

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

FAKULTA MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ

OPTIKA

Mř. prof. RNDr. Emanuel Klier

Knihovna JU - PF



3 1 1 5 0 1 1 6 0 5

STÁTNI PEDAGOGICKÉ NAKLADATELSTVÍ

PRAHA

S 1236

PEDAGOGICAL INSTITUTE OF THE UNIVERSITY OF TORONTO
1979/00219

P ř e d m l u v a

Od vydání prvního autorova skriptu z optiky uplynulo více než 23 let. Od té doby se od základu změnila koncepce přednášky, zvýšila se její teoretická úroveň a přibyly nové partie. Za této situace by bylo třeba nové učebnice, která by už měla vyhovovat potřebám přestavby studia nastupující v r. 1977. Poněvadž vydání takové učebnice je dlouhodobým úkolem, mají předložená skripta řešit prozatímne její nedostatky.

Poněvadž bylo snahou vydat skriptum co nejdříve, omezil se autor v podstatě jen na ty části optiky, které pokládal podle svých zkušeností za nejdůležitější a pro které se nedostatek učebních textů pociťuje nejvíce. Skriptum proto neobsahuje celou optiku, nýbrž jen vybrané části klasické vlnové a paprskové optiky. Je zamýšleno jen jako příručka k přednáškám, a proto v něm není věnováno příliš místa popisu pokusů a měřících přístrojů a metod. Na rozdíl od vlastního výkladu v přednáškách je postup ve skriptu ve značné míře deduktivní.

Autor považuje současnou formu skriptu za provizorní a za základ k dalšímu vývoji. Bude vděčen za všechny připomínky k výběru látky i způsobu podání, které vyplnou zejména ze zkušeností s novým studijním plánem a které pomohou zlepšit úroveň i účinnost skriptu.

Autor děkuje recensentům Dr. M. Závětové, CSc, a Dr. J. Pantoflíčkovi, CSc. za pečlivé provedení recenze a četné připomínky k textu.

O B S A H

	str.
Předmluva	3
Obsah	5
1. <u>Podstata a šíření světla</u>	9
1.1. Úvod	9
1.2. Elektromagnetické vlny	13
1.3. Rovinná a kulová vlna	14
1.4. Harmonická vlna	17
1.5. Polarizace světelné vlny	20
1.6. Intenzita světla	23
1.7. Fázová a grupová rychlost	24
1.8. Měření rychlosti světla	27
2. <u>Světlo v isotropním látkovém prostředí a na rozhraní</u>	34
2.1. Lom a odraz na rovinném rozhraní	35
2.2. Intensity odražené a lomené vlny	36
2.3. Úplný odraz	43
2.4. Elementární teorie disperse v dielektriku a kovu	46
3. <u>Světlo v anisotropním prostředí. Optika krystalů</u>	58
3.1. Struktura elektromagnetické harmonické vlny v anisotropním prostředí	59
3.2. Fresnelův elipsoid; indikatrix	62
3.3. Plocha vektorů k ; indexová plocha	65
3.4. Plocha fázových rychlostí	68
3.5. Plocha paprskových rychlostí; vlnoplocha	69
3.6. Jednoosé krystaly	71
3.7. Dvojlom	73
3.8. Interference polarizovaného světla	77
3.9. Fotoelastický jev	82
3.10 Kerrův jev. Pockelsův jev	83
3.11 Optická aktivita	85

4.	<u>Interference světla</u>	91
4.1.	Ohyb a interference	91
4.2.	Superposice a interference	92
4.3.	Youngův pokus	94
4.4.	Interference dvou svazků na planparalelní vrstvě	97
4.5.	Michelsonův interferometr	103
4.6.	Časová a prostorová koherence	104
4.7.	Interference více svazků při štěpení vlno- plochy	107
4.8.	Interference více svazků při štěpení ampli- tudy	112
4.9.	Aplikace interference	116
5.	<u>Ohyb světla</u>	124
5.1.	Základní formulace teorie ohybu	125
5.2.	Fresnelův ohyb na kruhovém otvoru a disku	131
5.3.	Fresnelův ohyb na štěrbině a hraně	135
5.4.	Fraunhoferův ohyb na štěrbině a kruhovém otvoru	140
5.5.	Ohyb na soustavě štěrbin. Optická mřížka	145
5.6.	Ohyb na vícerozměrných periodických struk- turách	151
5.7.	Fourierova transformace a ohyb světla. Zá- klady holografie	156
6.	<u>Geometrická optika</u>	162
6.1.	Fermatův princip	162
6.2.	Odraz a lom na rovinné ploše	164
6.3.	Ideální zobrazení. Definice pojmů	168
6.4.	Zobrazovací rovnice. Kardinální body sousta- vy	171
6.5.	Centrované soustavy	174
6.6.	Clony, pupily a apertura	176
6.7.	Lom a odraz na kulové ploše	178
6.8.	Čočky	181

6.9. Vady (aberrace) zobrazení	183
6.10 Aberační funkce a její význam	189
6.11 Vada chromatická	191
7. <u>Optické přístroje</u>	194
7.1. Oko	194
7.2. Lupa	196
7.3. Okuláry	197
7.4. Mikroskop	198
7.5. Rozlišovací schopnost mikroskopu	200
7.6. Dalekohledy	205
7.7. Fotografický přístroj	209
7.8. Spektrální přístroje	211

1. PODSTATA A ŠÍŘENÍ SVĚTLA

1.1. Ú v o d

Optika se vyvinula jako nauka o světle, tj. o příčině a podstatě zrakových vjemů. Rozpoznáním elektromagnetické a kvantové podstaty světla se rozšířila oblast optiky v širším slova smyslu na jevy emise, šíření a interakce s látkami elektromagnetického záření v oboru vlnových délek od desítek nanometrů do desítek mikrometrů. Jako ve všech jiných oborech, jsou hranice optiky neostře a některé části optiky se rozvinuly do samostatných nových oborů (např. spektroskopie). Metody vypracované původně v optice se užívají k řešení jiných fyzikálních problémů (např. v elektronové optice, v radiofyzice).

První ucelenou teorii optiky předložil I. Newton ve svém spisu *Treatise on Opticks* (1704). Podle Newtona jsou světelné paprsky hmotné částice emitované ze světelných zdrojů. K této představě ho vedlo známé pozorování o přímočarém šíření světla v homogenním prostředí. Zákony odrazu a lomu na rozhraní dvou opticky různých prostředí vysvětluje Newton čistě mechanicky. Při lomu musí předpokládat, že rychlost světelných částic v prostředí opticky hustším je větší než v opticky řidším.

Naproti tomu Newtonův současník Ch. Huygens vytvořil vlnovou teorii světla, která vykládá šíření světla pomocí vlnoploch. Základem je teorém, který říká, že známe-li vlnoplochu v jistém okamžiku, můžeme zkonstruovat vlnoplochu v každém dalším čase jakožto obálku tzv. vlnoploch elementárních, jejichž zdroji jsou body výchozí vlnoplochy. Huygensova teorie velmi názorně vykládá zákony odrazu a lomu a lze ji úspěšně rozšířit i na anisotropní prostředí. V soulase s pozdějšími experimenty a v protikladu k Newtonově teorii předpokládá Huygens pokles rychlosti světla při lomu do opticky hustšího prostředí, tj. při lomu ke kolmici. Huygensova teorie však nedovede vysvětlit přímočaré šíření světla, tak jak je známe

např. z denního života při vytvoření geometrického stínu. Podle Huygense by se mělo světelné vlnění na hranicích překážek ohýbat a dostávat se i do prostoru geometrického stínu. Dnes víme, že tento ohyb skutečně nastává, není však tak významný jako třeba u vln akustických, což je způsobeno velmi malou délkou světelných vln.

Přímočaré šíření ohraničeného svazku paprsků odvodil z vlnové teorie teprve Fresnel na základě teorie ohybu a interference.

Přes zřejmé přednosti vlnové teorie přežívala dlouho korpuskulární teorie světla díky Newtonově autoritě. Teprve pokusy o interferenci (T. Young 1802) a polarisaci (E.L. Malus 1808, D.E. Arago 1816) dokázaly jednoznačně vlnovou podstatu světla, i to, že se jedná o příčné vlnění. Matematický výklad interferenčních a ohybových jevů na základě vlnové teorie vypracoval A.J. Fresnel (1788 - 1827). Fresnel předpokládal, že nositelem světelných vln je tzv. světelný éter, ježmuž přisuzoval jisté elastické vlastnosti.

Rozhodujícím krokem ve vývoji optiky bylo rozpoznání elektromagnetické podstaty světla. J.C. Maxwell (1831 - 1879) vyvodil ze své teorie elektromagnetického pole, že podstatou světla jsou elektromagnetické vlny o velmi krátké vlnové délce. Spektrum elektromagnetických vln je velmi široké a sahá od nejdelších radiových vln (λ řádu 10^3 m) až k vysoce energetickým záření z kosmických zdrojů o vlnové délce 10^{-15} m a kratší. Přehled podává tab. 1.

Tabulka 1

Elektromagnetické spektrum (charakteristické hodnoty)

Typické zdroje; obory	λ	ν	$h\nu$
Brzdné záření lineárního urychlovače	$7 \cdot 10^{-17} \text{ m}$	$4 \cdot 10^{24} \text{ Hz}$	18 GeV
Brzdné záření synchrotronu	$4 \cdot 10^{-15} \text{ m}$	$7 \cdot 10^{22}$	300 MeV
Paprsky γ :			
Rozpad π -mesonu $\pi^0 \rightarrow 2 \gamma$	$19 \cdot 10^{-15} \text{ m}$	$1,6 \cdot 10^{22}$	67 MeV
Typický rozpad jádra	$100 \cdot 10^{-15} \text{ m}$	$3 \cdot 10^{21}$	10 MeV
	$10 \cdot 10^{-12} \text{ m}$	$3 \cdot 10^{19}$	100 keV
Paprsky X (brzdné záření elektronů)	10 nm	$3 \cdot 10^{16}$	100 eV
Ultrafialové záření (atomů)	390 nm	$8 \cdot 10^{14}$	2,5 eV
Viditelné světlo, modrá hranice			
Modrá čára Hg (výbojky pouliční světla)	436 nm		
Zelená čára Hg -"-	546 nm		
He-Ne-laser, červené světlo	633 nm		
Rozhraní viditelné-infračervené	760 nm	$4 \cdot 10^{14}$	1,6 eV
Dominantní tepelné záření $h\nu = kT$:			
Povrch slunce 6000 K	1 μm	$3 \cdot 10^{14}$	1 eV
Pokožová teplota 300 K	20 μm	$1,5 \cdot 10^{13}$	0,05 eV
Kosmický prostor 3 K	2 mm	$1,5 \cdot 10^{11}$	$5 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$
Radiové vlny a mikrovlny:			
Čpavkový maser	1,5 cm	20 GHz	10^{-3} eV
Radar, pásmo S	10 cm	3 GHz	10^{-4} eV
Ultravysoké frekvence	37-75 cm	800-400 MHz	$2 \cdot 10^{-6} \text{ eV}$
Velmi krátké vlny a televize	1,5-5 m	200-60 MHz	$5 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$
Krátké vlny	10-100 m	30-3 MHz	$10^{-7} - 10^{-8} \text{ eV}$
Střední a dlouhé vlny	200 m	1,5 MHz	$6 \cdot 10^{-9} \text{ eV}$
	2 km	150 kHz	$6 \cdot 10^{-10} \text{ eV}$
Velmi nízké ("akustické") kmitočty	10 km	30 kHz	10^{-10} eV
	10^4 km	30 Hz	10^{-13} eV

Elektromagnetická teorie světla dovedla vyložit všechny známé jevy a zákony šíření světla až téměř do konce devatenáctého století. Potíže elektromagnetické teorie nastaly ve dvou směrech: Za prvé, nedovedla vyložit pozorované zákonitosti fotoelektrického jevu a vůbec zákony interakce elektromagnetického záření s hmotou. Za druhé, představa o elektromagnetickém éteru jako nositeli elektromagnetických vln vedla k rozporu s pozorováním o neměnnosti světelné rychlosti v rovnoměrně přímočaře se pohybujících systémech. První rozpor vedl k poznání kvantové povahy interakce elektromagnetických vln s hmotou, druhý k vytvoření speciální teorie relativity. Oba jevy jsou spojené se jménem A. Einsteina (1879 - 1955). Einsteinem zavedený pojem fotonu představuje nejmenší kvantum energie dané frekvence, které si může vyměňovat elektromagnetické záření s částicí nebo s atomárním či molekulovým systémem. Je třeba si uvědomit, že ani kvantová teorie ani teorie relativity nepopřely fenomenologický popis světelných jevů pomocí elektromagnetické teorie. Z hlediska kvantové teorie a teorie relativity se jeví elektromagnetická teorie světla jako přibližný, avšak pro praktické účely dostatečně přesný popis dějů, kdy se jedná buď o zprůměrování ohromného množství interakcí fotonů s atomárními systémy nebo o pozorování v soustavách s relativní rychlostí pohybu mnohem menší, než je rychlost světla ve vakuu.

Světlo má tedy duální charakter, tím že se v jistých jevech projevuje jako vlna (např. při jevech interference), v jiných jako částice (např. fotoelektrický jev). Otázka, co je podstatou světla, tedy nemá jednoduchou odpověď. Pomocí známých názorných představ nedovedeme vykonstruovat model analogický světlu, který by slučoval obě stránky světelných jevů. To nás nemusí znepokojovat, neboť můžeme říci, že po matematické stránce dovedeme všechny známé jevy dostatečně přesně popsat, a to nám umožňuje jak porozumět jednotlivým jevům a souvislostem, tak činit správné závěry pro aplikace.

V posledních létech se mluví o renesanci optiky v souvislosti jednak s objevem laserů, jednak s aplikacemi v infor-

matice. Lasery jakožto dosud nejmocnější umělé zdroje světla (horní hranice výkonu 10^9 W v pulsním režimu se stále posunuje výše) a nadto koherentní (atomární zdroje ve velkých objemech kmitají ve společném taktu) umožňují dříve nemyslitelné aplikace optiky. Jmenujme jen namátkou trojrozměrnou fotografii - holografii, zaměřování v planetárních měřících, získávání teplot potřebných pro termonukleární reakce. Optika ve spojení s elektronikou (optoelektronika) zasáhne v budoucnu do počítačové a komunikační techniky, kde světelný paprsek jako nositel informací slibuje nové možnosti, pokud se týká množství informací.

V dalších kapitolách se zaměříme jen na základní poznatky především o šíření světla. Při tom budeme vycházet z popisu založeném na vlnové podstatě světla. Jevy kvantové a relativistické budou zařazeny do jiných předmětů obecného kursu fyziky.

1.2. Elektromagnetické vlny

Jak jsme se již zmínili, světelné vlny tvoří část spektra elektromagnetických vln a speciálně viditelné světlo spadá do intervalu vlnových délek asi 390 - 760 nm. Pro kvalitativní úvahy si zapamatujme jako charakteristickou délku vlny $1/2 \mu\text{m}$ (= 500 nm).

Nejdříve budeme uvažovat šíření světla ve vakuu nebo homogenním isotropním dielektriku ($\sigma = 0$). Z Maxwellových rovnic plyne, že vektory elektrického pole \vec{E} a magnetické indukce \vec{B} vyhovují formálně stejným vlnovým rovnicím (viz skriptum Sedlák, Bakule, dále jen SB, rov. (5.21), (5.22))

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad (1.2)$$

kde v značí fázovou rychlost šíření vln. Tato rychlost je dána permitivitou a permeabilitou prostředí

$$v = (\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

a závisí obecně na kmitočtu vlny.

Specielně ve vakuu ($\epsilon_r = \mu_r = 1$) je rychlost vlnění

$$v_0 = c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-\frac{1}{2}}$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Ta pochopitelně na kmitočtu nezávisí.

V optice zavádíme veličinu "absolutní index lomu" n vztahem

$$n = \frac{c}{v}$$

a podle (1.3) je

$$n = (\epsilon_r \mu_r)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

1.3. Rovinná a kulová vlna

Konkrétní tvar funkcí $\vec{E}(\vec{r}, t)$ a $\vec{B}(\vec{r}, t)$ závisí na počátečních a okrajových podmínkách. Nás budou zajímat především dva jednoduché případy, které popisují šíření světla v neomezeném homogenním a isotropním prostředí a které odpovídají vlnám rovinným a kulovým. Obecná funkce času a prostoru popisující rovinnou vlnu se dá napsat jako

$$f(\vec{r}, t) = f\left(t \pm \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v}\right) \quad (1.5)$$

kde \vec{s} je jednotkový bezrozměrný vektor mířící s horním znaménkem ve směru šíření vlny a s dolním znaménkem proti směru šíření. Fáze vlny, tj. výraz $\left(t \pm \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v}\right)$ je konstantí vždy ve všech bodech rovin

$$\vec{s} \cdot \vec{r} = \text{konst}$$

Tyto roviny jsou kolmé na směr šíření \vec{s} a nazýváme je vlnoplochami.

Vektory \vec{E} a \vec{B} jsou dále navzájem vázány Maxwellovými rovnicemi. Jejich vzájemný vztah odvodíme, když do Maxwellových rovnic (SB str.216) dosadíme řešení rovnic (1.1) a (1.2) za podmínek, že dielektrikum je bezztrátové ($i = 0$) a neexistují prostorové náboje ($\rho = 0$). Obdržíme vztahy (SB (5.23) a (5.24))

$$\vec{B} = \frac{1}{v} (\vec{s} \times \vec{E}) \quad (1.6)$$

$$\vec{E} = -v (\vec{s} \times \vec{B}) \quad (1.7)$$

(Použili jsme proti skriptu SB označení \vec{s} místo \vec{n} , aby ne nastávala kolise s indexem lomu.)

Vektory \vec{s} , \vec{E} , \vec{B} tvoří v tomto pořadí pravotočivou triádu ortogonálních vektorů. V rovinné vlně jsou tedy vektory \vec{E} , \vec{B} vždy navzájem kolmé a leží ve vlnoploše, tedy jsou kolmé ke směru šíření vln.

Pokud vektory \vec{E} a \vec{B} zachovávají během šíření vlny stálý směr v prostoru, tj. roviny vektorů \vec{s} a \vec{E} nebo \vec{s} a \vec{B} zůstávají stálé, mluvíme o vlně lineárně polarizované.

V teorii světla byl již dříve zaveden pojem světelného vektoru charakterizující příčnou povahu světelného vlnění. Principiálně sice můžeme považovat kterýkoli vektor \vec{E} nebo \vec{B} za vektor světelný, jenže popisy dějů polarizace jsou v obou alternativách rozdílné (tj. například specifikace polarizace vůči rovině dopadu). Český fyzik Kolář ukázal, že světelný vektor zavedený Fresnelem je totožný s vektorem \vec{E} elektromagnetické vlny. Budeme tedy nadále k popisu světelné vlny užívat vektoru \vec{E} . Vektor \vec{B} je pak jednoznačně určen vztahy (1.6) a (1.7), jestliže je zadán směr šíření \vec{s} .

Jiné řešení vlnové rovnice dostaneme, když požadujeme, aby bylo prostorově kulově symetrické, tj. aby funkce $f(\vec{r}, t)$, pokud se týká prostorových souřadnic, byla závislá jen na absolutní hodnotě \vec{r} , $|\vec{r}| = r$.

Jestliže do vlnové rovnice typu (1.1) máme dosadit polární souřadnice a respektovat nezávislost funkce f na úhlech ϑ a φ , transformují se parciální derivace s použitím $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ takto:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad \text{atd. cyklicky.}$$

Druhé derivace stejným postupem dávají

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad \text{atd. cyklicky}$$

takže Laplaceův symbol se transformuje podle vzorce

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f)$$

S tím obdržíme vlnovou rovnici pro $f(r,t)$ ve tvaru

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

nebo po vynásobení r (které nezávisí na t !)

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (r f)}{\partial t^2} = 0$$

Tato rovnice je formálně shodná s rovnicí pro rovinnou vlnu, ovšem pro funkci $r f$ místo f . Jejím řešením tedy je (pro kulovou symetrii $\vec{s} \cdot \vec{r} = r$)

$$r f = f_1(t - \frac{r}{v})$$

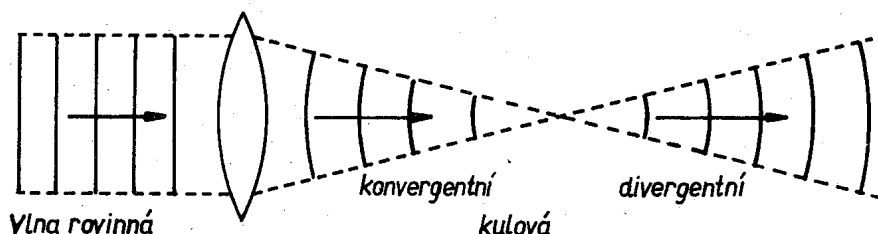
čili

$$f = \frac{1}{r} f_1(t - \frac{r}{v}) \quad (1.8)$$

Rovnice (1.8) tedy popisuje kulovou divergentní vlnu šířící se z bodového zdroje v počátku souřadnic. Její amplituda klesá s první mocninou vzdálenosti od zdroje. Analogicky, konvergentní kulová vlna by byla popsána rovnicí (1.8) s kladným znaménkem u druhého členu argumentu.

Vlnoplochou jsou body, v nichž je fáze konstantní, tj. $r = \text{konst.}$ Jsou to tedy kulové plochy.

Žádnou z těchto jednoduchých vln (1.5), (1.8) nelze v optice realizovat přesně. Nejběžnější zdroj záření je typu dipólového oscilátoru. Ten zdaleka nemá kulově symetrické pole. Přesto však ve velké vzdálenosti od zdroje a v malém průřezu světelného svazku lze vlnu považovat za rovinnou, čistě transversální. Podobně v nevelké vzdálenosti od zdroje, avšak v malém prostorovém úhlu lze považovat vlnu za část vlny kulové. Pomocí optických systémů lze jeden druh vlny převádět na druhý (obr.1.1).



Obr.1.1. Vlna rovinná a kulová

Rozruch, který se vlnou šíří, může být popsán buď skalárem (např. tlak akustické vlny) nebo vektorem (výhybka v akustické vlně). Jestliže vlnění je podstaty vektorové, pak je můžeme popsat vždy třemi vlnovými rovnicemi pro tři kartézské souřadnice veličiny vlnového rozruchu. Tím převádíme popis na tři vlnové funkce pro skalární veličiny složek. Okamžitá a místní hodnota vektorové veličiny rozruchu je dána vektorovým součtem okamžitých a místních hodnot složek.

1.4. Harmonická vlna

V dalším výkladu se omezíme převážně na vlny harmonické, tj. takové, že

- a) jejich časový průběh v jistém bodě je popsán harmonickou funkcí času,

b) jejich místní průběh podél směru šíření v jistém časovém okamžiku je popsán harmonickou funkcí vzdálenosti.

Průběh rovinné harmonické vlny např. s elektrickým vektorem ve směru osy y lze vyjádřit alternativně takto:

$$E_y = E_{y0} \cos \omega \left(t - \frac{\vec{s} \cdot \vec{r}}{v} \right) \quad (1.9)$$

$$E_y = E_{y0} \cos (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (1.9')$$

kde jsme zavedli vlnový vektor \vec{k} vztahem

$$\vec{k} = \vec{s} \cdot \frac{\omega}{v} = \vec{s} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.10)$$

Názorný význam vlnového vektoru je takový, že představuje vektor ve směru šíření vlny, jehož absolutní velikost nám udává změnu fáze připadající na jednotkovou vzdálenost ve směru šíření ($k = \omega dt/vdt$).^{x)}

Je výhodné vyjadřovat harmonickou vlnu komplexně. Podobně jako se zavádí komplexní vyjádření střídavých proudů, i zde má fyzikální význam podle dohody buď reálná nebo imaginární část komplexních výrazů. Píšeme tedy pro komplexní složky elektrického pole

$$E_j = E_{j0} e^{i(\omega t \mp \vec{k} \cdot \vec{r} + \sigma_j)} \quad (1.11)$$

kde σ_j je fázová konstanta závisající na volbě počátku času nebo souřadnic. Horní znaménko patří vlně šířící se směrem $+k$, spodní pak směrem opačným.

Jestliže se dohodneme tak, že skutečnou vlnu popisuje reálná část výrazu (1.11), pak je lhostejné, s jakým znaménkem volíme exponent. Někdy se píše exponent ve tvaru $i(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp \omega t + \sigma_j)$, kde opět horní znaménko přísluší vlně šířící se směrem

x) Pro zkrácení budeme v dalším často v textu vynechávat termín "kruhový" v souvislosti s kmitočtem nebo frekvencí, neboť budeme téměř výhradně pro popis harmonické vlny užívat veličinu ω a jen výjimečně prostý kmitočet ν . Stejně pro absolutní hodnotu vlnového vektoru $k = 2\pi/\lambda$ budeme užívat výraz vlnočety, i když se v praxi obvykle vlnočtem rozumí $1/\lambda$.

\vec{k} a dolní směrem $-\vec{k}$. Při těchto dvou různých značeních ovšem má fázová konstanta σ_j různý význam a musíme dávat pozor na vzájemné fázové vztahy jednotlivých složek E_j .

Jestliže pracujeme s monochromatickými rovinnými vlnami, zůstává faktor $e^{i\omega t}$ konstantní a v mnohých případech jej lze vynechat. Komplexní amplitudou vlny \hat{E}_j nazýváme výraz

$$\begin{aligned}\hat{E}_j &= E_{j0} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \sigma_j)} \\ &= \hat{E}_{j0} e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r})},\end{aligned}$$

kde

$$\hat{E}_{j0} = E_{j0} e^{i\sigma_j} \quad (E_{j0} \text{ je reálné}).$$

Vektorová rovinná vlna je tedy popsána v komplexní formě rovnicí

$$\vec{E} = (\hat{i} \hat{E}_{x0} + \hat{j} \hat{E}_{y0} + \hat{k} \hat{E}_{z0}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r})}$$

Komplexní vyjádření má mnoho výhod, neboť je v něm obsažena informace o fázi. Sčítání komplexních výrazů se dá interpretovat též jako sčítání vektorů v komplexní rovině. Aby však nedošlo k záměně s pojmem vektoru v kartézském prostoru, budeme označovat veličiny popisované komplexními výrazy jakožto fázory. Vektorová vlna je tedy dána třemi fázory svých složek.

Vyšetřování harmonických vln má základní důležitost nejen proto, že umožňuje řešit úlohy o šíření v uzavřené formě, nýbrž také proto, že jiné tvary vlny lze vyjádřit pomocí Fourierova rozkladu jako superposici řady (obecně nekonečné) harmonických vln.

Máme-li totiž kvadraticky integrovatelnou komplexní periodickou funkci proměnné θ s periodou θ_1 , tj. platí-li

$$f(\theta) = f(\theta + \theta_1),$$

pak funkci $f(\theta)$ lze rozložit na nekonečnou Fourierovu řadu

$$f(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_m \exp(i m \theta) \quad (1.12)$$

kde m nabývá všech hodnot celých čísel, včetně nuly. Jestliže proměnnou θ interpretujeme jako úhel a normujeme $\theta_1 = 2\pi$, pak jednotlivé členy Fourierovy řady jsou harmonické m -tého řádu s periodami, které jsou celistvými subnásobkami základní periody:

$$\theta_m = \frac{1}{m} \theta_1 = \frac{2\pi}{m}$$

Konkrétně můžeme za θ považovat např. časovou proměnnou ωt nebo prostorovou proměnnou kz a členy Fourierovy řady pak jsou svrchní harmonické s frekvencemi $m\omega_1$ či vlnočty mk_1 , neboli s periodami T_1/m a λ_1/m .

Koeficienty \hat{A}_m Fourierovy řady se dají vypočítat, pokud umíme příslušné funkce integrovat:

$$\hat{A}_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \exp(i m \theta) d\theta \quad (1.12a)$$

Koeficienty \hat{A}_m jsou obecně komplexní $\hat{A}_m = C_m e^{i\varphi_m}$ a obsahují tak informaci o fázi φ_m příslušné složky. Soubor amplitud a fází \hat{A}_m nazýváme Fourierovským spektrem funkce $f(\theta)$. Docházíme k závěru, že spektrum periodické funkce je diskrétní, je to analogie čarového optického spektra. V měřítku ω nebo k jsou spektrální "čáry" ekvidistantní, se vzájemnými vzdálenostmi ω_1 nebo k_1 .

1.5. Polarizace světelné vlny

Mějme světelnou vlnu, která se šíří směrem osy $+z$ a je popsána složkami E_x , E_y , takže

$$E_x = 0; E_y = E_{y0} \exp i(\omega t - kz)$$

Vektor \vec{E} trvale zůstává v rovině $(y z)$ a takové vlně říkáme lineárně polarizovaná v rovině $(y z)$. (V dřívější literatuře

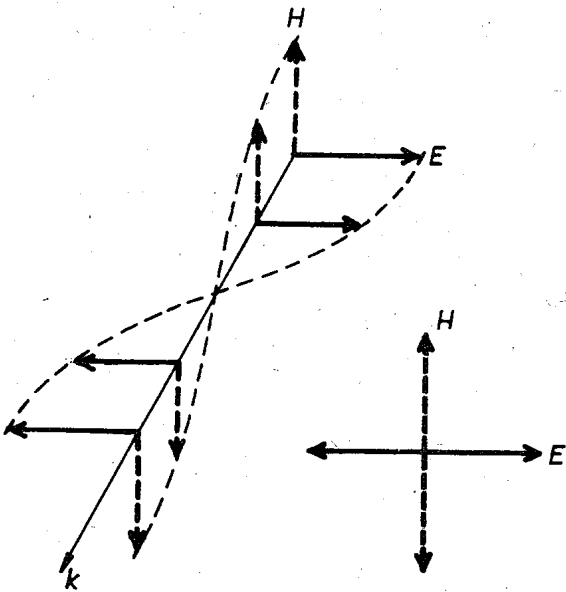
naopak znamenal termín "polarizovaná v rovině" tolik, že směr kmitů se děje kolmo k této rovině.)

