řešení předvedl Jan Ditrich: nechal svůj počítač vyřešit následující soustavu rovnic představujících popřadě (1) ZZE, (2) ZZ$\vec{p}$ za využití ultrarelativistického rozvoje $p \approx E - m^2/(2E)$, a (3) $\vec{v}'_p = \vec{v}_\pi$ v UNI soustavě pro tři neznámé E_p, E'_p a E_π:

$$
\begin{aligned}
E_p + E_\gamma &= E'_p + E_\pi \\
\frac{m_p^2}{2E_p} + 2E_\gamma &= \frac{m_p^2}{2E'_p} + \frac{m_\pi^2}{2E'_\pi} \\
\frac{m_p}{E'_p} &= \frac{m_\pi}{E_\pi}
\end{aligned}
$$

Časté nedostatky

Občas se projevily neznalosti základů teorie relativity, proto si dovolím

malé opakování z STR:

Zachovávající se veličiny E a $\vec{p}$ jsou ubytovány v zachovávajícím se čtyřvektoru $P = (E, \vec{p})$. Skalárním součinem dvou čtyřhybností myslíme

$$P_1 \cdot P_2 \equiv {P_1}^{\mu} g_{\mu\nu} {P_2}^{\nu} = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2.$$

Skalární součin libovolných dvou 4-vektorů je invariantní, což znamená, že vyjde stejně v libovolné vztažné soustavě. Kvadrátem čtyřvektoru P myslíme $P^2 \equiv P \cdot P$; je-li to čtyřhybnost jedné částice, pak $P^2 = m^2$, kde m je klidová hmotnost částice. Nehmotné částice mají $E = |\vec{p}|$. Skalární součin dvou *tří*vektorů lze spočítat jako $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = |\vec{p}_1|\,|\vec{p}_2| \cos\varphi$.

Jiné špatnosti

Neuvážení zákona zachování hybnosti, pouze triviální energetická bilance.

Obecná neznalost STR či špatný výpočet skalárního součinu tříhybností, viz výše.

Špatná analýza prahové situace. Aby bylo s co největší při daných energiích obou částic, musí být úhel mezi srážejícími se částicemi $180° = \pi$.

Pomíchání vztažných soustav. Těžitová soustava (CM) není přesně klidová soustava protonu. Produkty v prahové situaci nestojí v UNI=LAB soustavě, ale v CM.

Řešení: Hmota Higgse

Atomová hmotnostní jednotka má velikost

$$u \approx m_p = 0.93\,\mathrm{GeV}.$$

Hledáme tedy izotop X s relativní atomovou hmotností

$$A = m_H/u = 125/0.93 = 134.$$

To splňuje například ^{134}Ba.