Fyzika V: Zápočtová práce (11. ledna 2019)

Instrukce

- Povoleny jsou libovolné pomůcky (zápisky, knihy, Internet, kalkulačka apod.), spolupráce mezi studenty či jinými osobami není dovolena.
- Čas na odevzdání zápočtové práce je 75 minut.
- Maximální počet bodů je 20, pro získání zápočtu je třeba alespoň 13 bodů.
- Podepište všechny papíry, které odevzdáváte.

1 Rozpad pionu [8 bodů]

Neutrální pion π^0 o klidové energii $m_{\pi^0}c^2 = 135\,\mathrm{MeV}$ se za letu rozpadá na dvojici fotonů, $\pi^0 \to 2\gamma$, přičemž pozorovatel detekoval foton, který letěl proti směru pohybu pionu, o energii $E_\gamma = 10\,\mathrm{MeV}$. Určete rychlost pionu.

Řešení

(1b) Studujeme rozpad $\pi^0 \to \gamma_a + \gamma_b$. Uvažujme těžišťovou soustavu spojenou s rozpadajícím se pionem. Zde je čtyřhybnost pionu $P_\pi = (m_{\pi^0}c^2, \mathbf{0})$, zatímco čtyřhybnosti obou vzniknuvších fotonů jsou $P_a = (E_a, \boldsymbol{p_a}c)$ a $P_b = (E_b, \boldsymbol{p_b}c)$. Ze zákona zachování energie máme $E_a + E_b = m_{\pi^0}c^2$. V těžišťové soustavě letí fotony do opačných směrů, tj. $\boldsymbol{p_a} + \boldsymbol{p_b} = \mathbf{0}$, resp. $p_a = p_b$, a tedy $E_a = E_b$.

(2b) Ze zákona zachování energie tak máme

$$E_a = E_b = \frac{1}{2} m_{\pi^0} c^2 \,. \tag{1}$$

(3b) Pro foton γ_a, který se v těžišťové soustavě pohybuje proti směru rozpadajícího se pionu, lze z Lorentzovy transformace psát

$$E_\gamma = \gamma(E_a - \beta p_a c) \,, \tag{2}$$

kde E_γ je energie tohoto fotonu γ_a měřená pozorovatelem v laboratorní soustavě, p_γ je odpovídající velikost hybnosti, též v soustavě pozorovatele. Ekvivalentně, pro druhý foton by bylo $E'_\gamma = \gamma(E_b + \beta p_b c)$. Foton γ_a letí v těžišťové soustavě "dozadu", zatímco foton γ_b "dopředu", tj. v původním směru letu pionu. To, že γ_b letí opačným směrem než γ_a, vede ke změně znaménka u parametru β.

(1b) Dosazením energie $E_a = p_a c$ za hybnost dostáváme

$$E_\gamma = \gamma(E_a - \beta p_a c) = \gamma(E_a - \beta E_a) = E_a \gamma(1-\beta) \,. \tag{3}$$

Jelikož $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, je $\gamma(1-\beta) = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$, a tedy

$$E_\gamma = E_a \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \,. \tag{4}$$

(1b) Pro velikost v rychlosti těžišťové soustavy, a tedy pionu, pak platí $v = \beta c$, kde

$$\boxed{\beta = \frac{E_a^2 - E_\gamma^2}{E_a^2 + E_\gamma^2} = \frac{m_{\pi^0}^2 c^4 - 4E_\gamma^2}{m_{\pi^0}^2 c^4 + 4E_\gamma^2} \,.} \tag{5}$$

Číselně vychází

$$\boxed{\beta \doteq 0.96 \,, \qquad v \doteq 2.9 \cdot 10^5\,\mathrm{km \cdot s^{-1}} \,.} \tag{6}$$