Na základě obecných vztahů \vec{E} a \vec{H} lze v tomto případě vektor \vec{H} popsat rovnicemi

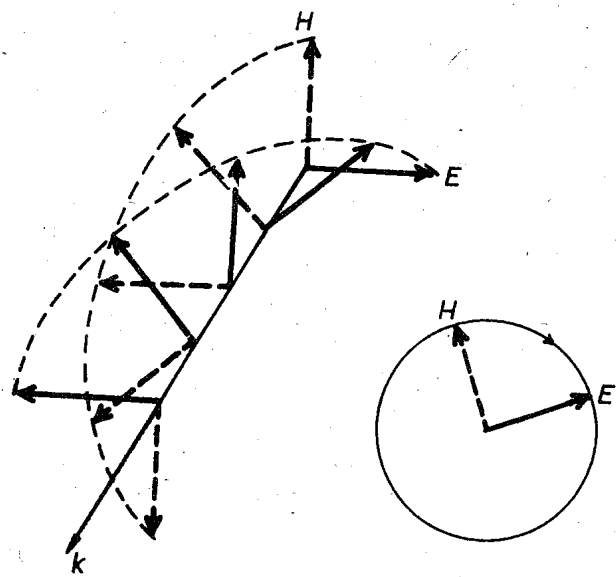
$$H_x = H_{x0} \exp i(\omega t - kz)$$

$$H_y = 0,$$

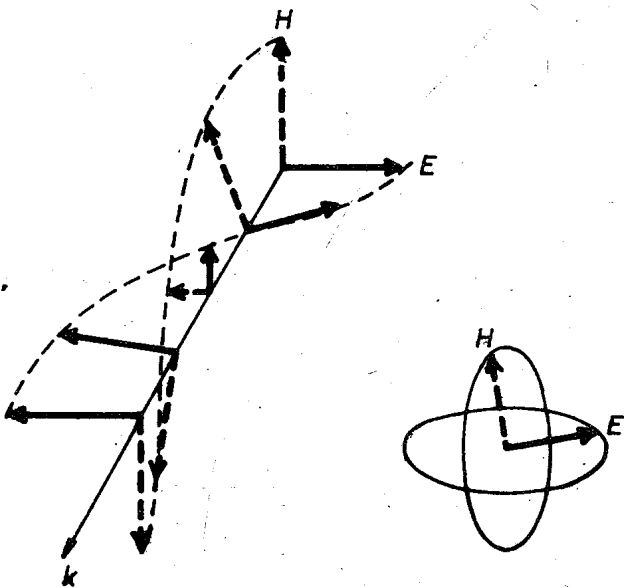
takže leží trvale v rovině (x z). Orientace vektorů je na obr. 1.2a).



Obr.1.2a. Polarizované vlny
a) lineárně polarizovaná



Obr.1.2b. Polarizované vlny
b) elipticky polarizovaná



Obecněji je lineárně polarizovaná vlna charakterizována tím, že složky kolmé ke směru šíření mají buď stejnou nebo opačnou fázi:

Obr.1.2c. Polarizované vlny
c) kruhově polarizovaná

$$\vec{E} = (\vec{i} E_{x0} + \vec{j} E_{y0}) \exp i(\omega t - kz) \quad (1.13)$$

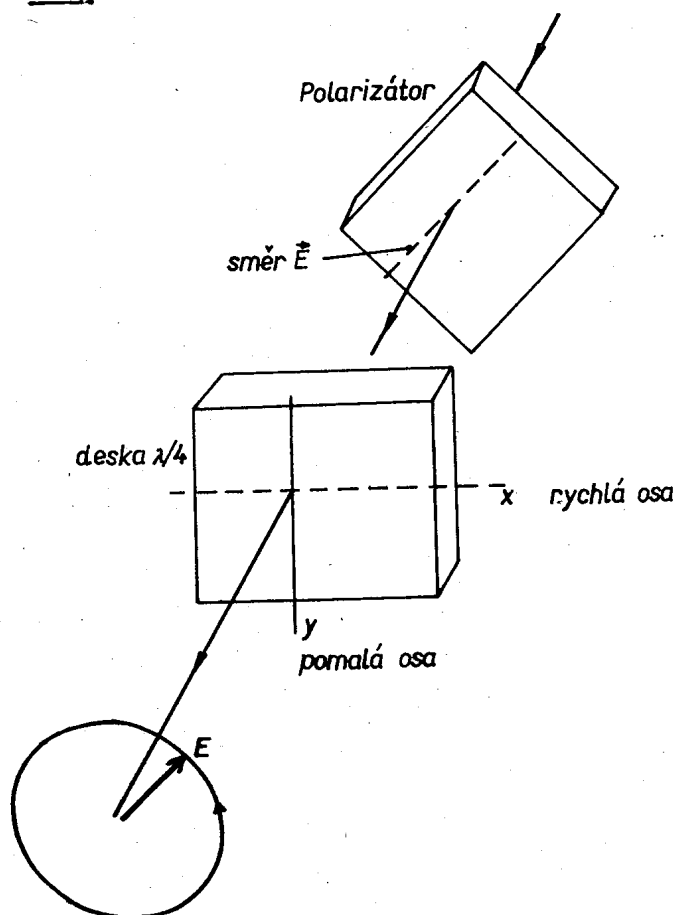
V ještě obecnějším případě jsou složky E_j popsány fázory s obecným fázovým rozdílem. Uvažme nejdříve případ, kdy fázový rozdíl je $\pm \frac{\pi}{2}$:

$$\vec{E} = \vec{i} E_{x0} \exp i(\omega t - kz) + \vec{j} E_{y0} \exp i(\omega t - kz \pm \frac{\pi}{2}),$$

což můžeme vzhledem k identitě $i = \exp(i \frac{\pi}{2})$ přepsat:

$$\vec{E} = (\vec{i} E_{x0} \pm i \vec{j} E_{y0}) \exp i(\omega t - kz) \quad (1.14)$$

Z nauky o skládání kmitů vyplývá, že tyto dva k sobě kolmé kmity (E_x , E_y) s fázovým rozdílem $\pm \frac{\pi}{2}$ dávají výsledný kmit eliptický s osami elipsy ve směrech x a y . Jestliže platí horní znaménko v (1.14), jedná se o kmit pravotočný (ve směru pohybu hodinových ručiček), nebo levotočný se znaménkem spodním. Vlnu popsanou rov. (1.14) nazýváme elipticky polarizovanou (obr. 1.2b).



Obr.1.2d. Polarizované vlny
d) vytvoření kruhově polarizované vlny z lineárně polarizované

Jestliže speciálně

$E_{x0} = E_{y0}$, pak se vlna stává kruhově polarizovanou (obr.1.2c).

Světlo elipticky polarizované můžeme získat ze světla lineárně polarizovaného, jestliže vneseme mezi jeho kolmé složky (srov. (1.13)) fázový rozdíl různý od $(\pm N\pi)$ (N celé).

Speciálně, světlo kruhově polarizované získáme lineárně polarizovaného např. pomocí čtvrtvlnové destičky. Čtvrtvlnová destička je obvykle tenká sídlová destička, která při vhodné orientaci zpožďuje jeden ze vzájemně kolmých

kmitů právě o $\pi/2$ vůči druhému. Její tloušťka d vyhovuje podmínce

$$d(n_y - n_x) = \frac{\lambda}{4}$$

čili

$$\delta = k \cdot d(n_y - n_x) = \frac{\pi}{2}$$

kde n_x , n_y jsou indexy lomu pro složky E_x a E_y (viz odst. 3.3). Pro kruhovou polarizaci je ještě nutno, aby $E_{x0} = E_{y0}$. Toho se dá docílit tak, že počáteční směr polarizace se volí tak, aby kmitosměr vlny vstupující do čtvrtvlnové destičky půlil úhel mezi osami x a y , tj. úhel mezi kmitosměry, které destička propouští. Propuštěné složky jsou průměty původního kmitosměru do os x, y a jsou tedy při sklonu 45° stejně velké (obr. 1.2d).

1.6. Intensita světla

Energie přenášená vlnou v nevodivém prostředí je podle Poyntingovy věty určena vektorem \vec{S} (SB, rov. 5.32)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Velikost Poyntingova vektoru \vec{S} udává tok výkonu jednotkovou plochou kolmou ke směru \vec{S} . V rovinné vlně v isotropním prostředí směr \vec{S} souhlasí s vektorem \vec{k} . Poněvadž v rovinné vlně platí úměrnost mezi vektory \vec{E} a \vec{H} , (rov. 1.6 a 1.7), je $S \sim E^2$. Poněvadž naprostá většina detektorů světla dává signál úměrný střední hodnotě dopadajícího výkonu, nazýváme tuto hodnotu intenzitou světla. Mírou intenzity světla je tedy čtverec amplitudy elektrického nebo magnetického pole. V dalším budeme okamžitou intenzitou světla I nazývat výraz

$$I = \hat{E} \hat{E}^* \quad (1.15)$$

Zpravidla nás zajímá střední hodnota intenzity

$$I_{\text{stř}} = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{E} \hat{E}^* dt, \quad (1.16)$$

kde T je doba značně větší než doba kmitu.

1.7. Fázová a grupová rychlost

Fázová rychlost vlnění je definována jako rychlost pohybu vlnoplochy ve směru šíření vlnění. Pro elektromagnetické vlny je fázová rychlost určena rovnicí (1.3) a platí obecné vztahy mezi fázovou rychlostí v , vlnovou délkou λ , kruhovou frekvencí ω , vlnočtem k a indexem lomu n :

$$v = \frac{\omega}{k} \quad v = \frac{c}{n} \quad n = \frac{c k}{\omega} \quad (1.17)$$

$$v = \lambda \frac{\omega}{2\pi}$$

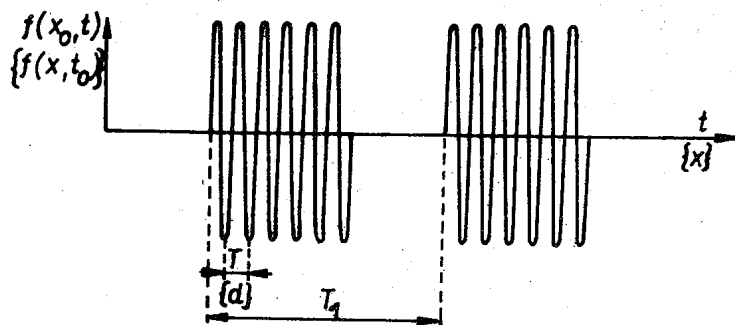
λ je vlnová délka světelné vlny v prostředí. Často charakterizujeme monochromatické světlo pomocí jeho vlnové délky ve vakuu λ_0 příp. vlnového vektoru k_0 ve vakuu. S těmito veličinami platí

$$\lambda_0 = n \lambda \quad k_0 = \frac{k}{n}$$

Ideálně harmonickou vlnu označujeme zároveň za ideálně monochromatickou, tj. charakterizovanou jedinou vlnovou délkou λ . Skutečné zdroje označované jako monochromatické, tj. izolované spektrální čáry, mají při bližším zkoumání vlastní spektrum malé, avšak konečné šířky $\Delta\lambda$ s těžištěm u jisté vlnové délky λ . Budeme-li nadále mluvit o monochromatickém světle, budeme mít obvykle na mysli abstrakci ideálního případu velmi úzké čáry, $\Delta\lambda \rightarrow 0$.

Čistě harmonická vlna nemůže přenášet žádnou informaci či signál. Nejjednodušší informace, kterou může vlnění přenášet, je střídání časových intervalů s jistou konstantní ampli-

tudou (zdroj zapnut) a s nulovou amplitudou (zdroj vypnut). I když během intervalu s nenulovou amplitudou se kmity dějí se stálou frekvencí, není tento děj popsán jednoduchou harmonickou funkcí, neboť ta popisuje nepřetržité šíření ideálně monochromatické vlny. Kdybychom provedli Fourierův rozklad signálu, který je naznačen na obr.1.3, obdrželi bychom spek-



Obr.1.3. Skokově modulovaná téměř harmonická vlna

trum, které se skládá z velkého množství harmonických vln s frekvencemi $m \frac{2\pi}{T_1}$ v okolí "nosné" frekvence $\frac{2\pi}{T}$. Jestliže je $T_1 \gg T$, lze přibližně říci, že jsou ve spektru signálu zastoupeny frekvence s těžištěm poblíž hodnoty $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a o šířce intervalu $\Delta\omega \approx \frac{2\pi}{T_1}$. Čím delší jsou tedy signály vůči době kmitu nosné vlny, tím je užší Fourierovské spektrum, v limitě pro nekonečně dlouhý signál $T_1 \rightarrow \infty$ (tj. nulová hodnota informace) je vlna opět monochromatická.

Jestliže se tedy šíří nějakým prostředím modulovaná vlna o nosné frekvenci ω , pak vzniká otázka, jakou rychlostí se šíří čelo signálu. Tato rychlost, která se nazývá grupová, zároveň znamená rychlost, kterou se šíří energie přenášená vlnou. To je patrné z toho, že když vyšleme jediný, časově omezený puls vlnění, můžeme jej detegovat na nějakém vzdáleném místě za čas, který potřebuje právě čelo signálu k proběhu této vzdálenosti.

Pokud je fázová rychlost vlnění nezávislá na frekvenci, pak se všechny složky Fourierovského spektra šíří stejně rychle, nenastávají mezi nimi fázová zpoždění a signál se šíří jako celek stejnou, tj. fázovou rychlostí. Tomu je tak ve vakuu. Jestliže však existuje disperse (viz odst. 2.6), tj. závislost fázové rychlosti (nebo indexu lomu) na vlnočtu, pak obálka signálu se posunuje relativně k nosné vlně a čelo signálu se šíří

rychlostí odlišnou od fázové. Obecně může být grupová rychlost menší i větší než fázová.

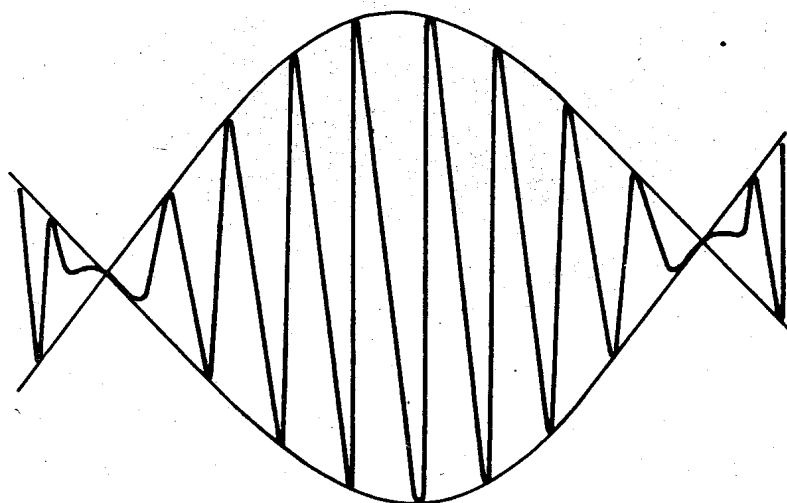
K odvození výrazu pro grupovou rychlost je účelné vyjít z jednoduchého případu, kdy spektrum signálu obsahuje jen dvě diskrétní frekvence, a sice $\omega + \Delta\omega$ a $\omega - \Delta\omega$. Odpovídající vlnočty jsou $k + \Delta k$ a $k - \Delta k$. Amplitudy obou vln nechť jsou stejné, rovny A a obě vlnění nechť se šíří směrem osy z a platí $\Delta\omega \ll \omega, \Delta k \ll k$

$$f = A \exp \left\{ i [(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)z] \right\} + A \exp \left\{ i [(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)z] \right\}$$

Po vytknutí společných činitelů obdržíme

$$f = A \exp [i(\omega t - kz)] \left\{ \exp [i(\Delta\omega t - \Delta k z)] + \exp [-i(\Delta\omega t - \Delta k z)] \right\}$$

$$f = 2A \exp [i(\omega t - kz)] \cdot \cos(\Delta\omega t - \Delta k z)$$



Tento výraz můžeme interpretovat jako vlnu o vlnočtu k a frekvenci ω modulovanou harmonickou obálkou o frekvenci $\Delta\omega$ a o vlnočtu Δk (obr.1.4). Tato obálka se tedy pohybuje jako vlna rychlostí podle (1.10)

Obr.1.4. Superposice dvou harmonických vln s rozdílem frekvencí $\Delta\omega$

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

Dá se ukázat, že tento vztah platí i pro větší počet složek, případně pro téměř spojitě spektrum signálu (při $T_1 \gg T$). Rychlost v_g označujeme jako rychlost grupovou a v limitním případě hustého Fourierovského spektra je

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.18)$$

Vrátíme-li se ke vztahům (1.10), můžeme psát

$$\omega = k v = \frac{k c}{n}$$

Pokud by index lomu nezávisel na vlnočetu, byla by grupová rychlost shodná s fázovou

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n} = v$$

Jestliže se světlo šíří hmotným prostředím, pak je

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk}\right) \quad (1.19)$$

V běžných případech je $\frac{dn}{dk} > 0$ (čili $\frac{dn}{d\lambda} < 0$), to znamená, že grupová rychlost je menší než fázová. Jen v oblasti anomální disperse (odst. 2.6) je $\frac{dn}{dk} < 0$ a grupová rychlost je větší než fázová.

K rozdílu mezi fázovou a grupovou rychlostí je nutno přihlížet, kdykoli se měří rychlost světla pulsovou metodou v prostředích s nenulovou dispersí.

1.8. Měření rychlosti světla

Úloha, změřit rychlost světla patřila mezi nejdůležitější ve fyzice, a to jak z praktických tak i principiálních důvodů. Právě ve vývoji názorů na podstatu světla byla otázka, je-li rychlost světla konečná nebo nekonečná, základní důležitosti.

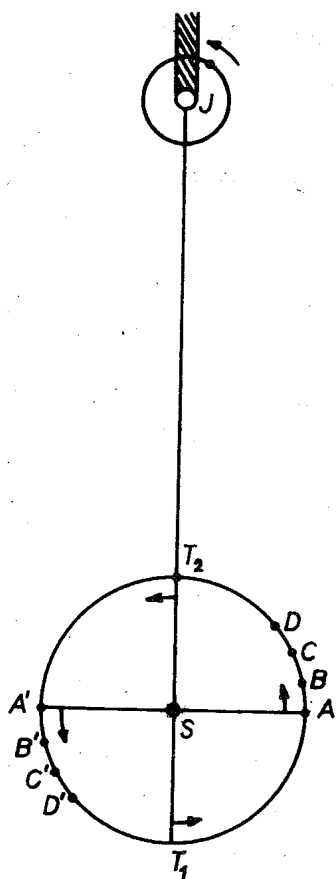
Nejstarší pokus o změření rychlosti světla provedl Galilei. Postavil na dva vzdálené vrchy dva pozorovatele se zakrytými lucernami, z nichž jeden měl v daný okamžik lampu odkrýt a druhý, jakmile spatří světlo od prvního, učinit totéž. První pozorovatel měl měřit dobu, jež uplyne mezi odkrytím lucerny a

spatřením světla od druhého pozorovatele. Tato doba by pak udávala dvojnásobek času, jež potřebuje paprsek k proletění vzdálenosti mezi oběma pozorovateli. Pokus pochopitelně ztroskotal, neboť vzhledem k ohromné rychlosti světla změřil pozorovatel právě jen "vlastní dobu" druhého pozorovatele, jíž je zapotřebí, aby na dopad paprsku do oka reagoval odsunutím clony.

V principu je však tato metoda správná, jen je třeba vyloučit osobní chyby pozorovatelů. To provedl Fizeau 1849 tím způsobem, že místo druhého pozorovatele použil zrcadla a místo ručního odkrývání světla - automatického přerušování pomocí rotujícího ozubeného kotouče.

Dříve však změřil rychlost světla, vlastně náhodou, astronom Olaf Römer (1676). Pozoroval nepravidelnosti v časech počátku zatmění Jupiterových měsíčků. Planeta Jupiter má několik souputníků, z nichž některé procházejí při každém svém oběhu stínem vrženým planetou, takže jejich zatmění se mají opakovat ve zcela pravidelných intervalech. Střední doba mezi dvěma za sebou následujícími zatměními byla z velkého počtu pozorování známa se značnou přesností. Römer však pozoroval, že během poloviny roku, kdy naše Země se pohybuje po své dráze (obr. 1.5) z bodu T_1 do T_2 , zatmění nastávají stále dříve, než by odpovídalo předpovědi pomocí střední doby mezi zatměními, kdežto v další polovině roku se zatmění opět zpožďují. To je snadno vysvětlitelné na základě konečné rychlosti světla.

Nechť počátky zatmění jsou pozorovány v okamžicích, kdy Země se nalézá v bodech A, B, C ... A' B' Při pohybu např. z bodu A do B se Země poněkud přiblíží k Jupiteru, takže paprsek ohlašující počátek zatmění dorazí k Zemi v bodě B za kratší dobu, než když byla Země v bodě A. Proto je interval mezi zatměními pozorovanými v bodech A a B kratší, než odpovídá skutečnému intervalu mezi za sebou následujícími vstupy měsíce do stínu. Naopak při zatměních pozorovaných z bodů A' a B' je měřený interval delší než interval střední. Rozdíly mezi dvěma za sebou následujícími pozorováními jsou malé, zato



však je možno měřit celkové zpoždění mezi body T_1 a T_2 . Jestliže za půl roku nastane celkem N krát zatmění, pak poslední z nich by mělo nastat za dobu $(N - 1)\tau$ po prvním (τ je střední doba mezi zatměními). Ve skutečnosti je však pozorováno N -té zatmění dříve o čas, který potřebuje paprsek k proběhnutí průměru zemské dráhy D . Platí tedy:

$$t = (N - 1)\tau - \frac{D}{c}$$

Podobně v další polovině roku připadá na interval mezi N zatměními celková doba t' , jež je o stejnou diferenci delší než $(N - 1)$

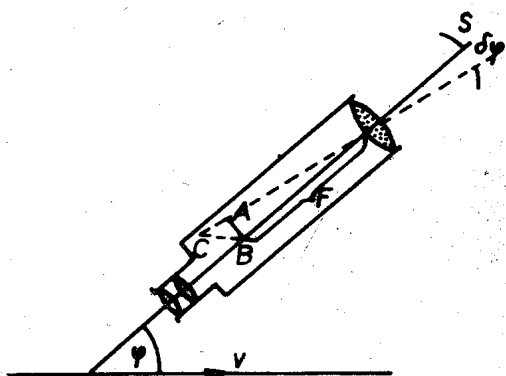
$$t' = (N - 1)\tau + \frac{D}{c}$$

odtud

$$\frac{2D}{c} = t' - t, \quad c = \frac{D}{\frac{t' - t}{2}}$$

Obr.1.5. Römerova metoda měření rychlosti světla

Römer našel pro $\frac{t' - t}{2}$ dobu 1320 sec a tomu odpovídá $c = 215000$ km/sec, což alespoň řádově souhlasí se správnou hodnotou c .



Obr.1.6. Bradleyova metoda měření rychlosti světla

Bradley použil k určení rychlosti světla jiné astronomické metody (1728). Její podstatu si vložíme pomocí obr. 1.6. Necht pozorovaná hvězda leží ve směru odchýleném o úhel φ od směru okamžité rychlosti Země na její dráze kolem Slunce. Kdyby se Země nepohybovala, světelný paprsek přicházející z nekonečně vzdálené hvězdy by postupoval osou dalekohledu a vytvořil by obraz v ohnisku objek-

tivu B. Tak to vypadá, jestliže je dalekohled pevný vůči systému stálic. Uvažme, že dalekohled se pohybuje spolu se Zemí po dráze kolem Slunce rychlostí v (asi 30 km/sec). Jestliže paprsek potřebuje k proběhnutí dráhy F od objektivu do ohniska čas t , pak za tu dobu se posune dalekohled ve směru okamžité rychlosti Země v o vzdálenost $v \cdot t$, takže paprsek, který původně šel směrem osy dalekohledu, vytvoří obrázek hvězdy v bodě C, vzdáleném o $\overline{CB} = v \cdot t$ od ohniska proti směru pohybu Země. Abychom dostali obraz hvězdy opět do středu zorného pole, musíme sklonit dalekohled o úhel $\sigma\varphi$. Tento úhel nazýváme aberací. Pro něj platí

$$\sigma\varphi = \frac{\overline{AB}}{F} = \frac{\overline{CB} \sin \varphi'}{F}$$

ježto je $\sigma\varphi$ velmi malý, je $\varphi \doteq \varphi'$ a tedy

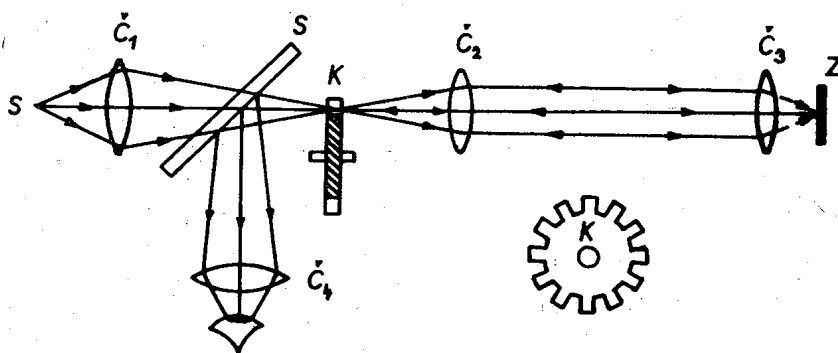
$$\sigma\varphi = \frac{v \cdot t \sin \varphi}{c \cdot t} = \frac{v}{c} \sin \varphi$$

Pro hvězdu ležící v pólu ekliptiky je aberace největší, neboť v tom případě $\varphi = \frac{\pi}{2}$, takže $\sigma\varphi = \frac{v}{c}$.

Ježto se směr okamžité rychlosti v a tudíž i úhel během ročního pohybu Země neustále mění, opisuje stálice na obloze zdánlivě elipsu, a to tím plošší, čím blíže je hvězda k rovině ekliptiky. Pro každý bod na nebeské sféře lze najít dvě polohy Země, při nichž je $\varphi = \frac{\pi}{2}$, takže všechny elipsy mají stejnou velkou poloosu, jejíž zorný úhel je právě $\frac{v}{c}$ a činí číselně asi 20". Ze známé rychlosti v vypočetl Bradley

rychlost světla 303000 km/sec, tedy poměrně velmi přesně.

Podstata metody Fizeauovy (1849) je naznačena na obr. 1.7. Světlo ze zdroje S je



Obr.1.7.Fizeauova metoda měření c

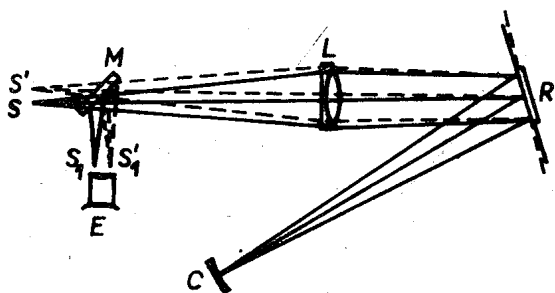
soustředěno pomocí čočky do jednoho bodu ležícího ve výši zubů rovnoměrně se otáčejícího ozubeného kola K . Pomocí čočky \check{C}_2 se vytvoří rovnoběžný svazek paprsků, který proběhne značnou vzdálenost a vrací se po dvojnásobném průchodu čočkou \check{C}_3 a odraze na zrcadle Z stejnou cestou. Mezi čočkou \check{C}_1 a kolo je vložena skleněná deska, která vrhá zpětný svazek paprsků do pozorovacího okuláru \check{C}_4 . Pokud se kolo otáčí pomalu, stihne paprsek, který prošel mezerou mezi zuby, ještě tutéž mezeru a projde do oka pozorovatele. Jestliže se zvýší patřičně rychlost otáčení, pak svazek paprsků, proědší mezerou, při návratu zpět padne na zub a žádné světlo se k pozorovateli nedostane. Jestliže je počet zubů z a počet otáček kola za vteřinu n , pak doba, za níž se vymění právě mezera za zub a tedy i doba potřebná k proběhnutí dráhy $K-Z-K$ je

$$\Delta t = \frac{1}{2nz}$$

Označíme-li vzdálenost mezi kolem a zrcadlem L , je rychlost světla

$$c = \frac{2L}{\Delta t} = 4nzL$$

Fizeau naměřil při $L = 14 \text{ km}$ $c = 315000 \text{ km/sec}$, tedy hodnotu velmi blízkou správné.



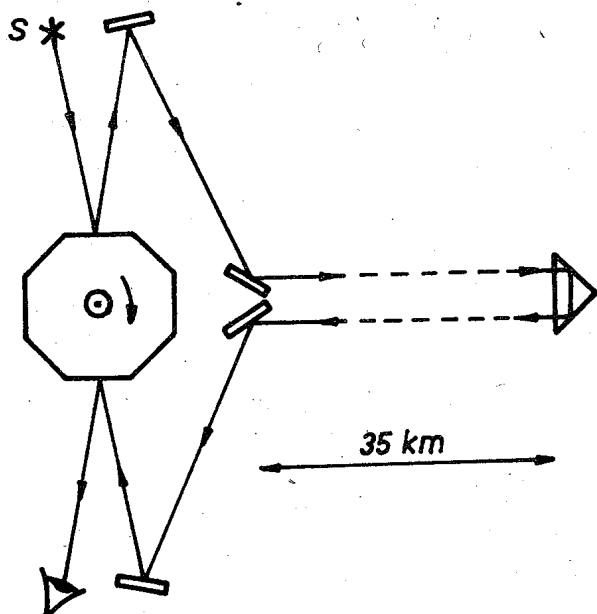
Obr.1.8.Foucaultova metoda měření c

Důležitá je ještě další laboratorní metoda používající zrcadla. Její schema je na obr. 1.8. Světlo ze zdroje S prochází objektivem L a soustředí se po odraze na rotujícím zrcadle R , na druhém zrcadle C . Odtud se vrací k rotujícímu zrcadlu, které se zatím potočilo o malý úhel, takže dal-

ší cesta je poněkud odchýlena od původní. V důsledku toho vzniká po odraze na polopropustném zrcadle M , které je nehybné, obraz v bodě S_1' , vpravo od obrazu S_1 při stojícím zrcadle. Ze vzdálenosti S_1S_1' , jež je stejná jako SS' , je

možno určit úhel pootočení zrcadla za dobu, v níž paprsky proběhly dráhu R-C-R a ze známé rychlosti otáčení zrcadla je možno zjistit rychlost světla.

Této metody užil Foucault ke zmíněnému již měření rychlosti světla ve vodě, neboť mu umožnila značně zkrátit měřící základnu R-C (na 4 m za použití velké rychlosti otáčení 800 ot/sec).



Obr.1.9. Michelsonova metoda měření c

Další zdokonalení této metody provedl Michelson, který zavedl použití rotujícího zrcadlového hranolu s n stěnami, jehož základnu tvoří pravidelný mnohoúhelník. (obr. 1.9). Rychlost otáčení se nastavuje tak, aby paprsek odražený od jedné boční stěny po proběhnutí měřící základny (Michelson užíval základnu 35 km) dospěl nazpět k prisma tu pootočenému přesně o $\frac{2\pi}{n}$ a odrazil se právě tak, jako kdyby rotující hranol stál. Ze známé úhlové rychlosti hra

holu lze určit dobu proběhu paprsku. Michelson změřil v r. 192 rychlost světla

$$c = 299796 \pm 4 \text{ km/s}$$

Další zdokonalení měřících metod přineslo elektrooptické formování velmi krátkých světelných pulsů. Zde se používá jako závěrky Kerrový cely (viz kap. 3.10), která umožňuje elektrickými pulsy prakticky bez setrvačnosti regulovat intenzitu polarizovaného světla celou procházejícího. Bergstrand vypracoval v r. 1951 elektronickou metodu, jak přesně zjistit interval mezi otevřením elektrooptické "závěrky" a dopadem paprsku po proběhnutí měřící základny, která umožňovala měřit c s přesností $\pm 0,3 \text{ km/s}$. Dnes se užívá jeho metody v geodesii k zaměřování velkých vzdáleností.

Jiná měření, už vlastně nikoli optická, provedl Aslakson v r. 1949, a to metodou odrazu radarových pulsů. Essen v r. 1951 změřil rychlost světla nepřímo přesným měřením rezonančního kmitočtu přesně konstruovaného dutinového resonátoru. Docílil přesnosti ± 3 km/s.

E.R. Cohen a J.W.M. Du Mond provedli r. 1964 analýsu přesnosti všech významných měření rychlosti světla a udali jako nejpravděpodobnější hodnotu

$$c = \underline{(2,997925 \cdot 10^8 \pm 3 \cdot 10^2) \text{ m/s}}$$

Tato hodnota se dosud všeobecně přijímá jako nejsprávnější.

2. SVĚTLO V ISOTROPNÍM LÁTKOVÉM PROSTŘEDÍ A NA ROZHRAŇÍ

Probereme zde nejdříve šíření světla dielektriky a jevy na rozhraní.

Isotropní bezztrátové dielektrikum je charakterizováno svou skalární permitivitou $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ a permeabilitou $\mu = \mu_0 \mu_r$. V dalším budeme uvažovat jen nemagnetické prostředí, kde $\mu_r = 1$. Index lomu je v tom případě určen vztahem $\epsilon_r = n^2$. V reálném dielektriku je světlo částečně pohlcováno a k popisu šíření světla vedle indexu lomu je třeba další veličiny, indexu extinkce nebo koeficientu absorpce. O tom blíže v odst. 2.4. V tom případě index lomu není konstantou, nýbrž závisí na kmitočtu světelné vlny (disperse). V oboru viditelného světla, až na úzké oblasti anomální disperse, je index lomu stoupající funkcí kmitočtu (klesající funkcí vlnové délky).

Vztah $n = \sqrt{\epsilon_r}$ u řady dielektrik, zejména s iontovou vazbou, nesouhlasí, jestliže do něj dosazujeme permitivitu statickou, tj. měřenou při nízkých kmitočtech: viz tab. 2.1.

Tabulka 2.1.

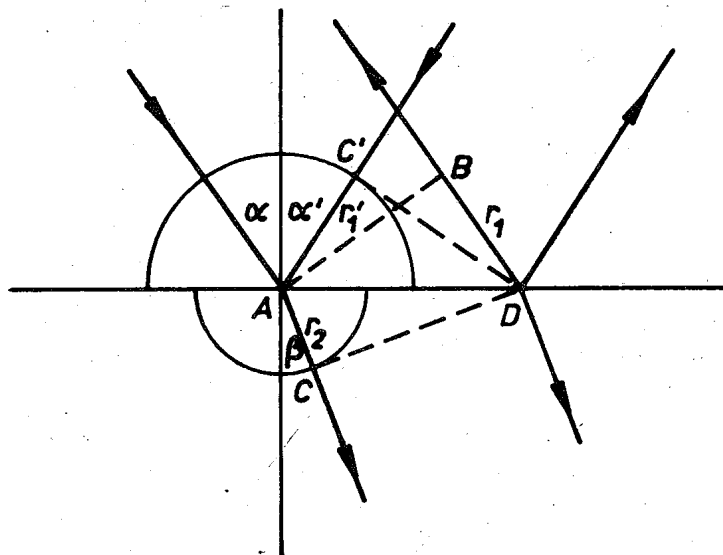
Látka	$n (\lambda = 550 \text{ nm})$	$(\sqrt{\epsilon_r})_{\text{stat.}}$
Vzduch (norm.podm.)	1,0002926	1,000295
CO ₂ "-"	1,00045	1,0005
polystyren	1,59	1,60
sklo	1,5 - 1,7	2,0 - 3,0
tavený křemen	1,46	1,94
etylalkohol	1,36	5,0
voda	1,33	9,0

Tento nesouhlas je způsoben právě dispersí indexu lomu. Pro světelnou vlnu je nutno použít hodnotu permitivity při

světelných kmitočtech, která je obvykle nižší než permitivita statická.

2.1. Lom a odraz na rovinném rozhraní

Chování elektromagnetické vlny na rozhraní dvou izotropních dielektrik (n_1, n_2) vystihuje po stránce geometrické Huygensův princip. Dopadající rovinná vlna dává na rozhraní vznik elementárním kulovým vlnoplochám, které se nazpět do prostředí 1 šíří po odrazu rychlostí $v_1' = v_1$ a do prostředí 2 při lomu rychlostí $v_2 = v_1/n_{12}$, kde $n_{12} = n_2/n_1$. Vlnoplochy odražené a lomené vlny dostaneme tak, že najdeme elementární vlnoplochy z bodu A, pro jejichž poloměry platí



(obr.2.1) $r_1' = r_1$,
 $r_2 = r_1/n_{12}$ a vedeme k nim tečny z bodu D. Tyto tečny nám v dvojrozměrném znázornění představují výsledné vlnoplochy a kolmice k nim spuštěné z bodu A jsou paprsky odražený a lomený. Pro úhly dopadu, lomu a odrazu měřené od kolmice dopadu platí

Snelliův zákon

$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{12}$ a zákon odrazu $\alpha' = \alpha$. Paprsky dopadající, odražené a lomené setrvávají v rovině dopadu.

Obr.2.1. Huygensova konstrukce lomeného a odraženého paprsku

Tato konstrukce selhává, jestliže je $n_{12} < 1$ a $\sin \alpha \geq n_{12}$. Z experimentu víme, že v tom případě neexistuje lomená vlna, že nastává úplný (totální) odraz. Úhel, pod kterým právě úplný odraz nastává, se nazývá mezní, α_m , a platí

$$\sin \alpha_m = n_{12} \quad (< 1)$$

Tento vztah umožňuje měřit index lomu pomocí refraktometrů (viz Brož, I, 6.5.1).

2.2. Intensita odražené a lomené vlny (Fresnelovy vzorce)

V dalším nás bude zajímat, nejen jak je možno vysvětlit zákon odrazu a lomu z elektromagnetické teorie, nýbrž i podrobnější popis průběhu amplitud světelného vektoru příp. intenzit v odražené a lomené vlně v závislosti na úhlu dopadu a polarizaci dopadající vlny. Východiskem zde jsou Maxwellovy rovnice a podmínky na rozhraní dielektrik. Budeme vycházet z těchto předpokladů:

- 1) rozhraní je rovinné, bez volných nábojů;
- 2) prostředí jsou nevodivá ($\sigma' = 0$), nemagnetická, charakterizovaná permitivitami a indexy lomu

$$\epsilon_{r1} = n_1^2 \quad \epsilon_{r2} = n_2^2 \quad ; \quad n = \frac{n_2}{n_1} \quad ;$$

- 3) dopadající vlna je rovinná, harmonická, lineárně polarizovaná.

Mezi elektrickými a magnetickými vektory v rovinné vlně platí:

$$\vec{B} = \frac{1}{v} (\vec{s} \times \vec{E}) \quad (2.1)$$

S použitím vztahů pro harmonickou vlnu $v = \frac{\omega}{k}$; $\vec{s} = \frac{\vec{k}}{k}$ dostaneme pro $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{E}) \quad (2.2)$$

Rovnice (2.2) nám ukazuje, že vektory \vec{k} , \vec{E} , \vec{H} v tomto pořadí tvoří pravotočnou triádu ortogonálních vektorů.

Veličiny vztahované k dopadající vlně označujeme indexy I (incidentní), odražené vlně R (reflektovaná) a lomené T (transmitovaná). Příslušné vlnové vektory budou \vec{k} , \vec{k}' , \vec{k}'' , přičemž $k = k'$, neboť obě vlny I a R jsou v témž prostředí l.

Rovnici (2.2) přepíšeme pro dopadající, odraženou a lomenou vlnu takto:

$$\vec{H}_I = \frac{1}{\omega_0 \omega} (\vec{k} \times \vec{E}_I) \quad (2.3)$$

$$\vec{H}_R = \frac{1}{\omega_0 \omega} (\vec{k}' \times \vec{E}_R) \quad (2.4)$$

$$\vec{H}_T = \frac{1}{\omega_0 \omega} (\vec{k}'' \times \vec{E}_T) \quad (2.5)$$

Žádané vztahy se odvodí z podmínek spojitosti tečných složek elektrického a magnetického pole (SB 2.2.2; 5.1.3). Přitom v prvním prostředí je nutno uvažovat dopadající a odraženou vlnu, v druhém prostředí jen lomenou.

Budeme uvažovat dvě různé polarizace:

- a) vektor el. pole je kolmý k rovině dopadu; symbol \perp ,
mod transversálně elektrický, TE
- b) vektor el. pole je rovnoběžný s rovinou dopadu; symbol \parallel ,
mod transversálně magnetický, TM.

Každý jiný stav polarizace je možno rozložit na tyto dvě složky. Nepolarizované, přirozené světlo můžeme považovat za směs obou složek TE a TM se stejnou amplitudou.

Orientaci souřadných os zvolíme tak, že osa z je kolmá k rozhraní, je tedy kolmicí dopadu. Osu x položíme tak, aby rovina xz byla rovinou dopadu.

Dříve než přistoupíme k odvození amplitud, odvodíme zákony odrazu a lomu, které platí bez ohledu na polarizaci. Mějme tedy obecnou rovinnou vlnu

$$\text{dopadající} \quad \vec{E}_I = \vec{E}_{OI} \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2.6)$$

$$\text{odraženou} \quad \vec{E}_R = \vec{E}_{OR} \exp i(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2.7)$$

$$\text{lomenou} \quad \vec{E}_T = \vec{E}_{OT} \exp i(\vec{k}'' \cdot \vec{r} - \omega t) \quad (2.8)$$

kde amplitudy jsou obecně komplexní, mají vůči sobě pevné fázové rozdíly.

Poněvadž všechny body rozhraní jsou si rovnocenné, musí v každém z nich v libovolném čase platit stejné vztahy mezi

amplitudami a fázemi všech tří vln. Z toho vyplývá, že argumenty exponenciálních funkcí v rov. (2.6) - (2.8) musí být stejné, tedy

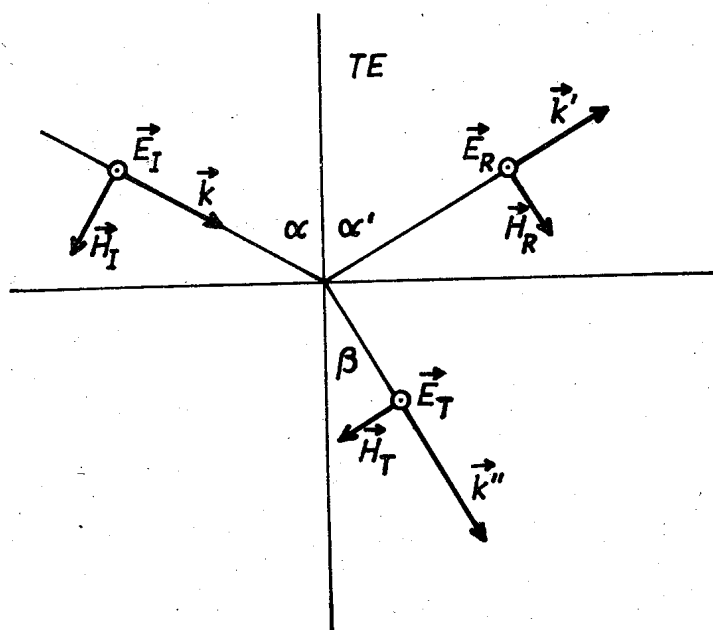
$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k}' \cdot \vec{r} = \vec{k}'' \cdot \vec{r} \quad (2.9)$$

To platí pro libovolný vektor \vec{r} v rovině rozhraní. Z rovnice (2.9) především vyplývá, že vektory \vec{k} , \vec{k}' , \vec{k}'' jsou komplanární: paprsky dopadu, odrazu a lomu setrvávají v téže rovině, která nutně musí být kolmá na rozhraní, tedy v rovině dopadu. Dále plyne, že průměty těchto vektorů do roviny rozhraní jsou navzájem stejné. Toto poslední zjištění se dá vyjádřit pomocí úhlů dopadu, odrazu a lomu jakožto

$$k \sin \alpha = k' \sin \alpha' = k'' \sin \beta$$

Vzhledem k rovnosti $k = k'$ plyne z tohoto zákon odrazu $\alpha = \alpha'$ a vzhledem ke vztahu $k''/k = n_2/n_1 = n$ plyne z poslední části zákon lomu $\sin \alpha / \sin \beta = n$.

Nyní se obrátíme k amplitudám, příp. fázím. Nejdříve probereme případ TE, tj. elektrické vektory kolmé k rovině do-



Obr.2.2. Orientace vektorů \vec{E} , \vec{H} , \vec{k} pro mod TE

padu, magnetické vektory v rovině dopadu. Orientace vektorů je na obr. 2.2. Nesmíme zapomenout, že \vec{k} , \vec{E} , \vec{H} jsou navzájem vázány pravidlem pravotočného šroubu.

Poněvadž jsme si odvodili, že na rozhraní jsou argumenty exponent stejné u všech tří vln, můžeme podmínku spojitosti tečných složek psát pro amplitudy ve tvaru (indexy 0 vynecháme)

$$E_I + E_R = E_T \quad (2.10)$$

(TE)

$$- H_I \cos \alpha + H_R \cos \alpha = - H_T \cos \beta \quad (2.11)$$

Po dosazení z rovnice (2.3) až (2.5) do (2.11)

$$- k E_I \cos \alpha + k' E_R \cos \alpha = - k'' E_T \cos \beta$$

a s pomocí $k' = k$, $k'' = n k$

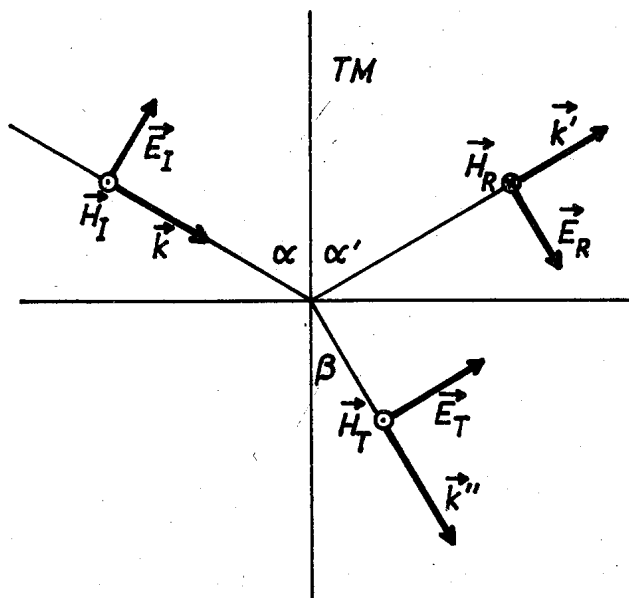
$$- E_I \cos \alpha + E_R \cos \alpha = - n E_T \cos \beta \quad (2.11')$$

Kombinací rovnic (2.10) a (2.11') vyloučíme nejdříve E_T a vypočteme poměr amplitud, který označíme r_{\perp}

$$(TE) \quad r_{\perp} = \frac{E_R}{E_I} = \frac{\cos \alpha - n \cos \beta}{\cos \alpha + n \cos \beta} \quad (2.12)$$

Jestliže analogicky z rovnic (2.10) a (2.11) vyloučíme E_R a zavedeme za poměr amplitud lomené a dopadající vlny t_{\perp} , dostaneme:

$$(TE) \quad t_{\perp} = \frac{E_T}{E_I} = + \frac{2 \cos \alpha}{\cos \alpha + n \cos \beta} \quad (2.13)$$



Pro polarizaci rovnoběžnou s rovinou dopadu (mod TM) označíme směry vektorů podle obr. 2.3. Tato volba je odůvodněna tím, že pro $\alpha \rightarrow 0$ mají všechny tři vektory \vec{E} stejný směr analogicky jako tomu bylo při polarizaci TE. V některých učebnicích se volí jiné orientace vektorů \vec{E} a \vec{H} , např. dané tím, že všechny vektory H mají při modu TM stejný směr. V důsledku

Obr.2.3. Orientace vektorů \vec{E} , \vec{H} , \vec{k} pro mod TM, toho se ve vzorcích mohou

vyskytnout opačná znaménka, to ovšem neznamená, že udávají jiné fázové poměry, neboť se musí vypočtená fáze vždy vztahovat k přijaté orientaci vektorů.

Podle obr. 2.3 máme na rozhraní:

$$(TM) \quad E_I \cos \alpha + E_R \cos \alpha = E_T \cos \beta \quad (2.14)$$

$$H_I - H_R = H_T \quad (2.15)$$

Dosazením z rovnic (2.3) až (2.5) a zavedením indexů lomu dostaneme z (2.15)

$$(TM) \quad E_I - E_R = n E_T \quad (2.15')$$

Vyloučením jednou E_T a podruhé E_R dostaneme pro polarizaci E rovnoběžné s rovinou dopadu

$$r_{\parallel} = \frac{E_R}{E_I} = \frac{-\cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \beta}{\cos \alpha + \frac{1}{2} \cos \beta} = \frac{-n \cos \alpha + \cos \beta}{n \cos \alpha + \cos \beta} \quad (2.16)$$

$$(TM) \quad t_{\parallel} = \frac{E_T}{E_I} = \frac{2 \cos \alpha}{n \cos \alpha + \cos \beta} \quad (2.17)$$

Rovnice (2.12), (2.13), (2.16), (2.17) lze převést na obvyklý tvar Fresnelových vzorců, jestliže použijeme Snelliho zákona $n = \sin \alpha / \sin \beta$

$$(TE) \quad r_{\perp} = - \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (2.18)$$

$$t_{\perp} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (2.19)$$

$$(TM) \quad r_{\parallel} = - \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} \quad (2.20)$$

$$t_{\parallel} = \frac{2 \cos \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)} \quad (2.21)$$

Protože při měření světla se měří výkony, zavádí se veličiny odrazivost R a propustnost T jako poměry výkonů, které se odrážejí (R) nebo procházejí (T) plošnou jednotkou na rozhraní k výkonu dopadajícímu. Tyto výkony jsou dány složkami Poyntingových vektorů \vec{S} do normály k rozhraní. Z definice $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ a z rov. (2.2) plyne

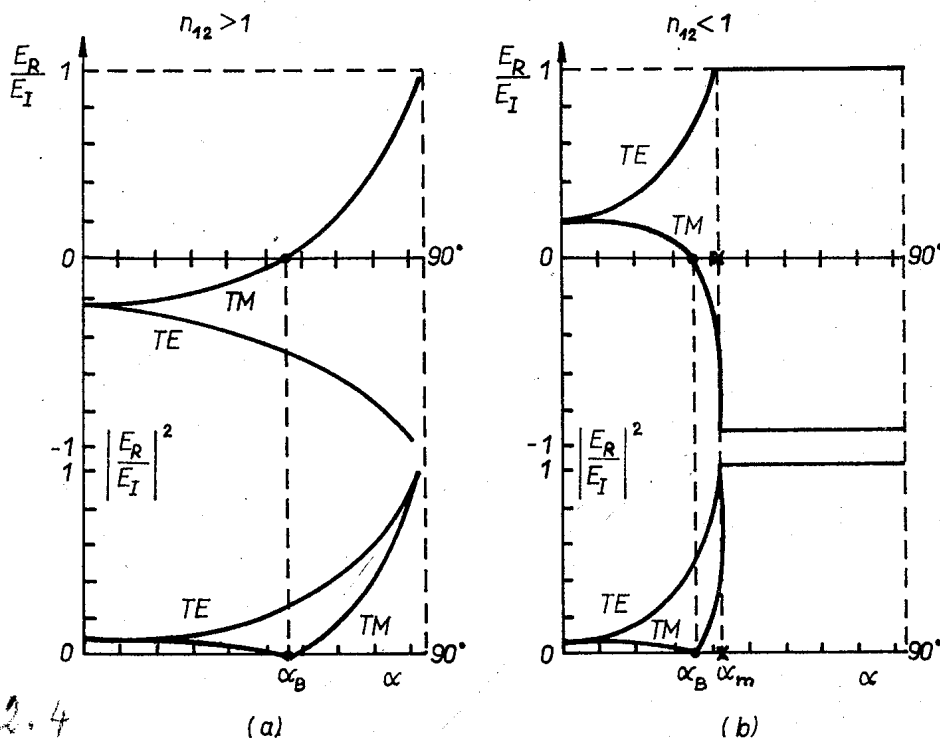
$$R = \frac{S_R \cos \alpha'}{S_I \cos \alpha} = \frac{E_R^2}{E_I^2} = r^2$$

$$T = \frac{S_T \cos \beta}{S_I \cos \alpha} = \frac{n_2 \cos \beta E_T^2}{n_1 \cos \alpha E_I^2} = n \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} t^2$$

Jak se může-
me přesvěd-
čit, je
 $R + T = 1$
pro obě pola-
rizace, což
vyjadřuje zá-
kon zachování
energie.

Na obr.2.4 je
průběh para-
metrů r a R
pro polarizace
TE a TM a pro
případy

a) $n_{12} > 1$,
b) $n_{12} < 1$.
Na základě
těchto grafů



Obr.2.4. Průběh r a R v závislosti na úhlu dopadu pro a) $n > 1$, b) $n < 1$.

a v zorců (2.18) až (2.21) provedeme nyní diskusi průběhu intensity a fáze odraženého světla.

Při kolmém dopadu ($\alpha = 0$) dávají vzorce pro obě polarizace stejný výraz:

$$r = \frac{1 - n}{1 + n} ; \quad R = \left(\frac{1 - n}{1 + n} \right)^2 \quad (2.22)$$

Tak např. pro běžné sklo o indexu lomu 1,5 činí odrazivost R 4 %. Také pro $\alpha \rightarrow 90^\circ$ je odrazivost v obou polarizacích stejná a blíží se k 1. Poměr amplitud r_{\perp} pro světlo polarizované kolmo k rovině dopadu (TE) v obou případech ($n > 1$, $n < 1$) co do absolutní hodnoty roste a je $r_{\perp} < 0$ pro $n > 1$ a $r_{\perp} > 0$ pro $n < 1$. Při odrazu na hustším prostředí ("vnější odraz") nastává tedy změna fáze o π , při "vnitřním odrazu" na řidším prostředí má odražené světlo stejnou fázi jako dopadající. V průběhu TM však nastává v obou případech změna znaménka pro r_{\parallel} u úhlu α_B , pro nějž platí $r_{\parallel} = 0$, čili z rov. (2.20) $\alpha_B + \beta_B = 90^\circ$. Tomuto úhlu říkáme Brewsterův. Pro jeho hodnotu plyne ze zákona lomu:

$$n = \frac{\sin \alpha_B}{\sin \beta_B} = \frac{\sin \alpha_B}{\cos \alpha_B} = \operatorname{tg} \alpha_B$$

Jestliže tedy na rozhraní dopadá přirozené světlo, můžeme je popsat jako dvě vlny s amplitudami $E_I'' = E_I^{\perp}$. V odraženém světle při Brewsterově úhlu však zůstane jen jeden směr polarizace, tj. E_R^{\perp} , neboť $E_R'' = r_{\parallel} E_I'' = 0$. Dostáváme tedy světlo úplně lineárně polarizované. Je to však způsob získávání polarizovaného světla málo účinný, protože hodnota R_{\perp} pro $\alpha = \alpha_B$ je poměrně nízká ($R \approx 20\%$ pro $n = 1,5$). Průběh odrazivosti R_{\parallel} pro mód TM je nemonotonní, nejdříve klesá od společné hodnoty pro $\alpha = 0$ k nule a pak stoupá k jedničce.

V plynových laserech se čelní stěny výbojových trubíc obvykle konstruují jakožto tenké planparalelní destičky skloněné k ose laseru tak, aby úhel dopadu byl roven α_B . Tím se docílí, že pro polarizaci TM nenastává žádná ztráta odrazem (ani na přední ani na zadní stěně) a tím jsou dány optimální podmínky pro zesílení světla právě jen pro tuto polarizaci.

2.3. Úplný odraz

V případě dopadu světla na řidší prostředí ($n < 1$) existuje mezní (kritický) úhel α_m , při němž lomený paprsek probíhá rovnoběžně s rozhraním. Pro úhly $\alpha > \alpha_m$ se světlo odráží s plnou intenzitou do prvního prostředí. Dokážeme, že pro $\alpha \geq \alpha_m$ je $R_{\perp} = R_{\parallel} = 1$. Pro tento účel přepíšeme rov. (2.12) a (2.16) takto:

$$r_{\perp} = \frac{\cos \alpha - n \sqrt{1 - \sin^2 \beta}}{\cos \alpha + n \sqrt{1 - \sin^2 \beta}} = \frac{\cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{\cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

$$r_{\parallel} = \frac{-n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$$

Pro úhly větší než mezní, tj. $\sin^2 \alpha > n^2$, můžeme formálně psát

$$r_{\perp} = \frac{\cos \alpha - i \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}} \quad (2.23)$$

$$r_{\parallel} = \frac{-n^2 \cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{n^2 \cos \alpha + i \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}} \quad (2.24)$$

V obou případech jsou koeficienty r dány jako poměr dvou komplexně sdružených výrazů

$$r = \pm \frac{Z}{Z^*}$$

Poměr intenzit tj. čtverců absolutních hodnot amplitud je v takovém případě trvale roven jedné

$$R = r^2 = \frac{ZZ^*}{Z^*Z} = 1$$

Jak je to však s lomenou vlnou? Není pravda, že do druhého prostředí nevniká žádný rozruch. Ukážeme, že sice do druhého prostředí neproudí žádná energie, že však je tam zjistitelné světlo v bezprostřední blízkosti rozhraní.