2 Kosmické záření [7 bodů]

Ve srážkách kosmického záření s vnějšími vrstvami atmosféry vznikají ve výšce $d = 12\,\mathrm{km}$ miony μ^- o energii $E = 6\,\mathrm{GeV}$. Ověřte výpočtem, doletí-li většina mionů na úroveň mořské hladiny. Předpokládejte, že letí kolmo k Zemi. Dále, diskutujte vliv ionizačních ztrát v atmosféře (nápověda: vrstvu atmosféry aproximujte vhodnou výškou vodního sloupce; pro jistotu uvažujte, že mion prolétává celou atmosférou). Klidová energie a vlastní doba života mionu jsou $m_\mu c^2 = 105.7\,\mathrm{MeV}$ a $\tau_{\mu,0} = 2.2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

Řešení

(2b) Předpokládejme nejdříve, že k žádným energetickým ztrátám vlivem ionizace v prostředí nedochází. Na počátku máme určité množství N_0 mionů, každý o energii $E = 6\,\mathrm{GeV}$. Miony pozorujeme v soustavě pevně spojené se Zemí. Aby úrovně mořské hladiny dosáhla většina všech mionů, tj. více než polovina, v čase t dopadu na mořskou hladinu pak jejich počet musí být $N(t) > \frac{1}{2}N_0$, přičemž pro čas t máme z exponenciálního rozpadového zákona

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\mu}\right) > \frac{1}{2}N_0 \tag{7}$$

vztah

$$t < t_{1/2} = \tau_\mu \ln 2\,, \tag{8}$$

kde τ_μ je střední doba života mionu v soustavě pevně spojené se Zemí.

(1b) Jinými slovy, aby na úroveň moře dolétla více než polovina všech mionů, musejí dráhu $d = 12\,\mathrm{km}$ překonat za čas kratší než $t_{1/2}$, jelikož v tomto čase bude mionů právě polovina. Stačí tak určit, jakou dráhu l uletí miony za čas $t_{1/2}$, a ověřit, bude-li $l > d$. Pro tuto dráhu l platí (uvažujeme, že miony letí kolmo k Zemi)

$$l = \beta c t_{1/2}\,. \tag{9}$$

(2b) V soustavě pevně spojené se Zemí je střední doba života τ_μ mionu γ-krát větší než jeho vlastní doba života $\tau_{\mu,0}$, tj. $\tau_\mu = \gamma\tau_{\mu,0}$, kde $\gamma = \frac{E}{m_\mu c^2}$. Jelikož relativistický faktor γ je svázán s parametrem β vztahem $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, máme $\beta = \sqrt{1-\gamma^{-2}}$.

Pro energii $E = 6\,\mathrm{GeV}$ je $\gamma \doteq 57$, můžeme tak psát $\beta \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2} \doteq 1$. Tedy

$$\boxed{l \doteq c t_{1/2} = c\tau_\mu \ln 2 = \gamma c \tau_{\mu,0} \ln 2\,,} \tag{10}$$

resp. po dosazení

$$\boxed{l \doteq 26\,\mathrm{km}\,.} \tag{11}$$

Mionů, vzniknuvší srážkami kosmického záření s atmosférou, tak na úroveň moře dolétne alespoň polovina.

(2b) Nyní odhadneme energetické ztráty vlivem ionizace, přičemž ionizační ztráty mionu v atmosféře aproximujeme ionizačními ztrátami ve vodě. Z úvah o hydrostatickém tlaku si pamatujeme, že atmosférický tlak na hladině moře lze přirovnat k vodnímu sloupci o výšce asi $10\,\mathrm{m}$. Miony ztrácejí ve vodě ionizací přibližně $2\,\mathrm{MeV} \cdot \mathrm{cm}^{-1}$, neboli $200\,\mathrm{MeV} \cdot \mathrm{m}^{-1}$. Tedy, po průchodu vodním sloupcem této výšky mion ztratí ionizací $\Delta E = 2\,\mathrm{GeV}$.

Pro jednoduchost a hrubý odhad si můžeme dále představit, že mion nebude ztrácet energii ionizací průběžně během letu atmosférou, ale ztratí $\Delta E = 2\,\mathrm{GeV}$ najednou. Tedy, uvažujme nyní, jakou dráhu uletí za čas $t_{1/2}$ mion o energii $E' = E - \Delta E = 4\,\mathrm{GeV}$. V tomto případě je $\gamma' \doteq 38$, čímž ze vztahu (10) dostáváme $l \doteq 17\,\mathrm{km}$. Tedy, i se započtením ionizačních ztrát dopadne na úroveň mořské hladiny alespoň polovina všech mionů.