Vlnu v druhém prostředí je možno popsat rovnicí formálně shodnou s (2.8). Vynecháme-li časový faktor a bez ohledu na polarizaci

$$E_T = E_{OT} \exp i(\vec{k}'' \cdot \vec{r}) = E_{OT} \exp i(k'' x \sin \beta + k'' z \cos \beta) \quad (2.25)$$

Za $\cos \beta$ nyní zavedeme komplexní výraz

$$\cos \beta = \frac{i}{n} \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2} = i \gamma \quad (2.26)$$

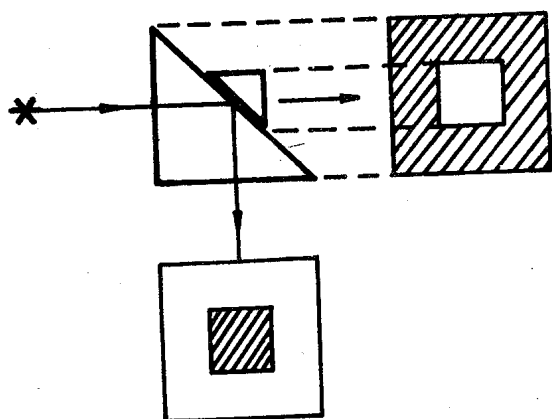
Po dosazení (2.26) do (2.25) a vztahu $\sin \beta = \sin \alpha / n$

$$E_T = E_{OT} \exp i(k'' x \frac{\sin \alpha}{n} + i k'' z \gamma)$$

Pro zkrácení ještě označíme $k'' \gamma = \sigma$ a $k'' \frac{\sin \alpha}{n} = k_T$; dostaneme pro vlnu E_T :

$$E_T = E_{OT} \exp(-\sigma z) \exp i k_T x \quad (2.27)$$

Tuto rovnici můžeme interpretovat jako tlumenou vlnu ($\sigma > 0$) v 2. prostředí, která se vlastně šíří ve směru x , tj. podél rozhraní. Je to vlna nehomogenní, její amplitudy ubývá exponenciálně se vzdáleností od rozhraní. Rozbor pomocí Poyntingova vektora ukazuje, že energie se z 2. prostředí z hloubek řádu $1/\sigma$ vrací zpět do prostředí 1.



Obr.2.5. Důkaz existence tlumené vlny v řidším prostředí při úplném odrazu

Experimentálně je možno dokázat pronikání světla do řidšího prostředí, např. pomocí dvou 45°-ových hranolů přiložených přeponovými stěnami blízko k sobě, avšak tak, aby se nedotýkaly (obr.2.5). Světlo ze zdroje S částečně proniká, přičemž intenzita silně klesá se vzrůstající vzdáleností stěn hranolů. Zde by bylo možno namítnout, že v takovém případě už jistá část energie

prostupuje druhým prostředím. Tomu tak skutečně je. Přítomnost druhého hranolu totiž ovlivňuje vlnu v 2. prostředí, takže už přesně neplatí to, co bylo řečeno o proudu energie při neomezeném prostředí 2.

Jaký je fyzikální obsah skutečnosti, že při $\alpha > \alpha_m$ je poměr amplitud r komplexní? Považujeme-li amplitudy za fázo-ry, znamená to, že dochází ke změně fáze o obecný úhel. Poně- vadž je absolutní hodnota $|r| = 1$, můžeme psát

$$-\frac{\hat{E}_R}{\hat{E}_I} = e^{-i\varphi} = \frac{a e^{-i\varphi}}{a e^{i\varphi}}$$

a platí $\varphi = 2\psi$

Porovnáním s rovnicemi (2.23) a (2.24) můžeme psát např.

$$(TE) \quad \text{tg } \psi_{\perp} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\cos \alpha}$$

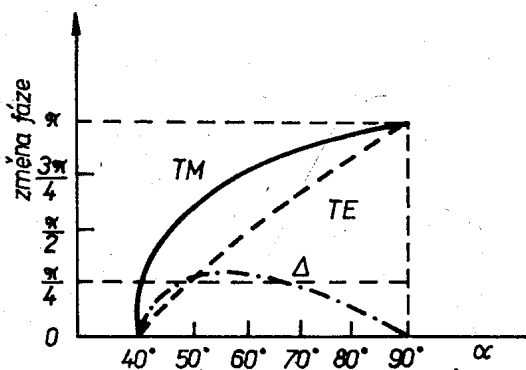
$$(TM) \quad \text{tg } \psi_{\parallel} = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{n^2 \cos \alpha}$$

Po úplném odrazu mají tedy vlny TE a TM vůči sobě fázový roz- díl Δ , pro nějž platí

$$\Delta = \varphi_{\parallel} - \varphi_{\perp} = 2(\psi_{\parallel} - \psi_{\perp})$$

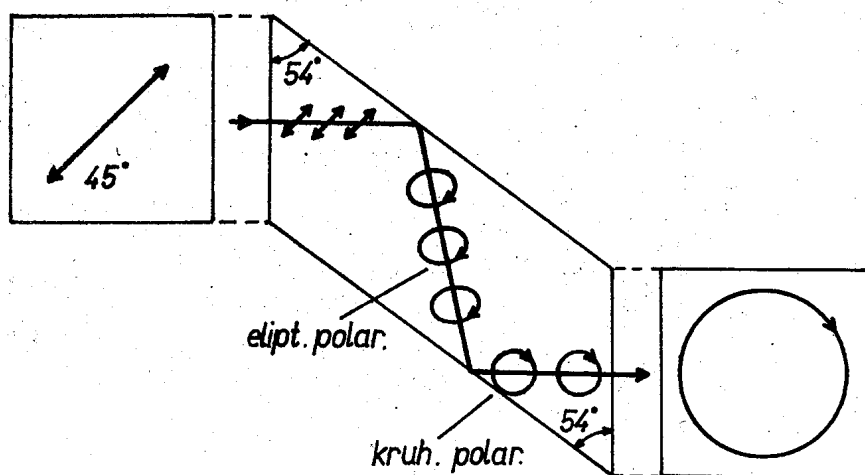
Explicite můžeme např. vypočítat

$$\text{tg } \frac{\Delta}{2} = \text{tg}(\psi_{\parallel} - \psi_{\perp}) = \frac{\cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2}}{\sin^2 \alpha}$$



Obr. 2.6. Průběh úhlů φ a Δ při úplném odrazu

Průběh úhlů φ_{\perp} , φ_{\parallel} a Δ je na obr. 2.6. Vytvoření fázového roz- dílu mezi dvěma navzájem k sobě kolmo polarizovanými paprsky je možno využít k získání kruhově polarizovaného světla. Vhodné zařízení navrhnul Fresnel (obr. 2.7). Jestliže do Fresnelova



hranolu, jehož úhel při základně je 54° (při indexu lomu skla 1,5) vchází lineárně polarizovaný paprsek se směrem polarizace skloněným 45° k rovině dopa-

Obr.2.7. Fresnelův hranol $\lambda/4$

du totálního odrazu, je možno tento paprsek rozložit na dva paprsky se stejnou fází a amplitudou s kmitovými módy TE a TM. Úhel dopadu 54° je volen tak, že při jediném odrazu vzniká fázový rozdíl mezi oběma módy $\pi/4$. Po dvou odrazech, jak je naznačeno na obr. 2.7, vystupují oba paprsky s fázovým rozdílem $\pi/2$ a skládají se v kruhově polarizovaný paprsek.

2.4. Elementární teorie disperse v dielektriku a v kovu

V předcházejících výkladech jsme používali pro popis interakce světelné vlny s látkami fenomenologický přístup pomocí makroskopických veličin permitivity a permeability příp. indexu lomu. Jak jsme viděli, stačí tento popis vysvětlit kvantitativně celou řadu jevů. V další kapitole jej rozšíříme pomocí zavedení tensorového charakteru permitivity i na jevy šíření světla v anisotropních prostředích.

Studium optických vlastností látek však obsahuje řadu dalších jevů, které pro své vysvětlení vyžadují podrobnější model interakce na atomární úrovni. Jsou to např. jevy disperse, absorpce, elektrooptické, magnetooptické, fotoelektrické a luminiscenční jevy. Teorie těchto jevů musí být založena na kvantové fyzice. To však přesahuje rámec naší osnovy. Přesto zde alespoň naznačíme jednoduchý model čistě klasický, který

nám umožní pochopit původ disperse a absorpce světla a usnadní později přechod ke kvantově mechanickému popisu.

Vybereme si jako typické dva příklady: ztrátové dielektrikum a ideální kov.

Látku v elektromagnetickém poli charakterizují čtyři veličiny:

- 1) prostorový náboj
- 2) polarizace \vec{P} jakožto hustota elektrického momentu
- 3) magnetisace \vec{M} jakožto hustota magnetického momentu
- 4) hustota elektrického proudu.

Maxwellovy rovnice pak udávají vztahy těchto veličin k elektrickému poli \vec{E} a magnetickému poli \vec{H} . Všechny veličiny právě uvedené jsou průměrné, to znamená, že jsou zprůměrovány v rozměrech podstatně větších než meziatomové vzdálenosti. Tvar Maxwellových rovnic je nám znám a rovněž způsob, jak se z nich získá vlnová rovnice např. pro vektor \vec{E} . Pro nás postačí omezit se na případ nemagnetického prostředí $\vec{M} = 0$, $\omega = \omega_0$, bez prostorového náboje, $\rho = 0$.

Za těchto podmínek se dá vlnová rovnice pro vektor \vec{E} napsat takto:

$$-\Delta \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} - \omega_0 \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} \quad (2.28)$$

kde $c^2 = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1}$.

Členy na pravé straně nazýváme zdrojové. Z nich člen s $\partial^2 P / \partial t^2$ je zodpovědný za dispersi, absorpci, dvojlom a polarizaci v dielektriku a člen s $\partial I / \partial t$ za vysokou absorpci a odrazivost kovů.

Dva případy, které si zde probereme, odpovídají tomu, že budeme v případě dielektrika uvažovat jen člen s $\partial^2 P / \partial t^2$ a v případě kovu jen člen s $\partial \vec{I} / \partial t$ a druhý z nich pokládat za zanedbatelný.

A) Dielektrikum

Budeme tedy předpokládat dokonale nevodivé prostředí, $I = 0$ a pro jednoduchost jen jeden druh polarizačního mechanismu, např. elektronovou polarizaci.

V dielektriku za běžných podmínek ve všech skupenstvích je meziatomová vzdálenost podstatně menší (o 2 - 3 řády) než vlnová délka. Elektromagnetická vlna proto rozkmitává náboje v látce v oblastech rozměrů vlnové délky ve fázi a dochází proto ke koherentnímu pohybu nábojů a tím i ke koherentnímu rozptylu elektromagnetické vlny. Můžeme proto předpokládat, že i pro periodické elektromagnetické pole můžeme vyjádřit polarizaci jakožto součet stejných momentů elektronů $-e \vec{r}$, kde \vec{r} je výchylka elektronů z rovnovážné polohy.

$$\vec{P} = -e N \vec{r} \quad (2.29)$$

Restituční síla $-K \vec{r}$ působí ve statickém poli stacionární výchylku \vec{r}_0 , pro niž platí

$$-e \vec{E} - K \vec{r}_0 = 0$$

a tedy statickou polarizaci

$$\vec{P}_{\text{stat}} = \frac{N e^2}{K} \vec{E} \quad (2.30)$$

Jestliže \vec{E} je rychle se měnící periodickou funkcí času, rovnice (2.30) už neplatí, elektron má jistou vlastní setrvačnost. Musíme tedy nejprve řešit jeho pohybovou rovnici. Při běžných situacích v optice je síla na elektron pocházející od magnetického pole vlny zanedbatelná a v pohybové rovnici uvažujeme jen elektrickou sílu. Zato však musíme počítat se ztrátami, které způsobuje jednak záření nerovnoměrně se pohybujícího náboje, jednak přeměna energie kmitové v tepelnou v důsledku interakce kmitajícího elektronu s okolím. Koná tedy elektron podle tohoto klasického modelu působením harmonického pole vlny

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t} \quad (2.31)$$

vynucený, tlumený harmonický pohyb.

Zavedeme-li tlumící sílu výrazem $-m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$, můžeme napsat pohybovou rovnici elektronu

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + K \vec{r} = -e \vec{E} \quad (2.32)$$

Její ustálené řešení má tvar $\vec{r} = \vec{r}_0 e^{-i\omega t}$. Z rov. (2.32) získáme \vec{r}_0 jakožto komplexní výraz, který dosadíme do (2.29) a dostaneme

$$\vec{P} = \frac{N e^2}{-m\omega^2 - i\omega m\gamma + K} \vec{E} \quad (2.33)$$

Rovnice (2.33) není přesná, protože pole působící na elektron není makroskopické pole \vec{E} , nýbrž výsledné pole vnějších nábojů a indukovaných dipólů. V nejjednodušším případě isotropního dielektrika je toto pole E_L dáno Lorentzovým vzorcem

$$\vec{E}_L = \vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P}$$

Rovnice (2.33) se tedy změní na

$$\vec{P} = \frac{N e^2}{-m\omega^2 - i\omega m\gamma + K} \left(\vec{E} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{P} \right)$$

Odtud znova vypočteme \vec{P} . Zavedeme-li $\omega_0^2 = \frac{K}{m} - \frac{Ne^2}{3\epsilon_0 m}$, dostaneme

$$\vec{P} = \frac{N e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \vec{E} \quad (2.34)$$

ω_0 má význam efektivní rezonanční frekvence vázaného elektronu. Koeficient u \vec{E} má význam susceptibility a je vidět, že je komplexní. To znamená, že \vec{E} a \vec{P} nejsou ve fázi. Susceptibilita a tudíž i permitivita a index lomu jsou funkcemi ω .

Abychom získali výraz pro index lomu a absorpce, budeme hledat řešení vlnové rovnice v tomto případě. Za tím účelem dosadíme výraz pro polarizaci (2.34) do vlnové rovnice (2.28) za podmínky $\vec{I} = 0$

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \left[1 + \frac{N e^2}{m \epsilon_0 (\omega_0^2 - \omega^2 - i \gamma \omega)} \right] \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.35)$$

Řešení rovinnou vlnou má formálně stejný tvar jako pro beztrátové dielektrikum, jenže místo reálného vlnového vektoru zavedeme komplexní vlnový vektor (vlnočet) \mathcal{K} . Pišme pro vlnu šířící se ve směru osy z :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\mathcal{K}z - t)}$$

Dosazením do vlnové rovnice (2.35) dostaneme pro \mathcal{K}^2 výraz

$$\mathcal{K}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{N e^2}{m \epsilon_0} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \gamma \omega} \right) \quad (2.36)$$

\mathcal{K} je tedy komplexní veličinou, pro níž můžeme zavést

$$\mathcal{K} = k + i \alpha, \text{ kde } k \text{ a } \alpha \text{ jsou reálné.}$$

(Pozor, že \mathcal{K}^2 je prostý čtverec komplexního čísla a tedy opět komplexní, nikoli čtverec modulu!)

Současně zavedeme též komplexní index lomu analogicky k (1.17)

$$\mathcal{N} = \frac{c}{\omega} \mathcal{K} = n + i \kappa \quad (2.37)$$

Zde nazýváme n indexem lomu a κ indexem absorpce. Důvod pro to vysvitne z následujícího.

Dosazením komplexního vlnočtu do vlnové rovnice dostaneme tlumenou vlnu

$$E = E_0 e^{-\alpha z} e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.38)$$

Amplituda vlny tedy ubývá exponenciálně. α se proto nazývá koefficient absorpce. Faktor $e^{i(kz - \omega t)}$ značí harmonickou vlnu šířící se směrem $+z$ s fázovou rychlostí $v = \omega/k = c/n$.

V optice nás především zajímají hodnoty n a κ , které dostaneme z definice \mathcal{N} :

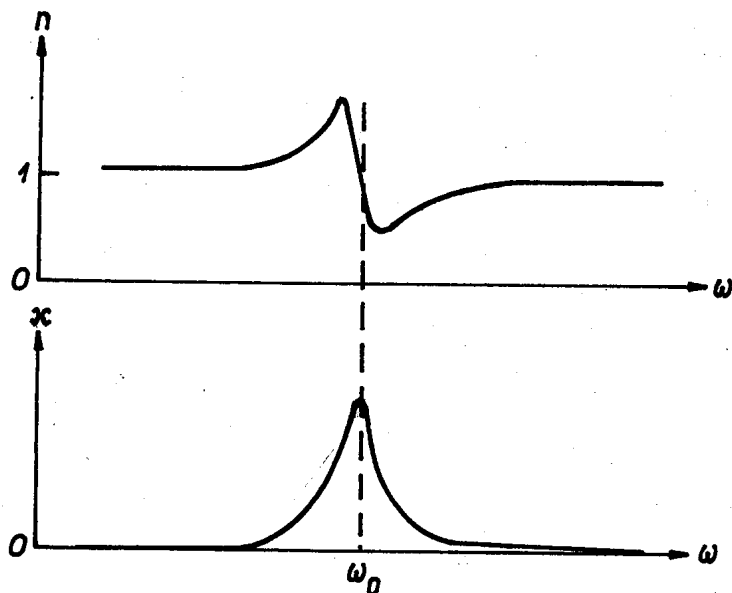
$$\mathcal{N}^2 = (n + i\kappa)^2 = \frac{e^2}{\omega^2} \mathcal{K}^2 = \frac{e^2}{\omega^2} (k + i\alpha)^2$$

Porovnáním reálných a imaginárních částí s pomocí rovnice (2.37) dostaneme:

$$n^2 + \kappa^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (2.39)$$

$$2n\kappa = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (2.40)$$

Z těchto dvou rovnic lze získat jednotlivě n a κ . Průběh



Obr.2.8. Dispersní křivky n , κ pro ztrátové dielektrikum

je vidět z obr. 2.8., je oblast anomální disperse vždy totožná s oblastí silné absorpce.

Obecně atom nebo molekula nemá jen jednu jedinou rezonanční frekvenci, nýbrž několik. To znamená, že má také několik oblastí absorpce a disperse. Jestliže jsou ω_j rezonanční frekvence a γ_j tlumící koeficienty, pak čtverec komplex-

těchto veličin v závislosti na ω je dobře známý z analýzy vynuceného harmonického pohybu. V okolí rezonanční frekvence ω_0 nastává nemonotonní závislost indexu lomu, při $\omega = \omega_0$ má index absorpce maximum. Oblasti, kde index lomu je stoupající funkcí ω , nazýváme oblasti normální disperse, tam, kde $dn/d\omega < 0$, pak oblast anomální disperse. Jak

ního indexu lomu, pokud se oblasti disperse nepřekrývají, lze psát

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i \gamma_j \omega}$$

kde f_j je tzv. síla oscilátoru, které charakterizuje sílu vazby mezi oscilátorem s frekvencí ω_j a elektromagnetickým polem. Při slabém tlumení ($\gamma_j \ll \omega_j$) lze psát pro čtverec indexu lomu

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

Z této formule lze odvodit přibližně empiricky zjištěný disperzní zákon indexu lomu, který platí dobře pro plyny

$$n^2 - 1 = a + \frac{b}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

nebo Cauchyovu formuli pro dielektrika s absorpcí v ultrafialové oblasti (platnou tedy v oblasti normální disperse)

$$n - 1 = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$$

B) Vodivé prostředí

V tomto druhém příkladu modelu dispersního mechanismu naopak nebudeme uvažovat příspěvek vázaných elektronů k polarizaci, zato však započteme člen pocházející od vodivého proudu. Taková situace přibližně odpovídá kovům, u nichž valenční elektrony tvoří elektronový plyn a zbývající zbytky atomů mají relativně malou polarizovatelnost. Rov. (2.28) má pak tvar

$$-\Delta \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \omega_0 \frac{\partial \vec{I}}{\partial t} = 0 \quad (2.41)$$

Abychom opět dostali vlnovou rovnici pro \vec{E} , musíme získat vztah mezi \vec{E} a \vec{I} , který platí při vysokých frekvencích. K tomu dojdeme, uvažujeme-li zjednodušený model (klasický) volných elektronů, který je základem Lorentzovy-Drudeovy teorie vodivosti kovů (viz SB § 7.2.2.)

Pohybová rovnice elektronu tentokrát neobsahuje žádnou kvasielastickou sílu, protože se jedná o volné elektrony, zato však srážkový člen. Interakce elektronu s krystalovou mříží kovu se vyjadřuje pomocí relaxační doby τ , která je definována tak, že časový úbytek průměrné rychlosti elektronu \vec{v} (driftové rychlosti) v důsledku srážek je úměrný této rychlosti s konstantou úměrnosti $1/\tau$:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\text{srážky}} = -\frac{\vec{v}}{\tau}$$

Pohybovou rovnici elektronu v elektrickém poli vlny \vec{E} můžeme tedy napsat takto

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m \frac{\vec{v}}{\tau} - e \vec{E} \quad (2.42)$$

Driftová rychlost je však vázána s hustotou proudovou vztahem

$$\vec{I} = -N e \vec{v}$$

kde N je počet elektronů v objemové jednotce. Dosazením z tohoto vztahu za \vec{v} do rov. (2.42) dostaneme

$$\frac{d\vec{I}}{dt} + \frac{\vec{I}}{\tau} = \frac{N e^2}{m} \vec{E} \quad (2.43)$$

V harmonické vlně $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ je také ustálený proud harmonickou funkcí $I_0 e^{i\omega t}$ a dosazením do (2.43) obdržíme řešení

$$\vec{I} = \frac{N e^2}{m} \vec{E} \cdot \frac{1}{-i\omega + \frac{1}{\tau}}$$

Zavedeme-li statickou elektrickou vodivost (SB (7.39))

$$\sigma = \frac{N e^2 \tau}{m}$$

můžeme \vec{I} přepsat jako

$$\vec{I} = \frac{\sigma}{1 - i\omega\tau} \vec{E} \quad (2.44)$$

Rovnice (2.44) nám tedy představuje Ohmův zákon pro střídavé pole. Vodivost v tomto případě je komplexní a znamená to, že

\vec{I} a \vec{E} nejsou ve fázi.

Jestliže dosadíme (2.44) do (2.41), dostaneme vlnovou rovnici pro \vec{E}

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\mu_0 \sigma}{1 - i\omega\tau} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.45)$$

Hledáme opět řešení ve tvaru rovinné vlny s komplexním vlnočtem, která se šíří směrem osy z

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\kappa z - \omega t)} \quad (2.46)$$

Rovnici (2.45) vyhovuje toto řešení, jestliže

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{i\omega\mu_0\sigma}{1 - i\omega\tau}$$

Stejně jako v případě dielektrika zavedeme komplexní index lomu

$$N^2 = \frac{c^2}{\omega^2} \kappa^2 = 1 + \frac{c^2}{\omega^2} \cdot \frac{i\omega\mu_0\sigma}{1 - i\omega\tau}$$

nebo po malé úpravě

$$N^2 = 1 - \frac{c^2 \mu_0 \sigma \tau^{-1}}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}}$$

a vrátíme-li se zpět k výrazům pro σ a c^2 ,

$$N^2 = 1 - \frac{N e^2 / \epsilon_0 m}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}}$$

Zde se zavádí tzv. plasmová frekvence ω_p ,

$$\omega_p^2 = \frac{N e^2}{\epsilon_0 m} \quad (2.47)$$

S tímto symbolem máme konečný tvar čtverce komplexního indexu lomu kovu

$$N^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\omega\tau^{-1}}$$

Abychom získali hodnoty indexu lomu a indexu absorpce, rozdělíme \mathcal{N}^2 na reálnou a imaginární část

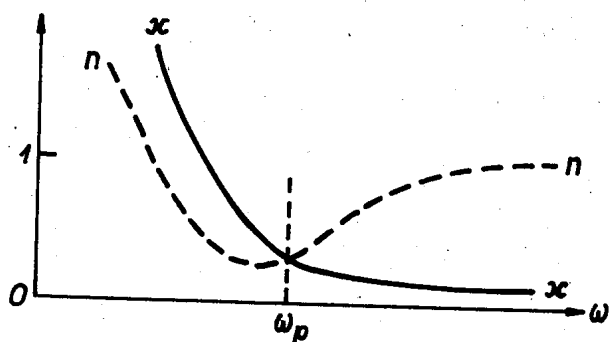
$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2 (\omega^2 - i\omega\tau^{-1})}{\omega^4 + \omega^2 \tau^{-2}}$$

čili

$$n^2 - \kappa^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \tau^{-2}} \quad (2.49)$$

$$2n\kappa = \frac{\omega_p^2}{\omega\tau(\omega^2 + \tau^{-2})} \quad (2.50)$$

Průběh n , κ vypočtených z rov. (2.49) a (2.50) je na obr. 2.9.



Obr.2.9. Dispersní křivky n , κ pro vodivé prostředí

Význačným rysem je monotónní pokles indexu absorpce s frekvencí, neexistuje absorpční pás jako u dielektrik. Index lomu je v dosti širokém okolí plasmové frekvence menší než jedna, to znamená, že fázová rychlost je v kovech větší než c . Plasmová frekvence roz-

děluje zhruba oblast vysoké absorpce a vysoké odrazivosti při nízkých kmitočtech od oblasti propustnosti při vysokých frekvencích. Plasmová frekvence ω_p při typických hodnotách $\tau \approx 10^{-13}$ a $N \approx 10^{28} \text{ m}^{-3}$ je kolem 10^{15} Hz, leží tedy ve viditelné až ultrafialové oblasti. Název plasmová pochází od toho, že soubor volných elektrenů s kladnými zbytky atomů představuje celkově elektricky neutrální plasma, v němž za působení harmonického pole dochází k prostorově a časově periodickému koherentnímu posunu volných nábojů. V kovu se ovšem pohybuje jen záporný náboj, v plynném plasmatu se mohou pohybovat oba náboje.

Při velmi nízkých frekvencích (vůči ω_p), tedy např. v oboru radiových vln, se dá přibližně napsat

$$\kappa^2 \approx i\omega\mu_0\sigma$$

a tedy

$$\kappa \approx \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\mu_0\sigma}$$

Z této rovnice je vidět, že reálná a imaginární složka jsou stejné, takže platí pro vlnčet

$$k \approx \alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}}$$

a odpovídající hodnoty indexů

$$n \approx \kappa \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu_0}}$$

Koeficient absorpce α udává převratnou hodnotu tloušťky vrstvy, v níž absorpcí poklesne amplituda na $1/e$ -tý díl (viz rov. (2.38)). $1/\alpha$ tedy značí charakteristickou hloubku, do níž ještě proniká elektromagnetická vlna. Pro tuto hloubku "skin-efekt" lze napsat

$$d = \frac{1}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\sigma\mu_0}} = \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{c\pi\sigma\mu_0}}$$

Tak např. při $\sigma = 6 \cdot 10^7 (\Omega\text{m})^{-1}$ a $\lambda_0 = 1 \text{ mm}$ $d = 10^{-4} \text{ mm}$.

Na konec této kapitoly ještě dvě poznámky.

Pozn. 1

Při měření odrazu nebo propustnosti se měří intenzita, tedy veličina úměrná čtverci amplitudy. Zákon absorpce pro intenzitu má tvar

$$I = I_0 e^{-Kz} \quad (2.51)$$

kde K nazveme absorpční konstantou. Její rozměr je [délka]⁻¹. Je to parametr nejčastěji užívaný pro charakteristiku absorpce. Vztahy ke koeficientu absorpce α a indexu absorpce κ plynou z porovnání (2.51) a (2.38) a z rov. (2.37)

$$I(z) \sim E_0^2(z) = E_0^2(0) e^{-2\alpha z}$$

$$K = 2\alpha$$

a dále

$$K = 2 \cdot \frac{\omega}{c} \kappa = \frac{4\pi}{\lambda_0} \kappa$$

Názvy "index", "koeficient", "konstanta", "extinkční", "absorpční" jsou neustálené a najdou se jejich různé kombinace pro K , α , κ .

Pozn. 2

V četných učebnicích se užívá pro komplexní vlnocet a index lomu výrazů se záporným znaménkem u imaginární části, tj.

$$\mathcal{K} = k - i \alpha$$

$$\mathcal{N} = n - i \kappa$$

V tom případě se však musí užít vlnové rovnice ve tvaru

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

My jsme zvolili v této kapitole opačné znaménko exponentu, což znamená jen posunutí fáze o $\pm \pi$. Výhodou našeho značení s kladným znaménkem u součinu $(\vec{k} \cdot \vec{r})$ je, že když vynecháme v některých výpočtech časový faktor, zůstane nám kladné znaménko v exponentu. Důležité je jen si uvědomit, že pokud $\vec{k} \cdot \vec{r}$ a ωt mají opačná znaménka, jde o vlnu šířící se ve směru $+k$ a se souhlasnými znaménky o vlnu ve směru $-k$.

3. SVĚTLO V ANISOTROPNÍM PROSTŘEDÍ OPTIKA KRYSTALŮ

V této kapitole budeme projednávat šíření světla v anisotropním bezztrátovém dielektriku. Typickými představiteli takového prostředí jsou průhledné krystaly se symetrií nižší než kubickou, jako např. islandský vápenec, křemen, slída, sádrovec. Anisotropie však může být vnesena do původně opticky isotropního prostředí vnějším působením, jako např. jednoosým tlakem, elektrickým polem, laminárním prouděním v kapalině, aj.

Z hlediska elektromagnetického pole je anisotropní prostředí popsáno tensory permitivity a permeability. Pro jednoduchost budeme v dalším výkladu předpokládat nemagnetické prostředí, pro něž permeabilita zůstává skalárem a platí $\mu = \mu_0$. Fyzikální obsah pojmu tensoru permitivity značí, že v krystalu vektory \vec{E} a \vec{D} nemají obecně stejný směr. Kvalitativně si tuto skutečnost můžeme vyložit tak, že za současného působení vnějšího pole \vec{E} a anisotropních vazebních sil se posunují náboje jiným směrem, než působí elektrická síla. Tím vzniká polarizace \vec{P} odchýlená od směru \vec{E} a tedy i vektor $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ není kolineární s \vec{E} .

Nebudeme zkoumat, jak vypadá rovnováha sil v jednotlivých případech konkrétních struktur a souborů vazebních sil, nýbrž se spokojíme s makroskopickým popisem, který udává vztahy mezi středovanými veličinami.

$$\vec{D} = \vec{\epsilon} \vec{E} \quad (3.1)$$

kde $\vec{\epsilon}$ je symetrický tensor 2. řádu o devíti složkách.

Ve složkách tedy můžeme rov. (3.1) zapsat

$$D_i = \epsilon_{ij} E_j \quad (3.1')$$

Jak se odvozuje v teorii elmg. pole, v sebe obecnějším případě je možno v krystalu zvolit nejméně jedním způsobem

ortogonální souřadný systém, v němž má tensor $\vec{\epsilon}$ jen diagonální složky - ϵ_{ii} . Příslušné osy nazýváme hlavními osami. Budeme proto naše úvahy vztahovat často k tomuto systému a zavedeme zkráceně $\epsilon_{ii} = \epsilon_i$, takže rov. (2.1) se dá v soustavě hlavních os přepsat

$$\vec{D} = \vec{i}(\epsilon_1 E_x) + \vec{j}(\epsilon_2 E_y) + \vec{k}(\epsilon_3 E_z) \quad (3.2)$$

3.1. Struktura harmonické elmg. vlny v anisotropním prostředí

Pro zjednodušení budeme vyšetřovat rovinnou harmonickou vlnu, lineárně polarizovanou

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.3)$$

V takovém případě jsou operace rotace, divergence a časové derivace ekvivalentní násobení jistými faktory:

$$\begin{aligned} \text{rot} &= \nabla \times = i \vec{k} \times \\ \text{div} &= \nabla \cdot = i \vec{k} \cdot \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -i\omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

Vyjdeme nyní z Maxwellových rovnic pro nemagnetické a nevodivé dielektrikum:

$$[\nabla \times \vec{H}] = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.5)$$

$$[\nabla \times \vec{E}] = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.6)$$

S užitím vztahů (3.4) dostaneme

$$[\vec{k} \times \vec{H}] = -\omega \vec{D} \quad (3.5')$$

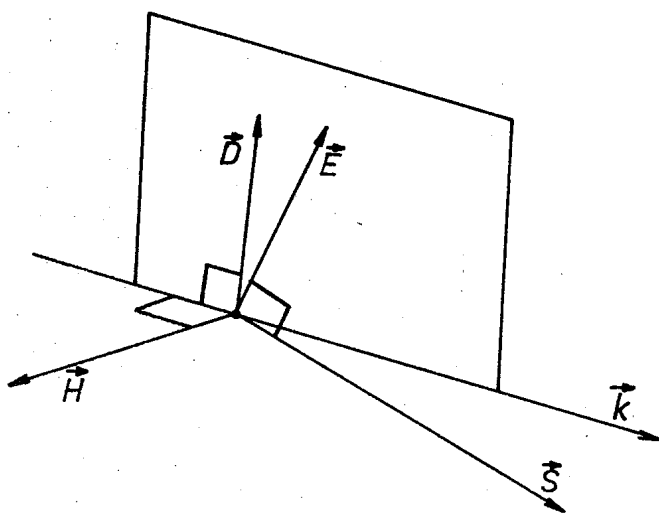
$$[\vec{k} \times \vec{E}] = \omega \mu_0 \vec{H} \quad (3.6')$$

Vlnovou rovnicí získáme derivací rovnice (3.5') podle času, opětovným užitím operace $\nabla \times$ na (3.6') a vyloučením \vec{H} . S užitím vztahů (3.4) získáme vlnovou rovnici ve tvaru

$$\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}] = -\omega^2 \mu_0 \vec{D} \quad (3.7)$$

Toto je velmi důležitá rovnice, která obsahuje zejména geometrický vztah mezi \vec{E} a \vec{D} při zadaném směru šíření elmg. vlny v krystalu \vec{k} .

Podle známého pravidla o trojím vektorovém součinu $\vec{A} \times [\vec{B} \times \vec{C}] = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ je vidět, že vektor na levé straně (3.7) lze rozložit na dvě složky rovnoběžné s vektory \vec{k} a \vec{E} a je to tedy vektor komplanární s \vec{k} a \vec{E} . Tedy i vektor na pravé straně (3.7), což je až na skalární faktor, vektor \vec{D} , je komplanární s \vec{k} a \vec{E} (obr.3.1). Vektor \vec{H} je ovšem vždy kolmý k rovině těchto vektorů, jak plyne z rov. (3.6') a z vlastností vektorového součinu.



Obr.3.1. Struktura harmonické vlny v anisotropním prostředí

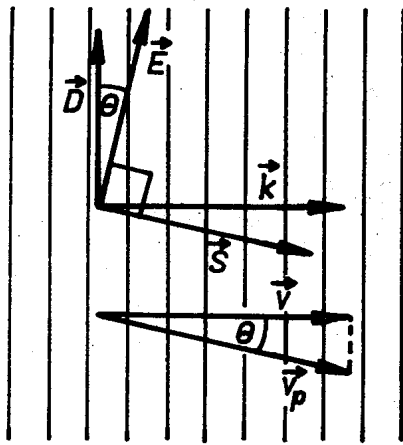
Absolutní hodnoty vektorů na obou stranách rov. 3.7 jsou si rovny, takže platí

$$k^2 E \cos \theta = \omega^2 \mu_0 D$$

kde jsme zavedli úhel θ sevřený vektory \vec{E} a \vec{D} (obr.3.2). Odtud můžeme vyjádřit čtverec fázové rychlosti v^2

$$v^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{E}{\mu_0 D} \cos \theta \quad (3.8)$$

Tato rychlost nám popisuje šíření vlnoplochy ve směru normály. Budeme ji proto v krystalech nazývat normálovou rychlostí.



Vektor normálové rychlosti je kolmé s vektorem \vec{k} , takže za pomoci rov. (3.7) plyne pro vektory \vec{v} , \vec{k} , \vec{D} :

$$\vec{k} \perp \vec{D} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{D}$$

Toto však není rychlost, s níž se šíří paprsek nebo též energie. Kdybychom totiž hledali směr paprsku např. tím způsobem, že bychom zjišťovali v Huygensově konstrukci spojnici středu elementární vlnoplochy a dotyčného bodu obalové vlnoplochy s elementární vlnoplochou, dostaneme obecně přímku,

Obr.3.2. Vlnoplochy, fázová a paprsková rychlost v anisotropním prostředí

která není kolmá k výsledné vlnoploše. To znamená, že jsou vlnoplochy orientovány šikmo ke směru paprsku. Poyntingův vektor \vec{S}

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

určuje směr, kterým se šíří energie. Tento vektor má směr paprsku. Rychlost paprsková \vec{v}_p je tedy kolmá k vektorům \vec{E} a \vec{H} a leží také v rovině vektorů \vec{E} a \vec{k} . Z obr. 3.2. plyne

$$v_p = \frac{v}{\cos \theta} \quad (3.9)$$

Zopakujme základní vlastnosti rovinné elmg vlny v anisotropním prostředí:

- vektory \vec{E} , \vec{D} , \vec{k} , \vec{S} leží v jedné rovině
- vektory \vec{k} a s ním rovnoběžný \vec{v} jsou kolmé k \vec{D}
- vektory \vec{S} a s ním rovnoběžný \vec{v}_p jsou kolmé k \vec{E}
- vektor \vec{H} je kolmý ke všem uvedeným vektorům.

Z toho ihned plyne, že je-li zadán např. směr vlnového vektoru \vec{k} , nemůže mít vlna libovolnou polarizaci, nýbrž jen takovou, při níž \vec{E} , \vec{D} a \vec{k} jsou komplanární. Naopak, je-li udán směr např. vektoru \vec{E} , je tím jednoznačně (podle rov. 3.2) určen vektor \vec{D} a rovina, v níž mohou ležet přípustné vektory

ry \vec{k} , takže vzhľadom k tomu, že $\vec{k} \perp \vec{D}$, je i vektor \vec{k} jednoznačne určen.

Naším ďalším úkolem bude zistiť, jak se ze známých hodnot složek ϵ_{ij} určí

a) směr šíření a fázová rychlost vlny, jestliže je zadána polarizace, \vec{E}

b) směr polarizace \vec{E} a fázová rychlost, jestliže je zadán směr šíření,

c) tvary elementárních vlnoploch.

K tomuto účelu se užívá geometrických konstrukcí na různých plochách vyšších stupňů.

3.2. Fresnelův elipsoid (indikatrix)

Zavedme nejprve reciproký tensor $\vec{\xi}$ k permitivitě $\vec{\epsilon}$ (v systému hlavních os)

$$\vec{\xi} = \vec{\epsilon}^{-1} = \begin{pmatrix} \epsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3^{-1} \end{pmatrix}$$

Pomocí tohoto tensoru můžeme vyjádřit \vec{E} jako funkci \vec{D}

$$\vec{E} = \vec{\xi} \vec{D} \quad (3.10)$$

Položme si nyní otázku, jaké je geometrické místo koncových bodů vektorů \vec{D} takových, že v daném krystalu pro ně platí normalizační podmínka

$$\vec{E} \cdot \vec{D} = 1 \quad (3.11)$$

(Tato podmínka vlastně značí, že vektory, které splňují (3.11), odpovídají konstantní hustotě energie elektrického pole.)

Jestliže nyní dosadíme za \vec{E} z rov. (3.10) do (3.11), dostaneme rov.

$$\vec{D} \cdot \vec{\xi} \cdot \vec{D}' = 1 \quad (3.12)$$

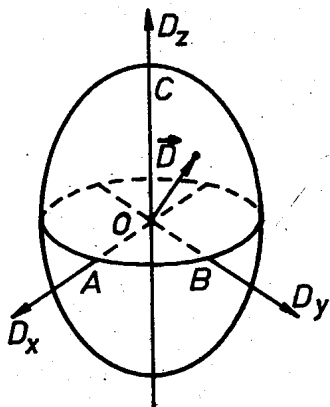
kteřou můžeme interpretovat jako elipsoid tensoru $\vec{\xi}$ v prostoru \vec{D} . Přitom \vec{D} značí jednořádkovou matici složek (D_x, D_x, D_z) a \vec{D}' jednosloupcovou matici s týmiž složkami. Explicite,

$$\frac{D_x^2}{\epsilon_1} + \frac{D_y^2}{\epsilon_2} + \frac{D_z^2}{\epsilon_3} = 1 \quad (3.12')$$

Jak je vidět, poloosy elipsoidu (splývající s hlavními osami) jsou $\epsilon_1^{1/2}$, $\epsilon_2^{1/2}$, $\epsilon_3^{1/2}$ a můžeme místo toho zavést indexy lomu $n_i = (\epsilon_i / \epsilon_0)^{1/2}$, takže rov. (3.12) nabývá tvar

$$\frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_2^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} \right) = 1 \quad (3.12'')$$

Tomuto elipsoidu (obr. 3.3) říkáme indikatrix, indexový elipsoid, nebo Fresnelův elipsoid.



Obr. 3.3. Fresnelův elipsoid, indikatrix

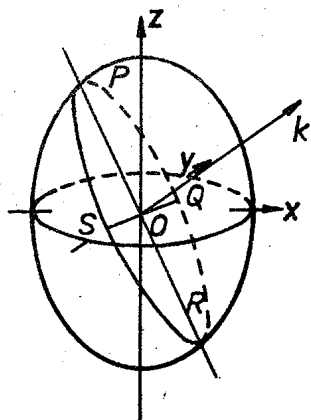
Fyzikální význam indikatrixe je, že nám udává pro každý směr \vec{D} index lomu násobený $\epsilon_0^{1/2}$ pro vlnu s touto polarizací, jakožto průvodič OD vedený daným směrem \vec{D} ze středu elipsoidu.

Tak např. pro vektor \vec{D} ve směru osy D_x , tj. $(D, 0, 0)$ je příslušný index lomu roven $OA \cdot \epsilon_0^{-1/2}$, tedy $n_1 \epsilon_0^{-1/2}$ atd.

Tím však ještě nemáme vyřešenu úlohu, neboť ještě neznáme směr \vec{k} , kterým se může vlna s daným vektorem \vec{D} šířit. Tuto otázku zodpovíme tím, že nejdříve najdeme vektor \vec{E} příslušející danému \vec{D} podle rovnice (3.10). Analyticky se dá dokázat, že na Fresnelově elipsoidu získáme směr \vec{E} (což nám pro naše účely postačí, absolutní hodnota nás nyní nezajímá) tak, že v koncovém bodě \vec{D} vedeme

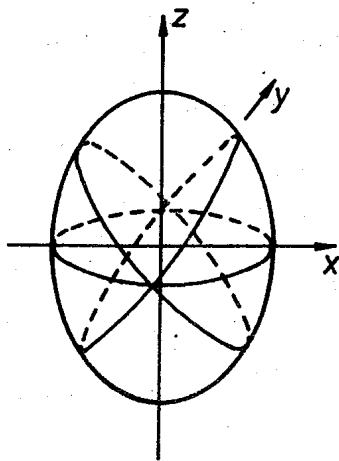
tečnou rovinu a spustíme na ni kolmicí ze středu elipsoidu. Tato normála nám udává směr \vec{E} . Tím máme určenou rovinu (\vec{D}, \vec{E}) , v níž musí ležet vektor \vec{k} . Najdeme jej jako kolmicí na \vec{D} v této rovině. To je zároveň směr normálové rychlosti \vec{v} .

Vyřešíme nyní druhou úlohu, tj. najít charakteristické vlny k danému směru šíření \vec{k} . Víme, že možné vektory \vec{D} musí ležet v rovině kolmé ke \vec{k} . Vedeme proto středem elipsoidu řez kolmý ke \vec{k}



Obr.3.4. Konstrukce k získání indexů lomu charakteristických vln šířících se směrem \vec{k}

(obr.3.4), který seče elipsoid obecně v elipse. Další podmínkou je, že v rovině (\vec{D}, \vec{k}) musí ležet i vektor \vec{E} , o němž už víme, že má směr normály k tečné rovině v bodě (D_x, D_y, D_z) elipsoidu. Snadno se dá nahlédnout ze symetrie elipsy, že takovou vlastnost mají jen dva vektory $(+)$ D ležící v osách průsečné elipsy. Ke každému směru \vec{k} tedy existují obecně dvě navzájem kolmo polarizované charakteristické vlny. Každou jinou vlnu šířící se směrem \vec{k} můžeme rozložit do těchto dvou složek charakteristických vln.



Obr.3.5. Kruhové řezy na elipsoidu

Délky poloos udávají příslušné indexy lomu dvou charakteristických vln. Na obr. 3.3 to jsou úsečky \overline{OP} a \overline{OQ} . Daným směrem se tedy šíří charakteristické vlny obecně různou rychlostí.

Z geometrie víme, že v trojosém elipsoidu existují dva kruhové řezy (obr. 3.5). Směrem \vec{k} normálním k těmto dvěma řezům tedy přísluší charakteristické vlny libovolně příčně polarizované se stejným indexem lomu. Příslušným dvěma směrem \vec{k} říkáme optické osy krystalu. Obecný krystal má tedy dvě optické osy.

Ve zvláštních případech, kdy v krystalu existuje jediná hlavní osa (v soustavách trigonální, tetragonální a hexagonální), se elipsoid Fresnelův stává rotačním, řez kolmý na osu je kruhový, obě optické osy proto splývají s hlavní osou krystalografickou a mluvíme o jednoosých krystalech. Ostatní soustavy jsou opticky dvojosé s výjimkou kubické, u níž elipsoid degeneruje na kouli a krystaly se chovají jako isotropní.

Fresnelův elipsoid nám názorně určuje směrové vztahy vektorů \vec{E} , \vec{D} , \vec{k} , avšak kvantitativní vztahy se z něj nedají jednoduše odvodit.

Názornější jsou plochy, jejichž průvodiče přímo udávají indexy lomu, rychlosti fázové nebo paprskové, nebo vlnčet pro vlnu šířící se směrem tohoto průvodiče. Vzhledem k tomu, že máme obecně v každém směru dvě charakteristické vlny ve dvou opačných smyslech, bude každá přímka středem plochy mít s ní čtyři body společné, jsou to plochy čtvrtého stupně.

3.3. Plocha vektoru \vec{k} , indexová plocha

Přehledné kvantitativní vztahy dostaneme, když stanovíme podmínku, aby rovnice (3.7) měla nenulové řešení pro \vec{E} . Vektorová rovnice (3.7) představuje tři lineární homogenní rovnice ve složkách E_i . Pomocí vztahů

$$\begin{aligned}\omega^2 \mu_0 D_i &= \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_{ri} E_i = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{ri} E_i \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} n_i^2 E_i\end{aligned}$$

můžeme totiž (3.7) přepsat takto:

$$\begin{aligned}(-k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_1^2) E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z &= 0 \\ k_y k_x E_x + (-k_z^2 - k_x^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_2^2) E_y + k_y k_z E_z &= 0 \\ k_z k_x E_x + k_z k_y E_y + (-k_x^2 - k_y^2 + \frac{\omega^2}{c^2} n_3^2) E_z &= 0\end{aligned}\tag{3.13}$$

Zavedeme ještě $k_1 = \frac{\omega}{c} n_1$ atd. Podmínka nenulového řešení je pak

$$\begin{vmatrix} -k_y^2 - k_z^2 + k_1^2 & , & k_x k_y & , & k_x k_z \\ k_x k_y & , & -k_z^2 - k_x^2 + k_2^2 & , & k_y k_z \\ k_x k_z & , & k_y k_z & , & -k_x^2 - k_y^2 + k_3^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

Toto je plocha 4.tého stupně v třírozměrném prostoru k_x, k_y, k_z , a sice jak se dá ukázat, druhého stupně pro proměnné k_x^2, k_y^2, k_z^2 .

Vlastnosti této plochy vyšetříme tak, že stanovíme postupně její průsečnice s rovinami kolnými k osám k_x, k_y, k_z jdoucími středem plochy. Tak např. pro rovinu $k_z = 0$ dostaneme

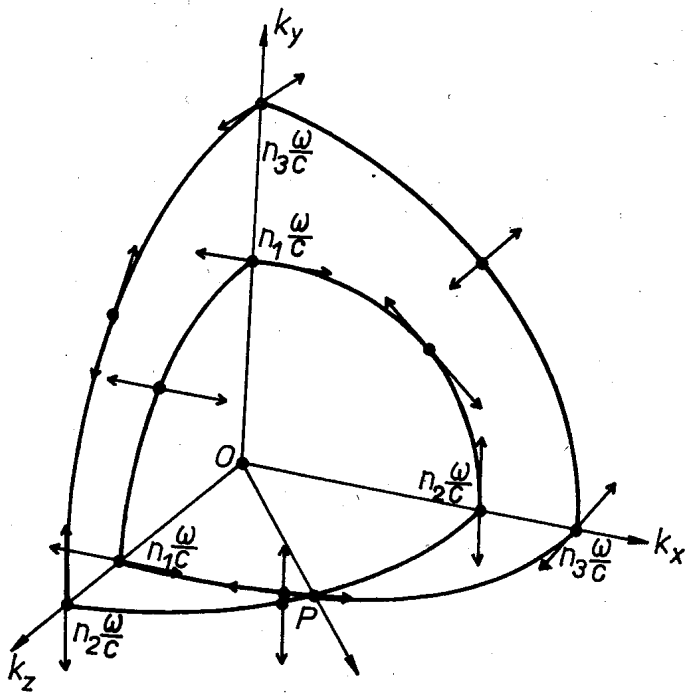
$$(k_3^2 - k_x^2 - k_y^2) [(k_2^2 - k_x^2)(k_1^2 - k_y^2) - k_x^2 k_y^2] = 0$$

Průsečnice se v tomto případě rozpadá na dvě křivky druhého stupně, z nichž první je kružnice o poloměru k_3 a druhou dostaneme anulováním druhého faktoru:

$$(k_2^2 - k_x^2)(k_1^2 - k_y^2) - k_x^2 k_y^2 = 0$$

$$\frac{k_x^2}{k_2^2} + \frac{k_y^2}{k_1^2} = 1$$

To je elipsa v osovém tvaru o poloosách k_2 a k_1 . Podobně bychom dostali v rovině $k_y k_z$ kružnici o poloměru k_1 a elipsu o poloosách k_3, k_2 a konečně v rovině $k_x k_z$ kružnici o poloměru k_2 a elipsu o poloosách k_3, k_1 . Jeden oktant je zakreslen na obr. 3.6. Směr polarisace pro jednotlivé případy bychom dostali, kdybychom do soustavy rovnic (3.13) dosadili za



Obr.3.6. Plocha vektorů \vec{k} , indexová plocha

$$k_x^{(1)} = k_2 = n_2 \frac{\omega}{c}$$

$$k_x^{(2)} = k_3 = n_3 \frac{\omega}{c}$$

k_x^2, k_y^2, k_z^2 zvolené hodnoty, slučitelné s daným tensorem $\vec{\epsilon}$ a frekvencí, tj. splňující rov. (3.14). Řešení homogenní soustavy (3.13) s podmínkou (3.14) nám ovšem dává jednoznačně jen $E_x:E_y:E_z$, což stačí k určení směru. Jak se snadno přesvědčíme, jsou např. pro vlnu šířící se směrem k_x ($k_y = k_z = 0$) dvě možnosti s polarizacemi E_y a E_z :

$$(-k_x + k_2)E_y = 0$$

$$(-k_x + k_3)E_z = 0$$

Směry kmitů \vec{E} jsou zakresleny rovněž na obr. 3.6. Plocha vektorů \vec{k} nám zároveň udává v jistém měřítku plochu indexů, neboť platí $k = n k_0 = n \frac{\omega}{c}$.

Všimněme si však důležitého rozdílu mezi indikatricí obr. 3.3 a indexovou plochou obr. 3.6. Průvodiče k oběma povrchům v daném směru udávají v druhém případě přímo indexy lomu charakteristických vln šířících se v tomto směru. Průvodič k indikatricí udává jen index lomu příslušný k jedné charakteristické vlně se zadaným směrem \vec{D} , o směru šíření přímo nic nevyovídá.

V případě, který je nakreslen na obr. 3.6, je $n_1 < n_2 < n_3$. Vzájemná poloha kruhových a eliptických řezů je taková, že v rovině $k_x k_y$ je kružnice o poloměru $n_3 \frac{\omega}{c}$ vně elipsy a v rovině $k_y k_z$ je kružnice o poloměru $n_1 \frac{\omega}{c}$ uvnitř elipsy.

V rovině $k_x k_z$ však kružnice o poloměru k_2 protíná kružnici ve čtyřech bodech, jejichž diagonální spojnice tvoří dvě optické osy, neboť v těchto směrech se obě charakteristické vlny šíří stejnou rychlostí (mají stejný vektor \vec{k}). Ve zvláštním případě mohou tyto osy splynout a krystal pak je jednoosý. Plocha vektoru \vec{k} degeneruje v tom případě na kouli a rotační elipsoid, které se dotýkají ve dvou bodech.

3.4. Plocha fázových rychlostí

Tuto plochu snadno odvodíme z plochy vlnových vektorů, jestliže za složky dosadíme

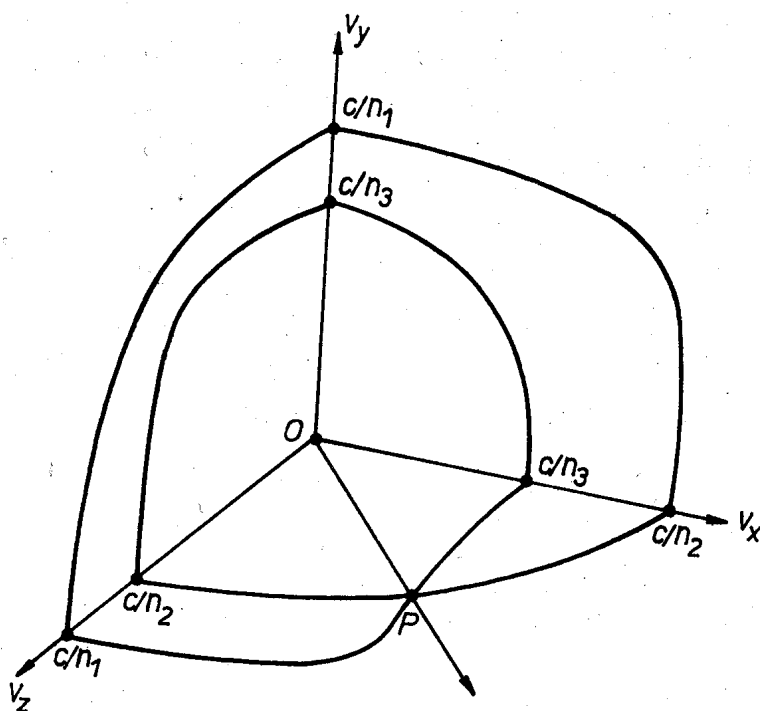
$$k_x = v_x \frac{\omega}{v^2}, \quad k_y = v_y \frac{\omega}{v^2}, \quad k_z = v_z \frac{\omega}{v^2}$$

Po zkrácení výrazem $\frac{\omega^2}{v^4}$ dostaneme

$$\begin{vmatrix} \frac{n_1^2 v^4}{c^2} - v_y^2 - v_z^2 & v_x v_y & v_x v_z \\ v_y v_x & \frac{n_2^2 v^4}{c^2} - v_x^2 - v_z^2 & v_y v_z \\ v_z v_x & v_z v_y & \frac{n_3^2 v^4}{c^2} - v_x^2 - v_y^2 \end{vmatrix} = 0$$

Tato plocha je reciprokou plochou k (3.14) a má podobné topologické vlastnosti. Průsečnice s rovinami osového čtyřhranu jsou kružnice a ovály čtvrtého stupně (obr. 3.7), tak např. pro rovinu v_x, v_y (tj. $v_z = 0$) jsou rovnice křivek:

$$v_x^2 + v_y^2 = \frac{c^2}{n_3^2}$$



Obr.3.7. Plocha fázových rychlostí

Plouhu použit v Huygensově konstrukci jakožto vlnplochu. Názornější význam má proto vlnplocha paprskových rychlostí.

$$\frac{v_x^2}{n_2^2} + \frac{v_y^2}{n_1^2} = \frac{(v_x^2 + v_y^2)^2}{c^2}$$

Vzhledem k tomu, co jsme si vyložili o struktuře vlny, vlastností této plochy je, že průvodič udává normálovou rychlost, tj. v koncovém bodě průvodiče lze sestavit vlnplochu jakožto rovinu kolmou k průvodiči. (Nikoli tečnou k ploše!) Nelze proto tuto plo-

3.5. Plocha paprskových rychlostí - vlnplocha

Zde se musíme vrátit k základní vlnové rovnici (3.7) a pokusíme se hledat podmínku řešitelnosti ve složkách \vec{D} stejně jako jsme ji našli pro složky \vec{E} . Pomocí pravidla pro trojný vektorový součin přepíšeme (3.7)

$$\vec{k} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = - \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} \vec{D} \quad (3.16)$$

Rovnici (3.16) vynásobíme skalárně vektorem \vec{D} . Vzhledem k tomu, že $\vec{k} \perp \vec{D}$, vypadne první člen na levé straně, takže dostaneme

$$k^2 (\vec{E} \cdot \vec{D}) = \frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2} D^2 ;$$

Podtud s použitím $k = \frac{\omega}{v}$ dostaneme:

$$\frac{1}{v^2} E \cos \theta = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} D$$

Avšak podle (3.9) $v^2 / \cos \theta = v_p^2 \cdot \cos \theta$, takže

$$\frac{E}{v_p^2 \cos \theta} = \frac{D}{\epsilon_0 c^2} \quad (3.17)$$

Nyní vyjádříme vektor \vec{D} ve složkách ve směrech \vec{E} a \vec{v}_p (viz obr. 3.2) tak, že vezmeme jejich absolutní hodnoty a násobíme příslušnými jednotkovými vektory

$$\vec{D} = D \cos \theta \frac{\vec{E}}{E} + \left(\frac{\vec{v}_p}{v_p} \cdot \vec{D} \right) \cdot \frac{\vec{v}_p}{v_p}$$

S použitím (3.17)

$$\vec{D} = \frac{\epsilon_0 c^2}{v_p^2} \vec{E} + \frac{(\vec{v}_p \cdot \vec{D})}{v_p^2} \cdot \vec{v}_p \quad (3.18)$$

Zavedeme-li dále $D_x = E_x \epsilon_0 n_1^2$ atd., dostaneme ze (3.18) tři rovnice ve složkách

$$\left(\frac{c^2}{n_1^2} - v_{py}^2 - v_{pz}^2 \right) D_x + v_{px} v_{py} D_y + v_{px} v_{pz} D_z = 0$$

$$v_{py} v_{px} D_x + \left(\frac{c^2}{n_2^2} - v_{px}^2 - v_{pz}^2 \right) D_y + v_{py} v_{pz} D_z = 0$$

$$v_{pz} v_{px} D_x + v_{pz} v_{py} D_y + \left(\frac{c^2}{n_3^2} - v_{px}^2 - v_{py}^2 \right) D_z = 0$$

Anuleváním determinantu soustavy dostaneme rovnici plochy praskových rychlostí, čili Fresnelovy vlnoplochy:

$$\begin{vmatrix}
 \frac{c^2}{n_1^2} - v_{py}^2 - v_{pz}^2 & v_{px} v_{py} & v_{px} v_{pz} \\
 v_{py} v_{px} & \frac{c^2}{n_2^2} - v_{px}^2 - v_{pz}^2 & v_{py} v_{pz} \\
 v_{pz} v_{px} & v_{pz} v_{py} & \frac{c^2}{n_3^2} - v_{px}^2 - v_{py}^2
 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.19)$$

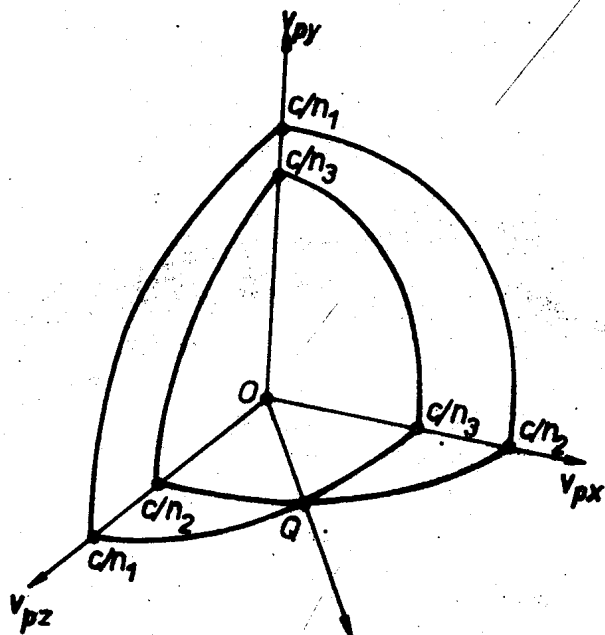
Tato plocha má geometrické vlastnosti podobné jako plocha vektorů \vec{k} , je to dvojlistová plocha 4-tého stupně, jejíž průsečnice se souřadnými rovinami jsou opět kružnice a elipsy (3.8). Vzhledem k tomu, že plochy (3.19) a (3.14) jsou navzájem

reciproké, nejsou optické osy paprskové a indexové totožné. U jednoosých krystalů ovšem osy indexové i paprskové se shodují.