3 Urychlovač [5 bodů]

Odhadněte rozměry hypotetického kruhového urychlovače, který by dokázal urychlit protony na energie, které jsou v současnosti pozorovatelné pouze v kosmickém záření, tj. energie řádu $10^{20}\,\mathrm{eV}$, a to za předpokladu, že magnetické pole tohoto urychlovače by bylo stejné jako na LHC v CERN, tj. velikost magnetické indukce je $B = 8.33\,\mathrm{T}$.

Řešení

(1b) Na částici s hmotností m a nábojem q pohybující se rychlostí $\boldsymbol{v}$ magnetickým polem s magnetickou indukcí $\boldsymbol{B}$ působí Lorentzova síla $\boldsymbol{F}_L = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Pohybuje-li se částice v urychlovači po kružnici o poloměru R, působí na ni dostředivé zrychlení $\boldsymbol{a}$, které je kolmé na vektor rychlosti $\boldsymbol{v}$. Relativistický faktor γ se tak nemění.

(1b) Z požadavku stability dráhy se tak musí dostředivá síla vyrovnat síle Lorentzově, tj. máme $qv_\perp B = \gamma m a$, kde $a = \frac{v_\perp^2}{R}$ je velikost zrychlení a $v_\perp$ je složka rychlosti kolmá na magnetické pole. Po dosazení pak máme jednoduchý vztah $p_\perp = qBR$, kde levá strana rovnice je složka hybnosti částice kolmá na magnetické pole, $p_\perp = \gamma m v_\perp$. Má-li se jednat o pohyb po kružnici, musí být složka hybnosti rovnoběžná s magnetickým polem nulová, $p_\parallel = 0$, jinak by se jednalo o pohyb po šroubovici. Jinými slovy, pro velikost hybnosti platí

$$\boxed{p = qBR\,,} \tag{12}$$

odkud při znalosti hybnosti, resp. energie, dostaneme odhad na poloměr urychlovače R pro dané magnetické pole.

(3b) Dříve než numericky dosadíme, je zásadní si uvědomit, že v částicové fyzice často uvádíme hybnost v GeV/c namísto SI jednotky $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, což je ovšem jednotka hybnosti na levé straně rovnice (12). Pro vzájemný převod zmíněných jednotek platí

$$1\mathrm{GeV}/c \doteq \frac{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 10^{9}\,\mathrm{J}}{3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} = \frac{1.6\cdot 10^{-19}}{0.3}\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\,. \tag{13}$$

Jelikož hovoříme o protonu urychleném na energii $E = 10^{20}\,\mathrm{eV} = 10^{11}\,\mathrm{GeV}$, můžeme jeho klidovou hmotu $m_p \approx 1\,\mathrm{GeV}/c^2$ zcela zanedbat a hybnost identifikovat s energií, viz. $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, tj. $E \doteq pc$ pro $E \gg m$. Pro částici o jednotkovém náboji $1.6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, tj. náboji protonu, tak lze, po jednoduchých numerických úpravách, psát

$$\boxed{E[\mathrm{GeV}] = 0.3\cdot B[\mathrm{T}]\cdot R[\mathrm{m}]\,,} \tag{14}$$

kde, jak zdůrazněno, energii dosazujeme v GeV a velikost magnetické indukce v Tesla a poloměr v metrech. Dosazením pak konečně vyjde poloměr hypotetického urychlovače jako

$$\boxed{R \doteq 4\cdot 10^{7}\,\mathrm{km}\,.} \tag{15}$$

Alternativně, jeho obvod by pak byl $2.5\cdot 10^{8}$ km. Pro ilustraci, poloměr lze porovnat zhruba se čtvrtinou vzdálenosti mezi Zemí a Slunce.