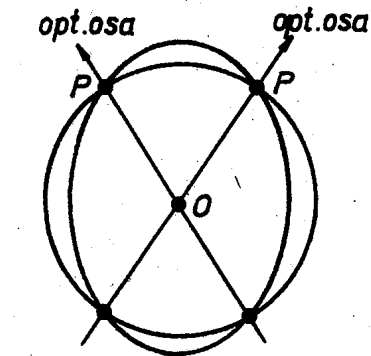
3.6. Jednoosé krystaly

U jednoosých krystalů jsou všechny zmíněné plochy rotačně symetrické podél optické osy a rozpadají se na dvě kvadratické plochy, totiž koule a rotační elipsoid. Kulové plochy přísluší paprskům a indexům řádným, elipsoidní paprskům a indexům mimořádným (o tom blíže v odst.3.7).

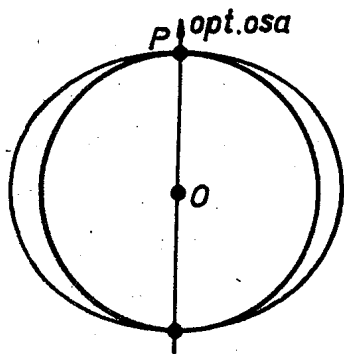
Geometricky to značí, že obecný případ s různými indexy lomu n_1, n_2, n_3 se zúží na případ rovnosti dvou indexů, např.



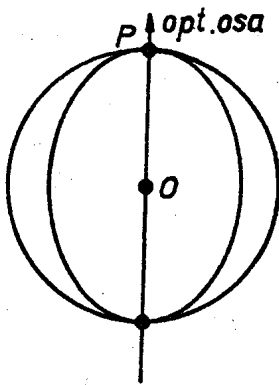
Obr.3.8. Plocha paprskových rychlostí



(a)



(b)



(c)

Obr.3.9. Indexové plochy dvojosého (a), jednoosého kladného (b), jednoosého záporného (c) krystalu

$n_1 = n_2 \neq n_3$. Označíme potom $n_1 = n_2 = n_0$ jakožto index řádný a jeho velikost určuje poloměr kulových indexových ploch (vektorů \vec{k}) a ploch \vec{v}_p . Nyní mohou nastat dva případy (srovnej s obr. 3.6 a 3.8):

$$1) \quad n_0 < n_3$$

Koule indexové plochy je vepsána do sploštělého rotačního elipsoidu, takže se ho dotýká v bodech osy z . Pak platí pro index mimořádný n_e (obr. 3.9)

$$n_e \geq n_0 ; \text{ krystal } \underline{\text{kladný}}$$

Pro tento krystal ovšem vyplývá, že paprskové rychlosti jsou v opačném vztahu

$$v_{pe} \leq v_{po}$$

a vlnoplocha kulová (srov. s obr.3.8) je opsaná vlnoploše elipsoidu, tentokrát tvaru protáhlého.

$$2) \quad n_0 > n_3$$

Koule indexové plochy je opsána protáhlému rotačnímu elipsoidu, takže se obě plochy dotýkají v koncových bodech osy. Platí

$$n_e \leq n_0 ; \text{ krystal } \underline{\text{záporný}}$$

$$v_{pe} \geq v_{po}$$

Příklady kladných krystalů jsou ($\lambda = 589,3 \text{ nm}$)

křemen	$n_0 = 1,544$	$n_e = 1,553$
rutil	$n_0 = 2,616$	$n_e = 2,903$

Záporné krystaly:

island.vápenec	$n_o = 1,658$	$n_e = 1,486$
turmalin	$n_o = 1,669$	$n_e = 1,638$
beryl	$n_o = 1,598$	$n_e = 1,590$

3.7. Dvojlom

Jestliže dopadá paprsek z prostředí isotropního do anisotropního, nastává dvojlom, tj. paprsek se štěpí obecně ve dva paprsky. V obecném případě dvojosého krystalu musíme při vyšetřování lomu vyjít z podmínky na rozhraní, kterou jsme už dříve použili (viz kap. 2). Pro body \vec{r} na rozhraní platí

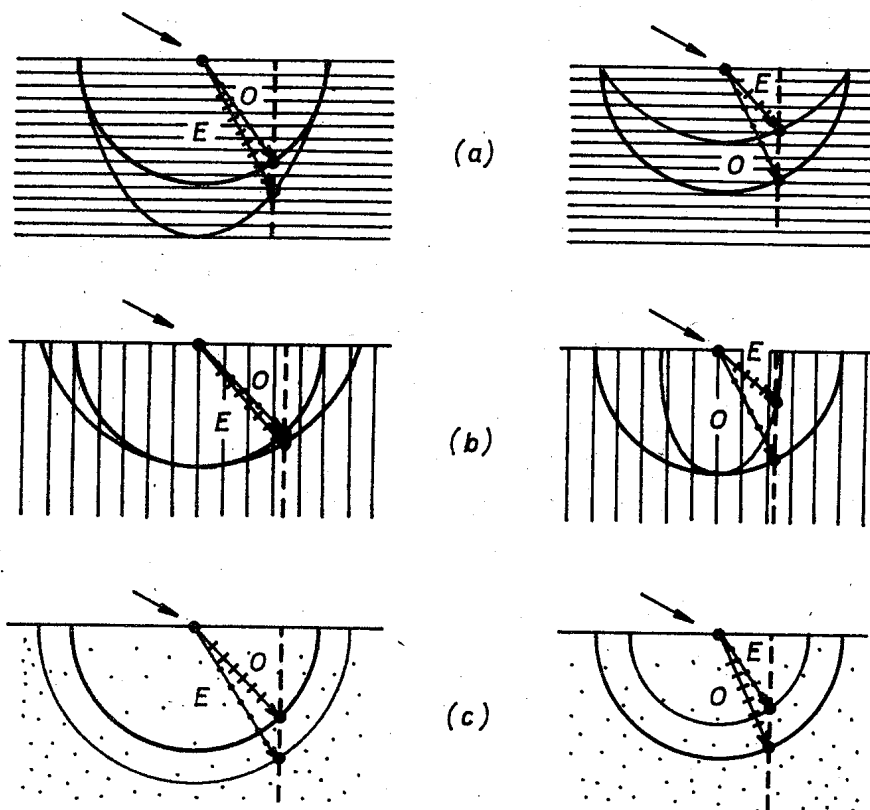
$$\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}$$

kde \vec{k}_I je vlnový vektor dopadající vlny, \vec{k} vlny lomené. V krystalu máme tedy dvě vlny s vektory \vec{k}' , \vec{k}'' , takže musí platit

$$(\vec{k}_I \cdot \vec{r}) = (\vec{k}' \cdot \vec{r}) = (\vec{k}'' \cdot \vec{r}), \quad (3.20)$$

Řešení ovšem je obtížné. Znamená to najít takové dva paprsky, pro které je splněna podmínka (3.20) pro libovolné \vec{r} v rozhraní. Na rozdíl od isotropního prostředí je velikost \vec{k} závislá na směru a proto není možno použít Snelliova zákona. Geometrická konstrukce podle Huygensova principu by se prováděla takto: Namísto elementárních vln ve tvaru koulí bychom v bodě dopadu paprsku na rozhraní zkonstruovali vlnoplochu v_p podle obr. 3.8 ve správné orientaci hlavních os vůči rozhraní. Tečné roviny obálky tu jsou dvě, k vnitřnímu a vnějšímu povrchu plochy. Spojnice tečných bodů obálek s bodem dopadu pak udává směry lomených paprsků. Z tvaru vlnoplochy je zřejmé, že obecně žádný z dotyčných bodů nemusí ležet v rovině dopadu. Situace se zjednoduší, když např. rovina dopadu je totožná s některou souřadnou rovinou. Pak oba paprsky lomené zůstávají v této rovině a pro paprsek příslušející kružnici platí zákon lomu s indexem nezávislým na úhlu dopadu.

Jednodušší je situace u jednoosých krystalů. Zde máme vždy jednu vlnoplochu kulovou a jí odpovídající paprsek se chová jako při lomu do isotropního prostředí, až na to, že je v krystalu úplně polarizován s vektorem \vec{E} kolmým na rovinu hlavního řezu. ⁺) Tento paprsek se nazývá řádny (ordinarius, symbol o). Druhá vlnoplocha je rotační elipsoid a jí přísluší paprsek mimořádný (extraordinarius, symbol e). Jak



Obr.3.10.Konstrukce lomeného paprsku v jednoosém krystalu

(a)osa rovnoběžná s rozhraním a rovinou dopadu; (b)osa rovnoběžná s rovinou dopadu a kolmá k rozhraní; (c)osa rovnoběžná s rozhraním a kolmá k rovině dopadu; vlevo kladný, vpravo záporný krystal

snadno můžeme nahlédnout, mimořádný paprsek opět nemusí ležet v rovině dopadu a poměr sinů je závislý na úhlu dopadu. Mimořádný paprsek je polarizován s vektorem E v rovině hlavního

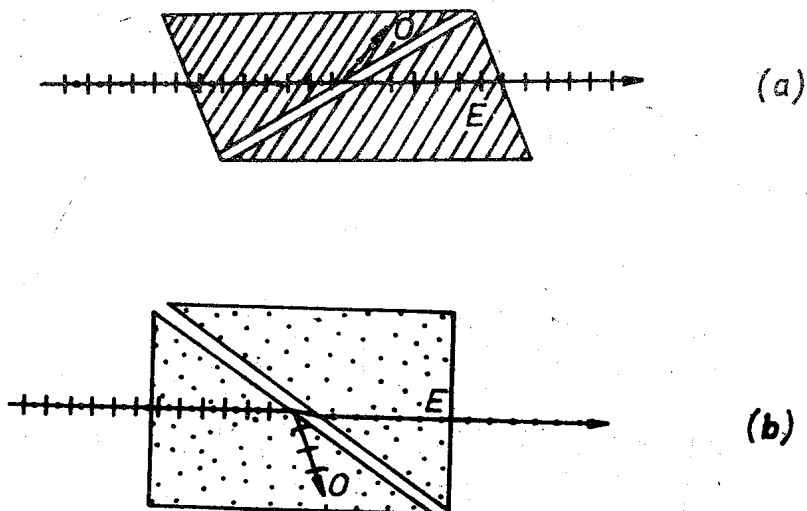
⁺) Termín hlavní řez je historický a znamená rovinu rovnoběžnou s optickou osou, proloženou paprskem v krystalu.

řezu. Při konstrukci lomených paprsků při lomu z isotropního prostředí můžeme opět vyjít z rov. (3.20), která říká, že projekce vlnových vektorů do libovolného vektoru na rozhraní je pro paprsek dopadající a oba lomené konstantní. Na obr. 3.10 je znázorněno, jak bychom našli lomené paprsky pro jednoosé krystaly ve zvláštních případech, a sice

- a) optická osa je v rovině dopadu a rovnoběžná s rozhraním,
- b) optická osa je v rovině dopadu a kolmá na rozhraní,
- c) optická osa je kolmá k rovině dopadu.

Křivky naznačují průsečnice ploch vektorů \vec{k} s rovinou dopadu. Řádný paprsek dostaneme podle Snelliova zákona. Ve všech případech a) až c) leží oba lomené paprsky v rovině dopadu, jak plyne ze symetrie rotačního elipsoidu. Mimořádný paprsek najdeme tak, že koncový bod \vec{k}_e na elipsoidu musí ležet na kolmici k rozhraní vedené koncovým bodem \vec{k}_o . Pak totiž jsou průměty vektorů \vec{k}_o a \vec{k}_e do rozhraní stejné. Polarizace obou paprsků je naznačena na obr. 3.10 tečkami ($E \perp$ k rovině dopadu) a úsečkami ($E \parallel$ s rovinou dopadu). Jak vyplývá z definice, paprsek mimořádný se v kladném krystalu lomí silněji než řádný a v záporném naopak. V případech a, b je hlavní řez totožný s rovinou dopadu, v příp. c je na ni kolmý.

Dvojlomem tedy získáme dva paprsky úplně polarizované s kmitovými rovinami navzájem kolnými, v prostoru oddělené. Jestliže se nám podaří jeden z nich odklonit, dostáváme optický



Obr.3.11. (a) Nikolův hranol, (b) Glanův hranol

prvek, který ze světla přirozeného vytváří světlo lineárně polarizované a z polarizovaného světla propouští jen složku s určitou polarizací.

Nejznámější optický prvek, který slouží jako dokonalý polarizátor, je Nikolův hranol. Je to hranol vyštípaný z čirého islandského vápence tak, že jeho diagonální řez odpovídá obr. 3.11.a. Tento řez prochází optickou osou a dvěma protilehlými hranami přirozeného klence. Po obroušení čelních stěn o několik stupňů proti přirozené štěpné ploše se hranol rozřízne naznačeným způsobem, řezné plochy se vyleští a slepí kanadským balsámem. Poněvadž má kanadský balsám pro řádný paprsek menší index lomu než vápenc a pro mimořádný větší, odráží se úplně řádný paprsek od vrstvy a je absorbován v objímce hranolu. Mimořádný paprsek prochází s malou ztrátou na intenzitě vrstvou balsámu a vychází z hranolu s kmity v rovině hlavního řezu, která je zde rovinou nákresnou.

Jiný typ polarizátoru je pravouhlý Glanův hranol (obr. 3.11.b), v němž osa je orientována kolmo k nákresné rovině a odrazovou vrstvou tvoří vzduch. Hranol propouští opět jen paprsek mimořádný. Je mnohem výhodnější polarizátor, než Nikolův hranol, zejména proto, že připouští větší divergenci svazku.

Nejjednoduššími a nejlevnějšími polarizátory jsou polarizační filtry, které využívají jevu dichroismu. Podstata tohoto jevu je v tom, že některé dvojlomé látky mají velký rozdíl absorpčních konstant pro řádný a mimořádný paprsek. Polarizační filtry se zhotovují z polymerové folie plasticky protažené jedním směrem a vystavené účinkům jódu nebo jiného halogenu. Protažením se řetězovité molekuly srovnají do jednoho směru a folie se stává opticky silně anisotropní. Ionty jódu se zabudují na konci řetězců a způsobí, že elektrická vodivost podél řetězců je mnohem větší než napříč řetězců. V důsledku toho je světlo s polarizací E ve směru řetězců silně absorbováno a folie propouští prakticky jen světlo polarizované kolmo k řetězcům.

3.8. Interference polarizovaného světla

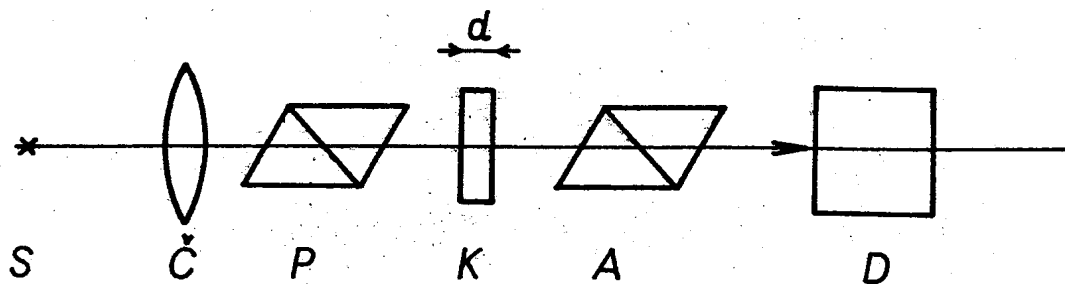
Mějme destičku z dvojlomého jednoosého materiálu vybroušenou tak, aby stěny nebyly kolmé na optickou osu. Jestliže dopadá kolmo na čelní stěnu lineárně polarizovaný monochromatický paprsek, šíří se v destičce jako dva paprsky, řádný a mimořádný, navzájem k sobě kolmo polarizované. Poněvadž mají různé fázové rychlosti, vystupují oba paprsky z destičky s jistým fázovým rozdílem φ , který je dán rozdílem optických drah:

$$\varphi = (n_e - n_o) d k_I$$

kde d je tloušťka destičky, k_I je vlnový vektor původního paprsku v isotropním prostředí (ve vzduchu). Po výstupu z destičky už postupují oba paprsky stejnou fázovou rychlostí, avšak s různými amplitudami a fázemi. Takové dva kmity se skládají ve výsledný kmit eliptický, vzniká vlna elipticky polarizovaná. Jestliže vložíme této vlně do cesty další polarizátor (zvaný analyzátor), pozorujeme při jeho otáčení oscilace intensity odpovídající variaci amplitudy E v rozmezí velikosti poloos eliptického kmity. Tak můžeme z polohy analyzátoru při maximální a minimální intenzitě určit směry a velikosti poloos. Tento jev se nazývá interference polarizovaného světla, neboť pomocí analyzátoru uvádíme původně kolmo k sobě polarizované vlny do jednoho společného směru polarizace a protože vznikly rozštěpením amplitudy původní jediné lineárně polarizované vlny, jsou to vlny koherentní, schopné interference (viz kap.4).

Nás nyní bude zajímat, jak probíhá intenzita za analyzátozem v závislosti na vzájemné orientaci polarizátoru, analyzátoru a optické osy destiček a jak se jev mění s otáčením analyzátoru příp. destičky okolo osy paprsku.

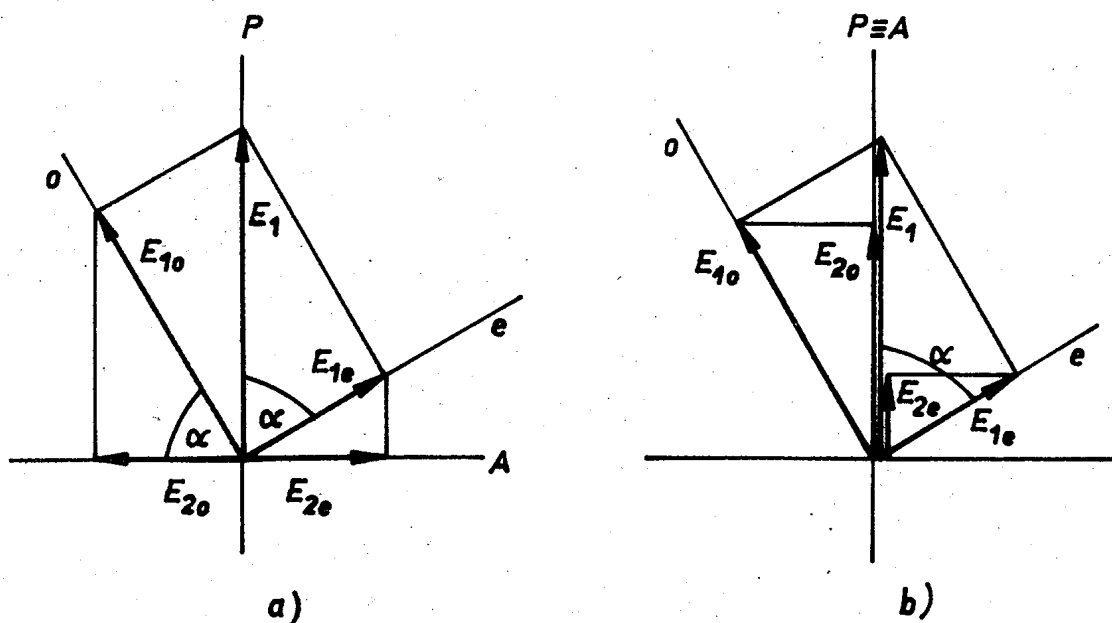
Základní uspořádání pokusu je na obr. 3.12. Ze zdroje S vystupující svazek učiníme rovnoběžný pomocí kondensoru \check{C} a polarizujeme pomocí polarizátoru P . Svazek pak prochází krytalovým výbrusem K a analyzátozem A . Výbrusem a analyzátozem



Obr.3.12. Pokus s interferencí polarizovaného světla

lze otáčet kolem osy celého uspořádání. Detektorem D měříme intensitu osvětlení nebo prostě světlo pouštíme na stínítko. Pro přesné měření použijeme jako zdroje, svazku vystupujícího z monochromátoru. Orientace světelných vektorů je na obr. 3.12a. Nebudeme zde probírat obecný případ, nýbrž se omezíme na dvě základní polohy analyzátoru: rovnoběžnou a kolmou k polarizátoru. (Tím rozumíme směry kmitů propouštěných polarizátorem P resp. analyzátozem A.) Vezměme nejprve kolmé uspořádání, $P \perp A$.

Amplituda lineárně polarizované monochromatické vlny ve směru P buďž E_1 . Při dopadu na krystalovou destičku se štěpí na dvě kolmé složky odpovídající řádnému (E_{1o}) a mimořádnému (E_{1e}) paprsku. Z obrázku 3.13a je patrné, že



Obr.3.13. Orientace světelných vektorů při interferenci polarizovaného světla

$$E_{1o} = E_1 \sin \alpha$$

$$E_{1e} = E_1 \cos \alpha$$

Po výstupu mají obě vlny E,0 vůči sobě fázový rozdíl

$$\varphi = (n_o - n_e) \frac{2 \pi d}{\lambda}$$

Analyzátor z těchto vln propouští jen složky do směru A o amplitudách E_{2o} , E_{2e}

$$\begin{aligned} E_{2o} &= - E_{1o} \cos \alpha = - E_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= - \frac{1}{2} E_1 \sin 2 \alpha \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} E_{2e} &= E_{1e} \sin \alpha = E_1 \sin \alpha \cos \alpha \\ E_{1e} &= \frac{1}{2} E_1 \sin 2 \alpha \end{aligned} \quad (3.22)$$

Kmity uvedené analyzátozem do stejné polarizace se tedy liší ve fázi, a sice vzhledem k zápornému znaménku ve (3.21) je celkový fázový rozdíl $\varphi \pm \pi$. Výsledná intenzita I měřená dektorem za analyzátozem je úměrna E^2 podle pravidla o fázovém součtu:

$$\begin{aligned} I_{\perp} \sim E^2 &= E_{2o}^2 + E_{2e}^2 + 2 E_{2o} E_{2e} \cos (\varphi \pm \pi) \\ &= \frac{1}{2} E_1^2 \sin^2 2 \alpha - \frac{1}{2} E_1^2 \sin^2 2 \alpha \cos \varphi \\ E_{\perp}^2 &= \frac{1}{2} E_1^2 \sin^2 2 \alpha (1 - \cos \varphi) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Dříve než přistoupíme k diskusi (3.23), odvodíme analogický výraz pro uspořádání s rovnoběžným analyzátozem (A || P). (Obr.3. 13b)

Zde máme

$$E_{2o} = E_1 \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} E_1 (1 - \cos 2 \alpha)$$

$$E_{2e} = E_1 \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} E_1 (1 + \cos 2\alpha)$$

$$E_{\parallel}^2 = E_{2o}^2 + E_{2e}^2 + 2 E_{2o} E_{2e} \cos \varphi$$

$$I_{\parallel} \sim E_{\parallel}^2 = E_1^2 \left[1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha (1 - \cos \varphi) \right] \quad (3.24)$$

Inřed vidíme, že jevy při rovnoběžných a zkřížených polarizátorech jsou navzájem doplňkové, jak plyne z (3.23) + (3.24):

$$E_1^2 = E_{\parallel}^2 + E_{\perp}^2 \quad (3.25)$$

Můžeme nyní diskutovat závislosti intenzit na a) vzájemné poloze analyzátoru a polarizátoru, b) na orientaci destičky (α), c) na fázovém zpoždění v destičce (φ).

Při dané tloušťce destičky dostaneme maximální intenzitu při poloze $A \perp P$ (a minimální intenzitu při $A \parallel P$), jestliže $\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots$, tzn., že charakteristické kmitoměry destičky svírají 45° s kmitoměrem polarizátoru. Při takové poloze, kdy jeden z kmitoměrů je rovnoběžný s P , destička nepůsobí. Jestliže tedy otáčíme destičkou v její rovině při pevné orientaci P, A , pak čtyřikrát během jedné otáčky ($\alpha = (2N + 1) \frac{\pi}{4}$) dostaneme buď tmu (při $A \perp P$) nebo intenzitu stejnou jako bez destičky (při $A \parallel P$). Tímto způsobem můžeme zjistit směr charakteristických kmitů destičky, jestliže známe kmitoměry P a A .

Pokud se týká závislosti na φ , pak zřejmě platí, že nastává (podle (3.23), (3.24)):

$$\begin{aligned} \text{maximum při } A \perp P, \text{ jestliže } \cos \varphi = -1; & (n_e - n_o)d = (N + \frac{1}{2}) \lambda_o \\ \text{při } A \parallel P, \text{ jestliže } \cos \varphi = +1; & (n_e - n_o)d = N \lambda_o \\ \text{minimum při } A \perp P, \text{ jestliže } \cos \varphi = +1; & (n_e - n_o)d = N \lambda_o \\ \text{při } A \parallel P, \text{ jestliže } \cos \varphi = -1; & (n_e - n_o)d = (N + \frac{1}{2}) \lambda_o \end{aligned}$$

Minima jsou nulová. Jestliže současně postavíme destičku do nejcitlivější polohy ($\alpha = 45^\circ$), pak maximum je rovno vstupní intenzitě (se zanedbáním absorpce a ztrát v polarizátorech).

Až dosud jsme popisovali jevy v monochromatickém světle. S použitím bílého světla se dostanou zajímavé barevné efekty. Zde musíme uvážit, že dvojlom jeví dispersi podobně jako prostý index lomu. V důsledku toho je φ závislé na λ_0 . Jestliže je pro některou vlnovou délku splněna podmínka minima, pak se nám zorné pole objeví v barvě doplňkové k té, která interferencí vyhasla.

Tak např. mějme destičku, pro níž platí, že $(n_e - n_o)d = \pm N \lambda_0$ pro červenou barvu ($\lambda_0 \simeq 650 \text{ nm}$). Jestliže ji vložíme mezi zkřížené polarizátory tak, aby kmitosměry svíraly $\pm 45^\circ$ s rovinou polarizátoru, pak se nám objeví zorné pole zabarveno modrozeleně, tj. barvou doplňkovou k červené.

- a) Jestliže nyní z této základní polohy otáčíme destičkou (stále při $A \perp P$), pak se objeví po otočení o 45° tma, o 90° stejně intenzivní zabarvení atd., celkem čtyřikrát tma a čtyřikrát modrozelená barva.
- b) Jestliže uspořádáme polarizátory rovnoběžně a vložíme destičku v poloze $\alpha = 45^\circ$, objeví se světelné pole v barvě červené, neboť pro tuto barvu nastává maximum ($A \parallel P$). Při otáčení destičkou se objeví čtyřikrát bezbarvé světlé pole a čtyřikrát červeně zbarvené.
- c) Jestliže při pevné poloze destičky a polarizátoru ($\alpha = 45^\circ$) otáčíme analyzátozem, přechází barva čtyřikrát od červené k modrozelené, v mezipolohách máme bezbarvé světlé pole se sníženou intenzitou ($\angle AP = 45^\circ$ atd.).

U silnějších destiček může být řád interference N vyšší a pak může být současně splněna podmínka pro minima a maxima pro řadu vlnových délek a jevy jsou složitější.

O tom, jak lze získat kruhově polarizované světlo pomocí čtvrtvlnové destičky, jsme se zmínili v 1. kapitole. Na destičce obvykle bývá vyznačen směr kmitů rychlého a pomalého paprsku. Nejčastěji se užívá slídových destiček, které se dají snadno vyštípat do potřebné tloušťky. Slída je dvojosý krystal, jehož štěpné plochy jsou kolmé k symetrále optických os. Charakteristické kmity pak leží v rovině optických os a kolmo k ní.

3.9. Fotoelastický jev

V isotropním prostředí lze indukovat optickou anisotropii elastickou deformací, tedy vyvoláním napěťového pole. Je známo např. že když se vloží mezi zkřížené polarizátory rychle zchlazené sklo, v němž "zamrzlo" napěťové pole, objeví se živé zabarvení protkané tmavými pruhy. Zvláště vhodné materiály, které jeví tyto efekty již při malém napětí, jsou některé průhledné polymery, např. polymetylmetakrylát. Proto se z takových materiálů vyrábí modely, na nichž se zkoumá rozložení napětí při daných zatíženích, což je obvykle mnohem jednodušší než teoretický výpočet z teorie elasticity.

Napěťové pole je popsáno tensorem napětí, který při vhodné volbě os (hlavní osy) je diagonální. Takové prostředí se stává opticky anisotropní s týmiž hlavními osami.

Jestliže např. máme dvojrozměrnou desku namáhanou tak, že směry hlavních napětí σ_{xx} , σ_{yy} leží v rovině desky, pak při průchodu světla kolmo k rovině desky se jí šíří dvě charakteristické vlny s polarizacemi ve směru os a jejich indexy lomu n' , n'' se málo liší od původního isotropního n_0 .

Dá se odvodit, že pro indexy platí

$$\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n''^2} = (q_{11} - q_{12})(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$$

Jestliže $|n'' - n'| \ll n_0$, lze přibližně psát

$$n'' - n' = \frac{1}{2} n_0^3 (q_{11} - q_{12})(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$$

kde q_{ik} jsou elastooptické koeficienty.

Při průchodu deskou o tloušťce d vznikne mezi vlnami E_x a E_y fázový rozdíl φ

$$\varphi = \frac{\pi d}{\lambda} n_0^3 (q_{11} - q_{12})(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}),$$

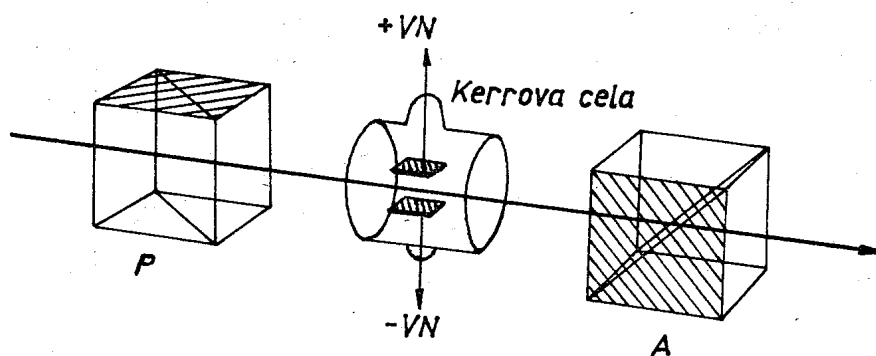
což můžeme také interpretovat tak, že fázový rozdíl je úměrný střižnému napětí $\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}$ v rovině $x y$.

Jestliže umístíme desku mezi polarizátory tak, aby osy x , y svíraly s kmitosměry polarizátorů 45° , objeví se nejkontrastněji světlé a temné pruhy, které odpovídají místům stejného φ , tedy i stejného napětí.

Na základě tohoto jevu, zvaného fotoelastický, se rozvinula měřicí metodika, fotoelasticimetrie, která zkoumá na modelech napěťové poměry ve stavebních a strojních konstrukcích.

3.10. Kerrův jev; Pockelsův jev

Kerrův jev (objeven 1875) je umělý dvojlom v pevných látkách i kapalinách vyvolaný elektrickým napětím. Lze jej např. pozorovat ve skle, sirouhlíku, nitrobenzenu aj. Experimentální uspořádání pro pozorování v kapalinách je na obr. 3.14. Pa-



Obr.3.14. Pokus s Kerrovou celou

prsek lineárně polarizovaný vstupuje do prostoru mezi deskami kondensátoru vy-

plněného zkoumanou kapalinou tak, že rovina kmitů svírá 45° se siločivkami elektrického pole. Při vložení napětí se kapalina stává dvojlomou, takže složky E rovnoběžné a kolmé k siločarám mají různé indexy lomu, n_{\parallel} , n_{\perp} . Velikost jevu je úměrná čtverci elektrického pole, takže platí

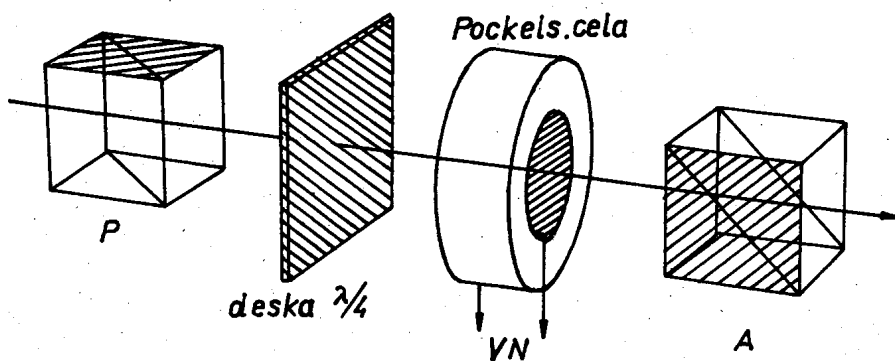
$$n_{\parallel} - n_{\perp} = K E_K^2 \lambda$$

kde K je Kerrova konstanta. Pro ilustraci, hodnota K pro nitrobenzen je $4,4 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot \text{V}^{-2}$, takže při poli $2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$ a vlnové délce $5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ činí rozdíl indexů lomu $8,8 \cdot 10^{-6}$. Při

délce dráhy mezi deskami 5 cm už vzniká rozdíl optických drah téměř rovný vlnové délce.

Jestliže uspořádáme Kerrovu celu mezi zkřížené polari-
zátory se silokřivkami pod úhlem 45° k polarizační rovině,
při vložení elektrického pole se zorné pole prosvětlí. Kerro-
va cela slouží jako elektrická uzávěrka. Poněvadž má velmi ma-
lou setrvačnost, lze vyrábět pomocí tohoto jevu světelné pulsy
s velmi strmou hranou (řádu 10^{-8} sec).

V dvojlomých krystalech může elektrické pole působit
změny indexů lomu. Vhodné krystaly jsou kyselý fosforečnan
amonný a draselný (ADP, KDP). Proti Kerrově cele má tento jev



(Pockelsův) vý-
hodu v tom, že
jím lze modulo-
vat mnohem šir-
ší svazek paprs-
ků, nežli v Ker-
rově cele. Elek-
trické pole zde
působí ve směru
průchodu světla
krystalem (obr.

Obr.3.15. Pokus s Pockelsovou celou

3.15). Pro větší citlivost se nechá krystalem procházet svět-
lo kruhově polarizované (pomocí čtvrtvlnové destičky) a kry-
stalový výbrus je uspořádán tak, aby z něj bez pole vycházelo
světlo lineárně polarizované s kmitosměrem rovnoběžným s P,
takže analyzátor světlo nepropouští. S polem se stane světlo
elipticky polarizované a může částečně analyzátozem projít.
Tohoto jevu, který je ještě o něho rychlejší než Kerrův, se
užívá dnes např. pro získání krátkých pulsů světelných v lase-
rech.

3.11. Optická aktivita

Jestliže bychom uspořádali pokus podle obr. 3.11 se skříženými polarizátory a s křemennou destičkou vybroušenou kolmo k optické ose, pak při použití monochromatického světla pozorujeme, že se pole prosvětlí. Otáčení destičky v její rovině nic nemění na intenzitě procházejícího světla. Zato po otočením analyzátoru buď doprava nebo doleva docílíme zhašení světla. Tento pokus ukazuje, že destička potočila rovinu polarizace o určitý úhel. Zjistili bychom, že 1) potočení je úměrné tloušťce destičky, 2) že existují dvě modifikace křemene, které se liší též vnějším tvarem krystalů a které otáčejí rovinu polarizace v opačném smyslu. (Mluvíme o pravotočnou (R) a levotočnou (L) modifikaci.) 3) že potočení roviny polarizace závisí na vlnové délce použitého světla.

Jevu otáčení polarizační roviny říkáme optická aktivita. Projevuje se nejen v krystalech (chlourečnan sodný, cukry a nejvýznačnější křemen), ale i v kapalinách, jako jsou především roztoky cukru a některých jiných organických sloučenin. Kromě toho lze optickou aktivitu uměle vyvolat v látkách jinak neaktivních (sklo, organické kapaliny) působením podélného magnetického pole (Faradayův jev).

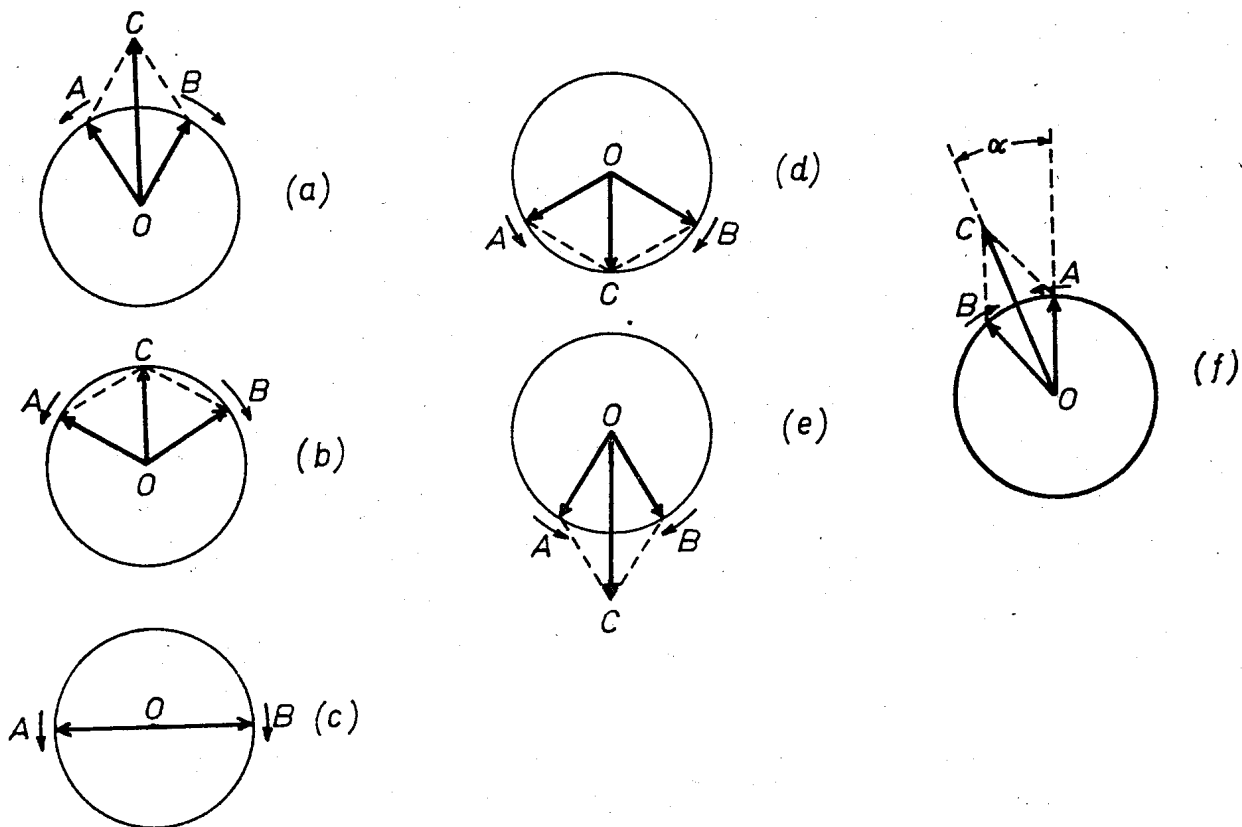
Vysvětlení jevu rotace polarizační roviny se zakládá na dvojlomu kruhově polarizovaného světla. V opticky aktivních látkách má struktura molekul nebo krystalové mříže v určitém směru symetrii šroubové osy, tj. otáčení spojeného s posunem ve směru osy a sice odpovídající buď pravotočnému, nebo levotočnému šroubu. To způsobuje, že kruhově polarizované vlny s opačnými smysly otáčení se šíří v takovém prostředí různými rychlostmi, čili též s různými vlnovými vektory k_R , k_L a indexy lomu n_R , n_L .

Nechť na čelní stěnu desky ($z = 0$) dopadá lineárně polarizovaná vlna s kmitosměrem podél osy x a směrem šíření podél osy z . V bodě $z = 0$ tedy máme

$$E_x = E_0 e^{-i \omega t}$$

$$E_y = 0$$
(3.27)

V destičce se rozkládá na dvě kruhově polarizované vlny s opačným směrem otáčení. (obr.3.16). Můžeme je popsat podle kap.1. takto:



Obr.3.16. (a) až (e) Liniární kmit jako superpozice dvou protiběžných kruhových kmitů. (f) Pootočení polarizační roviny při nestejných úhlových rychlostech kruhových kmitů

$$E_x^R = \frac{1}{2} E_0 e^{i(k_R z - \omega t)}$$

$$E_y^R = \frac{i}{2} E_0 e^{i(k_R z - \omega t)}$$

$$E_x^L = \frac{1}{2} E_0 e^{i(k_L z - \omega t)}$$

$$E_y^L = \frac{i}{2} E_0 e^{i(k_L z - \omega t)}$$
(3.28)

Snadno se přesvědčíme, že vlny (3.28) v bodě $z = 0$ se skládají na původní kmit (3.27). Faktor $e^{-i\omega t}$ lze dále vynechat.

Po proběhnutí dráhy d v destičce vystupují vlny do neaktivního isotropního prostředí a postupují v něm stejnou rychlostí. O druhu polarizace tedy rozhoduje výsledný kmit \vec{E} složený vlnami (3.28) v bodě $z = d$. Jeho x-ová složka je:

$$\begin{aligned} E_x &= E_x^R(d) + E_x^L(\alpha) \\ &= \frac{1}{2} E_0 (e^{ik_R d} + e^{ik_L d}) = \\ &= \frac{1}{2} E_0 e^{\frac{i}{2}(k_R+k_L)d} \left[e^{\frac{i}{2}(k_R-k_L)d} + e^{-\frac{i}{2}(k_R-k_L)d} \right] \end{aligned}$$

Zavedeme úhly

$$\alpha = \frac{1}{2}(k_R - k_L)d$$

$$\beta = \frac{1}{2}(k_R + k_L)d$$

takže x-ová složka nabývá s použitím Moivreovy věty jednoduchého tvaru

$$E_x = E_0 e^{i\beta} \cos \alpha \quad (3.29)$$

Zcela analogicky odvodíme pro y-ovou složku

$$E_y = E_0 e^{i\beta} \sin \alpha \quad (3.30)$$

Vidíme, že obě složky mají stejnou fázi (posunutou vůči původnímu kmitu o úhel β), takže se skládají dále ve vlnu lineárně polarizovanou. Mají však na rozdíl od (3.27) nestejně amplitudy $E_x \cos \alpha$, $E_0 \sin \alpha$. Jejich vektorovým součtem je zřejmě kmit o amplitudě E_0 pootočený vůči ose x o úhel α , což je úhel rotace polarizační roviny. Odvodili jsme, že tento úhel je úměrný tloušťce a "dvojglomu" kruhově polarizovaných vln

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(k_R - k_L)d \\ \alpha &= \frac{\pi}{\lambda_0} (n_R - n_L)d \end{aligned} \quad (3.31)$$

Zdůrazněme, že rozdíl mezi účinkem obyčejné desky z dvojlomého materiálu a křemenné desky kolmé k ose je v tom, že první vytváří z lineárně polarizovaného světla obecně světlo elipticky polarizované, druhá nemění typ polarizace, avšak otáčí polarizační rovinu.

Numerické hodnoty pro pravotočný křemen jsou v tab.

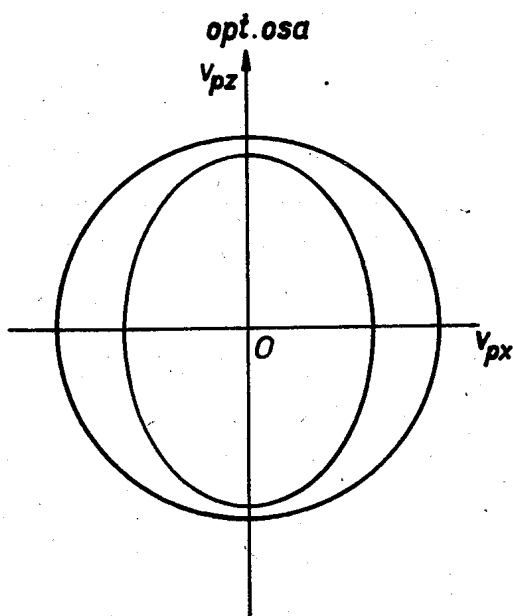
3.1.

Tabulka 3.1

λ_0 (nm)	n_R	n_L	$n_R - n_L$
396	1,55810	1,55821	0,00011
589	1,54420	1,54426	0,00007
760	1,53914	1,53920	0,00006

U levotočné modifikace jsou n_R a n_L zaměněny.

Optická aktivita se projevuje i na vlnoplochách. Pro opticky aktivní jednoosé krystaly není přesné to, co bylo řečeno o vlnoplochách v odst. 3.6. Vlnoplochy sférické a elipsoidní se totiž nedotýkají,



Obr.3.17. Vlnoplochy kladného, jednoosého, opticky aktivního krystalu

nýbrž jsou podél osy od sebe odděleny (obr.3.17). Podrobnější rozbor vede k tomu, že v opticky aktivním prostředí jsou charakteristické vlny elipticky polarizované, ve zvláštních směrech pak lineárně nebo kruhově polarizované.

Rovnice pro otočení polarizační roviny se píše ve tvaru

$$\alpha = \alpha_0 d$$

kde α_0 je měrná otáčivost ($^\circ/m$), která závisí na vlnové

délce podle přibližného zákona

$$\alpha_0 = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$$

U roztoků opticky aktivních látek je měrná otáčivost úměrná koncentraci c roztoku (platí pro nepřiliš vysoké koncentrace)

$$\alpha_0 = K \cdot c$$

Toho se v průmyslu a v lékařství užívá často, k měření koncentrace pomocí polarimetrů. Kyveta s měřenou látkou se vkládá mezi zkřížené polarizátory a pootočení α se zjišťuje otočením analyzátoru tak, že se najde minimum intensity. Měření se musí vzhledem k dispersi otáčivosti provádět buď v monochromatickém světle nebo se používá bílého světla a Soleilovy dvojdesky. Tento optický element je deska slepená ze dvou stejně tlustých hranolků pravotočného a levotočného křemene, jejichž tloušťka je volena tak, aby v obou polovinách zorného pole se otáčela rovina polarizace pro žlutozelené světlo ($\lambda = 550 \text{ nm}$) o $\pm 90^\circ$. Analyzátor je v tomto uspořádání nejprve bez vzorku orientován rovnoběžně s polarizátorem. Poněvadž však rovina kmitů se v desce otočí kolmo, neprojde právě žlutozelená část spektra a obě poloviny zorného pole jsou stejně zabarveny nachovou barvou, doplňkovou ke žlutozelené. Malé pootočení analyzátoru způsobuje změnu zabarvení v jedné části do červena, v druhé části do modra. Oko je na tuto změnu velmi citlivé a je proto možno určit nulovou polohu analyzátoru s větší přesností, než pouhým nastavením na minimum. Vzorek pootočí směr kmitů v celém zorném poli a k vyrovnání odstínů v obou polovinách je nutno pootočit analyzátozem o hledaný úhel.

Kromě látek přirozeně opticky aktivních je možno pozorovat otočení polarizační roviny i u látek neaktivních za působení magnetického pole rovnoběžného se směrem šíření světla. To je podstata Faradayova magnetooptického jevu. Měření pootočení α je úměrné magnetické indukci B a dráze d v prostředí:

$$\alpha = V B d$$

Konstanta úměrnosti se nazývá Verdetova. Pro flintové sklo čí-
ní hodnota Verdetovy konstanty v jednotkách úhlových minut na
teslu a metr asi $(3-5) \cdot 10^4$. Klasická teorie tohoto jevu vychá-
zí z pohybové rovnice vázaného elektronu, v níž se respektuje
jak elektrická tak i magnetická síla.

Přesná teorie magnetooptických jevů je kvantově mecha-
nická a její porovnání s experimenty je důležitou metodou stu-
dia elektronových stavů v pevných látkách.

4. INTERFERENCE SVĚTLA

4.1. Ohyb a interference

Až dosud jsme projednávali šíření světelných vln za podmínek, kdy vlnoplochy můžeme považovat za neomezené a souvislé. Jakmile se do cesty světlu postaví překážka, jako např. stínítko s otvorem malých rozměrů, dochází k omezení vlnoplochy a vlny se "ohýbají", tj. šíří se i do prostoru tzv. geometrického stínu a stanou se nehomogenní. Těmto jevům, kterým říkáme ohybové, bude věnována další kapitola. Chceme-li vybudovat alespoň jednoduchou a přibližnou teorii ohybových jevů, můžeme vyjít z Huygensova principu a počítat výsledek superposice elementárních vln procházejících z jisté prostorově omezené vlnoplochy. V tom případě uvažujeme nekonečně mnoho příspěvků od nekonečně malých elementů vln. Dříve však, než se pustíme do tohoto problému, bude užitečné probrat jednodušší případ, kdy se spolu skládají vlny jen konečného počtu, v docela nejjednodušším případě dvě. Přibližnou fyzikální realizací takového případu jsou jevy interference. Pro přehlednost je budeme dělit na jevy interference dvou a více svazků.

Rozdělení na jevy ohybu a interference má historický původ a hranice mezi nimi neexistuje. Tak např. na rozklad světla optickou mřížkou můžeme hledět buď jako na mnohonásobný jev ohybový, neboť mřížka rozděluje vlnoplochu na ekvidistantní proužky, nebo zjednodušeně jako na jev interference, jestliže neporušená místa mřížky považujeme za konečný počet lineárních zdrojů světla. Přesto však je účelné výklad rozdělit tak, že za jevy interference budeme pokládat ty, kdy půjde o skládání konečného počtu vln a za jevy ohybové ty, kdy půjde o omezení vlnoplochy otvory a stínítky konečných rozměrů a kdy se skládá nekonečně mnoho infinitesimálních příspěvků z neporušené části vlnoplochy.

4.2. Superposice a interference

Dříve než přistoupíme k popisu a analýze interferenčních jevů, zastavíme se u obecnější otázky, jakým způsobem se skládají světelné vlny. Vezměme pro jednoduchost dvě vlny stejné frekvence (např. příslušející jedné emisní spektrální čáře) lineárně polarizované. Vlny nechť přicházejí do pozorovacího bodu P tak, že rozruchy jimi v tomto bodě způsobené lze popsat rovnicemi

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{10} \exp i(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega t + \varphi_1) \quad (4.1)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} \exp i(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega t + \varphi_2) \quad (4.2)$$

Jestliže se jedná o vlnění ze dvou nezávislých zářičů (např. atomů), pak mezi φ_1 a φ_2 není žádná korelace (vzájemný pevný vztah). Emisní akty následují za sebou zcela nahodile a φ_1 a φ_2 se skokem mění, takže nabývají všech hodnot mezi 0 a 2π také zcela nahodile.

Okamžitá hodnota intenzity v bodě P je dána tím, že pro elektrická pole platí zákon lineární superposice, tj. výsledná intenzita je čtvercem součtu obou polí

$$I = |\vec{E}|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$$

V komplexním vyjádření je

$$|\vec{E}|^2 = (\vec{E})(\vec{E}^*) = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2)(\vec{E}_1^* + \vec{E}_2^*)$$

Je tedy

$$I = |\vec{E}_{10}|^2 + |\vec{E}_{20}|^2 + (\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20}) \left\{ \exp [i(\vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_1 - \vec{k}_2 \vec{r} - \varphi_2)] + \exp [-i(\vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_1 - \vec{k}_2 \vec{r} - \varphi_2)] \right\}$$

Zavedeme-li

$$\delta = \vec{k}_1 \vec{r} + \varphi_1 - (\vec{k}_2 \vec{r} + \varphi_2), \quad (4.3)$$

je

$$I = |\vec{E}_{10}|^2 + |\vec{E}_{20}|^2 + 2(\vec{E}_{10} \cdot \vec{E}_{20}) \cos \delta \quad (4.4)$$

Poslední člen v rov. (4.4) se nazývá interferenční, neboť je rozhodující pro jevy interference.

Detektory světla nebo oko nemohou sledovat periodické změny intenzity o kmitočtech řádu 10^{15} Hz a zaznamenávají jen průměrné hodnoty středované během jistého delšího časového intervalu τ , charakteristického pro ten který detektor. Pokud neexistuje korelace mezi fázemi φ_1 a φ_2 , nabývá $\cos \sigma$ rovnoměrně všech hodnot v intervalu $(-1, +1)$. Je tedy střední hodnota rovna nule a pro průměrnou intenzitu pak platí, že je součtem intenzit:

$$I = E_{10}^2 + E_{20}^2 = I_1 + I_2 \quad (4.5)$$

V tom případě mluvíme o skládání nekoherentních vln, o prosté superposici intenzit. Tento případ odpovídá starému zákonu optiky o nezávislosti paprsků.

Druhý krajní případ je takový, že rozdíl $\varphi_1 - \varphi_2$ je stálý. Takový případ nazýváme skládání koherentních vln a vede k jevům interference. To se dá např. realizovat tak, že původně jediná vlna pocházející z jediného emiteru se rozštěpí na dvě, jako se to děje při Youngově pokusu (§ 4.3) nebo při interferenci na tenké vrstvě (§ 4.4). Při pevném geometrickém uspořádání (tj. stále $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{r}$) je pak pro všechny jednotlivé emisní akty $\cos \sigma$ konstantní a průměrná intenzita je časově konstantní a je udána rovnicí (4.4). V závislosti na σ může se měnit podle rov. (4.4) v rozmezí hodnot hodnot $I = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2}$. Vzhledem ke členům tvaru $\vec{k} \cdot \vec{r}$ je zřejmé, že intenzita je prostorově periodická, vzniká intenzitně modulovaný interferenční obrazec.

Skutečné případy ovšem leží mezi oběma krajními, mluvíme pak o tzv. částečné koherenci. Podrobnější objasnění uvedeme v odst. 4.6 po výkladu základních interferenčních jevů.

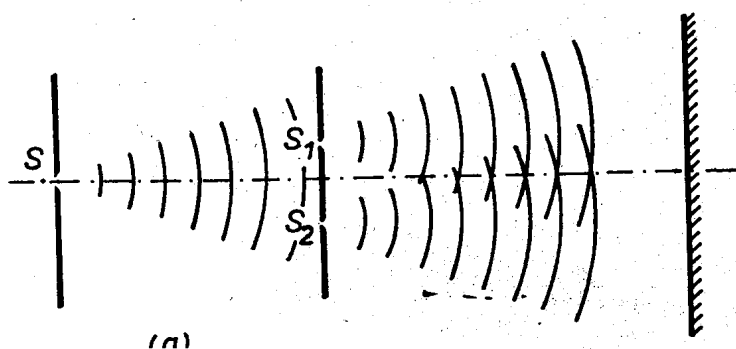
Pro usnadnění matematické formulace interferenčních jevů budeme v dalším předpokládat, že jde o vlny ideálně koherentní a přísně harmonické. Poněvadž výsledek interference

charakterizovaný rov. (4.4) až na konstantní faktor, nezávisí na směru polarizace obou vln, nebudeme nadále uvažovat vektorový charakter světelné vlny a budeme ji popisovat jedinou skalární veličinou E .

Na konec této úvodní části ještě jednu poznámku. Termín "interference" je vlastně nevhodný, neboť znamená "vzájemné ovlivnění". Ve skutečnosti však vycházíme z principu lineární superposice polí, což implikuje, že se vlny navzájem neovlivňují. S vědomím této výhrady však budeme termínu "interference" jakožto historicky vžitého nadále užívat.

4.3. Youngův pokus

Pokus, který v r. 1802 provedl a na základě interference vln vyložil Thomas Young, měl základní důležitost ve sporu mezi vlnovou a korpuskulární teorií světla. Jeho základní uspo-



Obr.4.1. Interference dvou svazků (Youngův pokus)

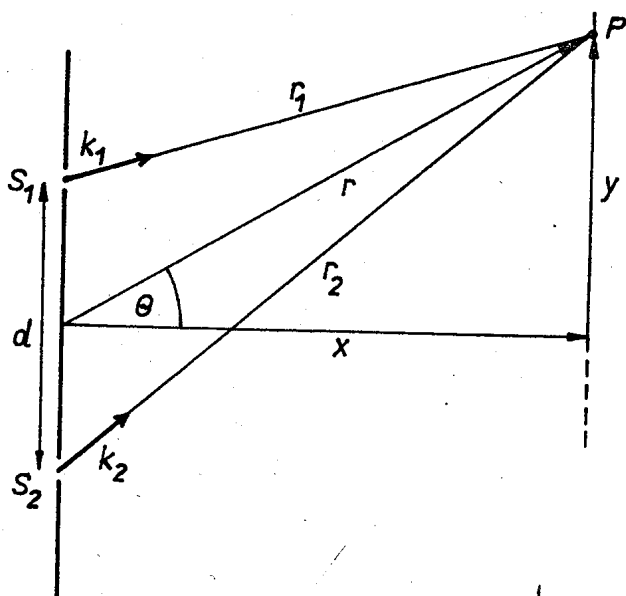
řádání je na obr. 4.1. Světlo z intenzivního zdroje necháme nejdříve projít malým kruhovým otvorem S_1 ("špendlíkovou dírkou") a svazek z něj vycházející pustíme na stínítko s dvěma obdobnými malými otvory S_1 S_2 v malé vzdálenos-

ti od sebe. Místo kruhových otvorů je praktičtější užít úzkých štěrbin navzájem rovnoběžných, které dají jev podstatně světelnější. Na vzdáleném stínítku pak pozorujeme výsledný jev. Omezíme se na jeho popis v rovině otvorů nebo v rovině kolmé ke štěrbinám. Na stínítku se objeví ekvidistantní tmavé a světlé proužky, kterých v případě monochromatického osvětlení je možno pozorovat značné množství, v případě bílého světla jsou již 2 či 3 proužky kolem středního bezbarvého maxima zabarveny a rychle se ztrácejí, jak se barvy přes sebe překládají.

Podle našeho rozdělení patří Youngův pokus ke skupině jevů interference dvou svazků.

Zjednodušený výklad se zakládá na Huygensově principu. Z první štěrbině S vychází vlny s válcovými vlnoplochami. Dvojštěrbina S_1S_2 vymezí z vlnoplochy dva úzké proužky, které představují lineární koherentní zdroje. Jestliže jsou štěrbiny S_1S_2 přesně stejně vzdáleny od S, kmitají tyto zdroje se stejnou fází a emitují vlny opět s válcovými vlnoplochami, které v dostatečně velké vzdálenosti můžeme považovat za rovinné.

Nás nyní zajímá, jakým způsobem se skládají tyto vlny na velmi vzdáleném stínítku. Naše zjednodušení spočívá v tom,



Obr.4.2. Geometrie k Youngově pokusu

$n = 1$). Časový faktor $e^{-i\omega t}$ vynecháváme.

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r}_1)} \\ E_2 &= E_0 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r}_2)} \end{aligned} \quad (4.6)$$

V těchto rovnicích jsme předpokládali, že obě štěrbiny jsou identické a jejich vyzařovací schopnost nezávisí na odklonu θ , takže amplitudy obou vln jsou stejné. To je při malých úhlech θ dost dobře splněno.

že zanedbáváme konečnou šířku štěrbin a považujeme je za ideální čarové zdroje (nebo bodové v případě špendlíkových dírek). To znamená, že zanedbáváme současný vliv ohybu. Přesnější teorii se započtením ohybu provedeme v následující kapitole.

Do bodu $P(x,y)$ dopadají obě vlny (obr.4.2) po proběhnutí rozdílných optických drah \vec{r}_1 , \vec{r}_2 (předpokládáme pokus ve vzduchu,

Je-li $x \gg d$, lze považovat vlnové vektory \vec{k}_1, \vec{k}_2 za rovnoběžné a fázový rozdíl obou vln v bodě P je pak

$$\varphi = \vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (4.7)$$

Poněvadž však je $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = d$, je

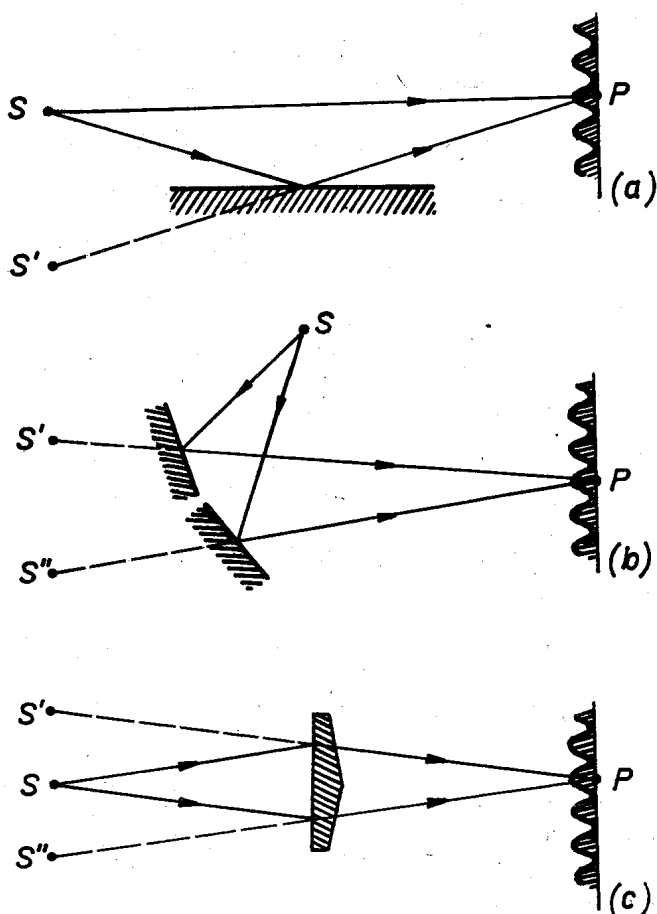
$$\begin{aligned} \varphi &= k d \sin \theta \\ &\doteq \frac{2\pi}{\lambda} d \frac{y}{x} \end{aligned}$$

Pozorovaná intenzita I v bodě P je tedy

$$I = |E|^2 = 2E_0^2 \left(1 + \cos \frac{2\pi dy}{\lambda x}\right) = 4E_0^2 \cos^2 \frac{\pi dy}{\lambda x} \quad (4.8)$$

Maxima leží ve vzdálenostech

$$y_N^{\max} = N \cdot \frac{\lambda x}{d} \text{ a je } I_{\max} = (2E_0)^2$$



Obr. 4.3. (a) Lloydův pokus, (b) Fresnelova zrcadla, (c) Fresnelův dvojhranol

Minima jsou nulová a leží ve vzdálenostech y_N^{\min} od osy x

$$y_N^{\min} = \left(N + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda x}{d}$$

Vzdálenost sousedních maxim nebo minim Δy nezáleží na N (ekvidistantní proužky)

$$\Delta y = y_{N+1} - y_N = \frac{\lambda x}{d}$$

Při použití bílého světla leží maxima červené části dále od středu než maxima modré části spektra, proužky jsou zabarveny.

Jiné metody, pro demonstraci interference dvou svazků v podstatě ekvivalentní Youngově pokusu, jsou na obr. 4.3. Jde ve

všech případech o vytvoření virtuálních obrazů skutečného zdroje (štěrbiny S), a to buď pomocí zrcadel (a) (b) nebo pomocí lomu na hranolech s malým lámavým úhlem (c).

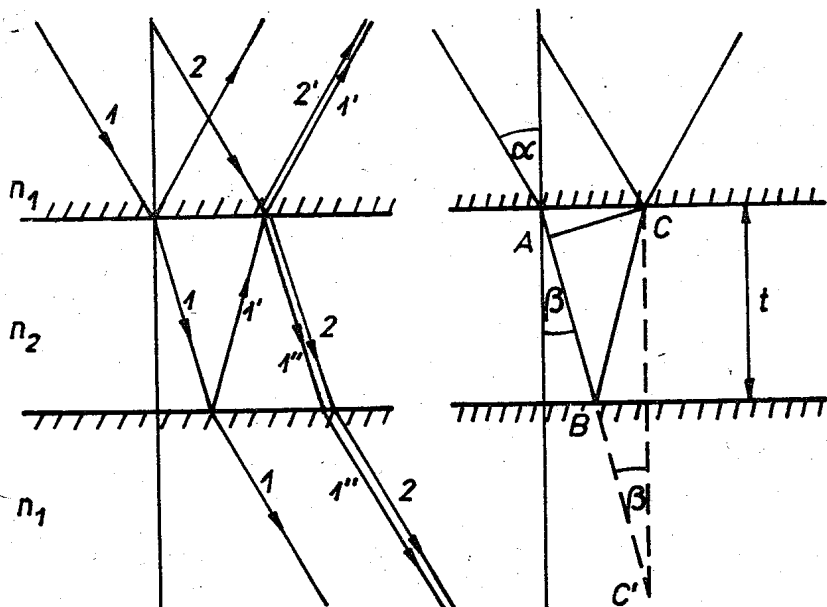
Z názoru je zřejmé, že interferenční obrazec se objeví na stínítku v libovolné vzdálenosti od dvouštěrbiny, není tedy lokalizován v prostoru a můžeme jej pozorovat též prostým okem, lupou nebo dalekohledem.

Někdy se též označuje Youngův pokus jakožto interference dvou svazků získaných rozštěpením (prostorovým) vlnoplochy. Jiný způsob získání dvou koherentních svazků z jediného je pomocí částečného odrazu, čili rozdělením amplitudy. Příklad na takové uspořádání je v dalším odstavci.

4.4. Interference dvou svazků na planparalelní vrstvě

Zabarvení, které pozorujeme v odraženém nebo i lomeném světle na tenkých vrstvách, jako např. na vrstvě oleje na vodě, na mýdlové bláně apod., má původ v interferenci. Interferují spolu paprsky odražené od horní a dolní stěny vrstvy a pokud není odrazivost rozhraní uměle zvýšena, jde v podstatě o interferenci jen dvou svazků.

Uvažme monochromatickou rovinnou vlnu dopadající na planparalelní vrstvu o indexu lomu n_2 obklopenou na obou stranách prostředím o indexu n_1 . Vezměme nyní paprsek 1, který se při dopadu na horní rozhraní částečně odráží a částečně láme (obr. 4.4). Po druhém odrazu na spodním rozhraní dopadá zpět na první a opět se částečně odráží a částečně lomí do 1. prostředí. Jiný paprsek č. 2, který dopadá do bodu C, se částečně odráží stejným směrem jako paprsek 1' a protože oba paprsky pocházejí ze stejné vlny, jsou koherentní a mohou interferovat. Výsledek interference závisí na jejich fázovém rozdílu a ten se skládá ze dvou příspěvků: jednak je dán rozdílem optických drah, jednak případnou změnou fáze při odrazu.



Z obr.4.4. snadno vypočteme rozdíl optických drah. Body A;C leží na téže vlnoploše, takže rozdíl geometrických drah je dán jako $\overline{AB} + \overline{BC}$. Označíme-li úhel lomu β a provedeme-li pomocnou konstrukci bodu

Obr.4.4. K interferenci na planparalelní vrstvě

C' jako zrcadlového obrazu bodu C vzhledem k spodnímu rozhraní, můžeme psát pro rozdíl optických drah

$$\Delta = (\overline{AB} + \overline{BC}) n_2$$

$$\Delta = (\overline{AB} + \overline{BC'}) n_2 = (\overline{AC'}) n_2$$

$$\Delta = 2n_2 t \cos \beta$$

Pokud je $n_1 < n_2$, nastává při odrazu na vrchní stěně změna fáze o $\pm \pi$, na spodní stěně se při odrazu fáze nezmění. To znamená, že paprsek 2' dozná ještě dodatečnou změnu fáze o $\pm \pi$, tedy jako by se rozdíl optických drah zvýšil o $\pm \frac{\lambda}{2}$.

$$\Delta' = 2 n_2 t \cos \beta \pm \frac{\lambda}{2} \quad (4.9)$$

Jestliže je $n_1 > n_2$, pak paprsek 1 utrpí dodatečnou změnu fáze o $\pm \pi$ na spodní stěně, paprsek 2' se odráží beze změny fáze. Je tedy dodatečný rozdíl optických drah v každém případě $\pm \frac{\lambda}{2}$.

Pro maxima tedy platí $\Delta' = N \lambda$, čili

$$2 n_2 t \cos \beta = (N \pm \frac{1}{2}) \lambda \quad (4.10)$$

a pro minima

$$\Delta' = (N \pm \frac{1}{2}) \lambda \quad (4.11)$$

$$2 n_2 t \cos \beta = N \lambda$$

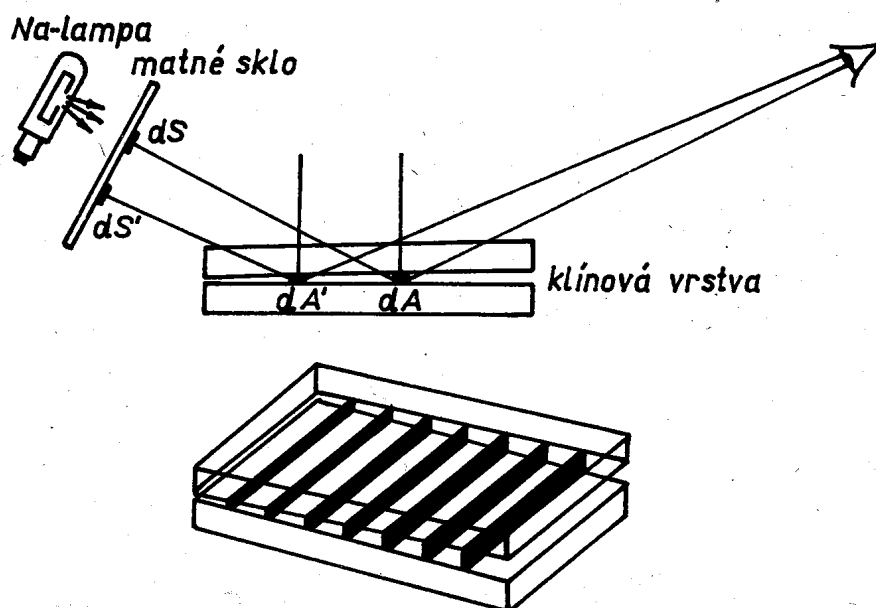
Čtenář si snadno odvodí, že ve světle prošlém vrstvou, kdy se uvažuje paprsek 2" jen dvakrát lomený a paprsek 1" dvakrát lomený a dvakrát odražený, rozdíl geometrických drah je stejný jako mezi paprsky 1' a 2' a poněvadž vždy dochází ke dvěma odrazům téhož druhu (uvnitř vrstvy), neuplatní se další změna fáze odrazem. Podmínky maxim a minim jsou navzájem prohozené, jevy v prošlém a odraženém světle jsou doplňkové (komplementární). To znamená, že při použití bílého světla jsou zabarvení příslušná jistému danému směru ve světle odraženém a procházejícím navzájem doplňková, opět složena dávají barvu bílou.

Mohla by vzniknout námitka, že se interference účastní ještě paprsky s různým počtem vnitřních odrazů (ve světle odraženém je to $1x$, $3x$, $5x$...). To je sice pravda, avšak pokud jde o čiré prostředí s nepřiliš vysokým indexem lomu, je rozdíl mezi intenzitami paprsků odražených jednou a třikrát už tak velký, že lze příspěvek vícenásobných odrazů zanedbat. Tak např. u skla při kolmém dopadu je $R \approx 0,04$; $R^3 \approx 6,4 \cdot 10^{-5}$ a tedy $I_3/I_1 \approx 10^{-3}$. Stačí tedy uvažovat jen dva svazky. Z téhož důvodu jsou jevy v odraženém světle kontrastnější než v lomeném, neboť intenzity 1' a 2' jsou přibližně stejné (při malé absorpci ve vrstvě), kdežto v propuštěném světle jsou velmi rozdílné (1 : 25 pro sklo). Pokud by se jev pozoroval buď při velkých úhlech dopadu, kdy odrazivost je velká, nebo když se vrstva opatří silně odrážející vrstvou kovu, uplatní se vícenásobné odrazy a vzniká interference více svazků, o níž pojednáme v dalším odstavci.

Jaké jsou podmínky pozorování interference na planparalelní vrstvě? Zde je účelné rozlišovat dva krajní případy, a sice tenké a tlusté vrstvy, čili případy, kdy N je číslo malé (např. do několika desítek) nebo velmi velké ($10^4 - 10^5$).

a) Interference na tenkých vrstvách: proužky stejné tloušťky

V běžných případech, jako je např. pozorování interference na vzduchové vrstvě mezi dvěma opticky vybroušenými skly,



Obr.4.5. Proužky stejné tloušťky

nejsou ohraničující plochy přesně rovinné nebo jsou vůči sobě mírně skloněny, takže tloušťka vrstvy se pomalu mění od místa k místu. V tom případě je nejlépe použít pro pozorování plošného monochromatického

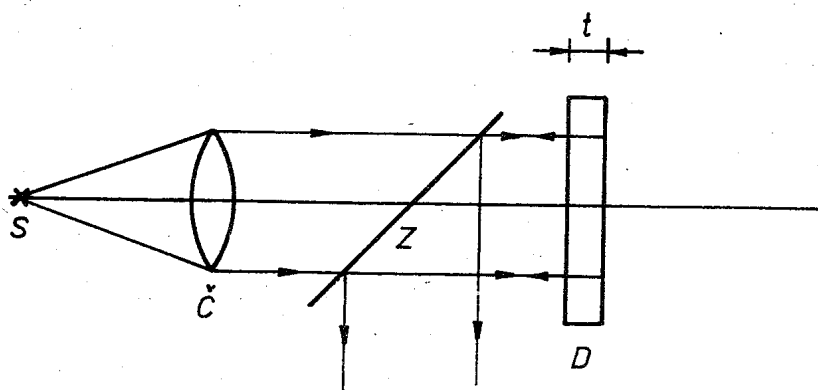
zdroje. Podle obr. 4.5 zornice oka vymezi v odraženém světle úzký svazek, který poměrně dobře definuje jistý úhel odrazu pro každý malý element vrstvy dA i plošného zdroje dS . V rozmezí šířky takto definovaného svazku se nemění podstatně ani t ani $\cos \beta$ a dráhový rozdíl podle (4.9) jednoznačně určuje zdánlivý jas odraženého světla. Jestliže se díváme z větší vzdálenosti, mění se úhel dopadu jen velmi málo a intenzita odraženého světla je určena lokální tloušťkou vrstvy. S okem zaostřeným na vrstvu vidíme tmavé a světlé proužky, které spojují místa stejné tloušťky. V klínovité vrstvě vidíme soustavu téměř ekvidistantních přímkových proužků rovnoběžných s hranou klínu. Jestliže je jeden z povrchů ohraničujících klínovou vrstvu nedokonale rovinný, projeví se to deformací proužků. Stejně tak tenká vrstva nanesená na část jednoho z povrchů poskytlá systém proužků podle své tloušťky t o vzdálenost rovnou $2t/\lambda$ - násobné meziproužkové vzdálenosti (nedochází-li při odrazu k dalším fázovým posuvům). Postup od jednoho tmavého proužku (Δ_1') ke druhému (Δ_2') znamená zvětšení rozdílu optických drah $\Delta_2' - \Delta_1' = \pm \lambda$ a při téměř kolmém dopadu ($\cos \beta \approx 1$) a ve vzduchu ($n = 1$) to znamená změnu tloušťky vrstvy o $\lambda/2$.

Proužky stejné tloušťky jsou tedy lokalizovány ve vrstvě, to znamená, že je můžeme pozorovat buď okem zaostřeným do ro-

viny vrstvy nebo lupou či mikroskopem, zdroj světla může být difuzní.

b) Interference na tlustých vrstvách: proužky stejného sklonu

Uspořádání základního pokusu je na obr. 4.6. Ze zdroje S monochromatického světla (nízkotlaká výbojka, laser) vybere-



Obr.4.6. Kroužky stejného sklonu (Haidingerovy)

polopropustným zrcadlem Z dopadá na planparalelní skleněnou desku D o tloušťce t . Tato deska musí být velmi přesně (na zlomky λ) vy-

broušena co do rovinnosti a planparalelity. Odražené světlo se vrací k zrcadlu Z, odráží stranou, odkud je pozorujeme okem nebo slabě zvětšujícím dalekohledem. V našem případě je t konstantní a mění se úhel β v malém rozmezí daném slabou divergencí svazku. Jestliže máme desku uspořádánu tak, aby do osy oka vstupoval paprsek procházející kolmo k desce D, pak např. pro všechny směry, které splňují podmínku $2nt \cos \beta = N\lambda$ nastává minimum. Příslušné paprsky leží na kuželi, vidíme tedy tmavý kruh. Analogicky vidíme světlý kruh při dráhovém rozdílu $(N + \frac{1}{2})\lambda$. Poněvadž N je velké číslo (např. pro $t = 5 \text{ mm}$, $\beta = 0$, $n = 1,5$, $\lambda = 500 \text{ nm}$ je $N \approx 3 \cdot 10^4$), i velmi malé změně úhlu dopadu odpovídá velká změna dráhového rozdílu a je možno pozorovat interferenční obrazec jen v téměř rovnoběžných svazcích. Jisté intenzitě odpovídá jistý sklon rovnoběžných paprsků, a proto se vzniklé proužky nazývají stejného sklonu. Obrazec je lokalizován v nekonečnu. Jestliže bychom desku pookočili, bude střed interferenčních kroužků mimo zorné pole a jejich viditelné části se nám jeví jakožto rovnoběžné tmavé a světlé proužky, téměř přímkové.

Jaká je vzdálenost sousedních proužků? uvažme, že úhel dopadu je velmi malý, takže přibližně platí

$$\alpha \doteq n \beta ; \cos \beta \doteq 1 - \frac{1}{2} \beta^2 = 1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} ,$$

pak je podmínka pro minimum

$$2n t \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2}\right) = N \lambda \quad (4.12)$$

Úhlový rozestup $\Delta \alpha_N$ mezi minimy řádu N a $N + \Delta N$ pro proužky nepřilíš blízké ke středu obrazce dostaneme diferencováním rov. (4.12) při $\lambda = \text{konst}$

$$\Delta \alpha_N = - \frac{n}{2\alpha} \frac{\lambda}{t} \Delta N$$

Jestliže zvolíme $\Delta N = -1$, dostaneme úhlový odstup sousedních minim

$$\Delta \alpha_N = \frac{n}{2\alpha} \frac{\lambda}{t} \quad (4.13)$$

je vidět, že vzdálenost proužků se zmenšuje se vzdáleností od středu obrazce (tj. s klesajícím N) a pro poloměry kroužků platí, že stoupají přibližně jako posloupnost odmocnin z přirozených čísel, \sqrt{K} , jak se dá z rov. (4.12) odvodit.

Nyní nám také vysvitne, proč je požadavek monochromatickosti velmi kritický. Jestliže bychom použili k osvětlení spektrální čáry o střední vlnové délce λ a pološířce $\Delta \lambda$, pak je zřejmé, že nemá-li vymizet interferenční jev, musí být úhlové posunutí $\Delta \alpha_\lambda$ interferenčního obrazce (kroužky, proužky) pro okraj linie $\lambda \pm \Delta \lambda$ značně menší než rozestup proužků pro λ daný rov. (4.13). Z rov. (4.12) máme diferenciací pro $N = \text{konst}$

$$|\Delta \alpha_\lambda| = \frac{N n}{2\alpha t} \Delta \lambda$$

a má platit $|\Delta \alpha_\lambda| = |\Delta \alpha_N|$, kde $\Delta \alpha_N$ je dáno rov. (4.13). Porovnáním dostaneme

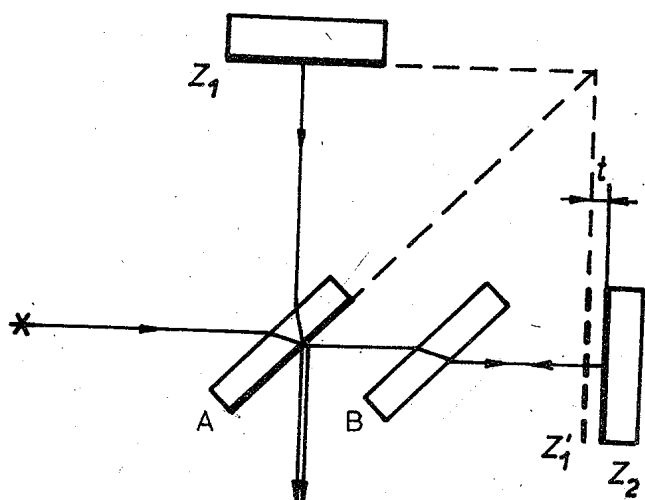
$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda} < \frac{1}{N}$$

Pro prve zmíněnou desku $t = 5 \cdot 10^{-3}$ m, $n = 1,5$ a $\lambda = 500$ nm je přípustná pološířka linie $\Delta\lambda < 0,017$ nm. Tomu vyhovují jen jednoduché spektrální linie zdrojů při nízkých tlacích a teplotách.

Stejně tak kritické je dodržení přesně stejné tloušťky t na zlomek vlnové délky v rozmezí pozorovacího zorného pole, neboť interference se účastní poměrně široké svazky rovnoběžných paprsků. Nerovnosti povrchu způsobují rozmazání celého obrazce, nikoli lokální posuny proužků jako v případě tenkých vrstev. Pro kontrolu rovnosti povrchů se tlusté vrstvy proto nehodí.

4.5. Michelsonův interferometr

Jeden z nejběžnějších a všestranně použitelných interferenčních přístrojů je Michelsonův interferometr, jehož schema je na obr. 4.7. Světlo z plošného zdroje S dopadá na polopropustné zrcátko A a štěpí se na dva navzájem kolmé svazky: Jeden z nich se odráží na zrcadle Z_1 a druhý s dvojnásobným průchodem kompenzační deskou B na zrcadle Z_2 . Kompenzační deska B o stejné tloušťce jako A slouží k tomu, aby kompenzovala rozdíl optických drah obou svazků, který by vzniknul dvojnásobným průchodem



prvního svazku deskou A. Pokud by byly roviny zrcadel Z_1 a Z_2 symetrické vůči odrazové rovině zrcadla A, pak jsou optické dráhy středního paprsku přesně stejné. Jedno ze zrcadel, např. Z_1 , je však posuvné pomocí přesného mikrometrického šroubu,

Obr.4.7. Michelsonův interferometr

prvního svazku deskou A. Pokud by byly roviny zrcadel Z_1 a Z_2 symetrické vůči odrazové rovině zrcadla A, pak jsou optické dráhy středního paprsku přesně stejné. Jedno ze zrcadel, např. Z_1 , je však posuvné pomocí přesného mikrometrického šroubu,

takže např. se dá vytvořit situace naznačená na obr. 4.7, kdy mezi virtuálním obrazem Z_1' a zrcadlem Z_2 vzniká planoparalelní vrstva. Obraz, který pozorujeme, odpovídá interferenci na této vrstvě a může být buď typu proužků stejné tloušťky (při nepatrném naklonění jednoho ze zrcátek a velmi malé vzdálenosti $Z_1'Z_2$ nebo typu stejného sklonu (při přesné rovnoběžnosti $Z_1'Z_2$ a větší vzdálenosti). Použijeme-li bílého světla, objeví se interferenční obrazec jen tehdy, jestliže buď $t = 0$ nebo roviny Z_1' a Z_2 se protínají. Pak se na příslušném místě (proužky lokalizovány ve vrstvě Z_1' a Z_2) objeví několik málo temných a světlých proužků, rozmazaných dále překrýváním barev.

Měření pomocí Michelsonova interferometru se obvykle provádí tak, že se seřídí na proužky stejného sklonu, které se pozorují dalekohledem s vláknovým křížem. Pomocí měřitelného posunu jednoho ze zrcátek se nechají proužky postupovat zorným polem a počítá se počet kroužků prošlých vláknovým křížem. Každému průchodu odpovídá změna optické dráhy o $\lambda/2$. Z posunu proužků po vložení vzorku (jako je např. tenká vrstva, květa s plynem) do jednoho ze svazků lze usuzovat buď na tloušťku vzorku, nebo známe-li tloušťku, na index lomu.

4.6. Časová a prostorová koherence; viditelnost interferenčních jevů

Při projednávání interference jsme předpokládali, že interferující svazky jsou dokonale koherentní, tj. jejich kmity jsou přesně harmonické a tedy časově neomezené a s konstantními relativními fázemi. Skutečné svazky se od tohoto ideálu odchyľují v několika směrech.

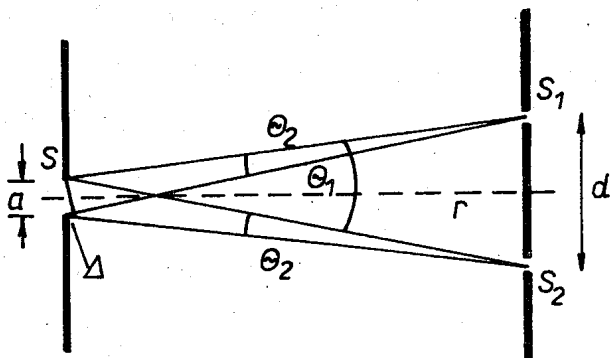
1) Světlo je atomárními a molekulárními zářiči emitováno v individuálních emisních aktech omezeného trvání. Typická průměrná doba emise je $\tau_0 \approx 10^{-9}$ sec. To už samo o sobě znamená, že průběh kmitů nemůže být harmonický a dá se vyjád-

řit spojitým spektrem harmonických kmitů s těžištěm spektra ve vlastní frekvenci emiteru ω_0 s pološířkou spektra zhruba $\Delta\omega = 2\pi/\tau_0$, což označujeme jako vlastní šířku spektrální čáry. Vyjádřeno ve vlnových délkách bývá vlastní šířka kolem 0,1 nm ve výbojích za běžných podmínek. Tlakem a vysokou teplotou se může tato šířka čáry ještě řádově zvětšit. Je zřejmé, že jevy interference můžeme pozorovat jen tehdy, když spolu interferují vlny rozštěpené z původního jediného atomárního zdroje, jestliže se navzájem nezpzdí o více než o τ_0 . Mluvíme v tom případě o časové koherenci. Jinak lze tuto podmínku vyjádřit tak, že rozdíl optických drah nesmí být větší nežli je délka skupiny vln l vyslané jedním emisním aktem, tedy ve volném prostoru $l = \tau_0 c$. Zavádíme tak pojem koherentní délky l . Pro uvedený příklad $\tau_0 = 10^{-9}$ je $l = 30$ cm. Jestliže bychom např. pozorovali interferenci na Michelsonově interferometru a posunuli pohyblivé zrcadlo asi tak o 10 cm, dostáváme dráhový rozdíl 20 cm, a to už by se projevilo prakticky vymizením proužků.

S použitím laseru, kde koherentní doba může být řádu 1 až 100 μs , by byla koherentní délka $3 \cdot 10^2$ až $3 \cdot 10^4$ m, viditelnost proužků tedy není omezena koherentní délkou, nýbrž jinými vlivy, jako je nedokonalost optických ploch apod.

2) Reálné zdroje světelné mají konečné geometrické rozměry, tzn. že vlnoplochy vysílané jednotlivými atomy nejsou geometricky totožné a interferenční jevy pocházející od jednotlivých emiterů nedávají totožné prostorové rozdělení intenzity v interferenčním obrazci, zdroje nejsou prostorově koherentní.

Tuto okolnost si blíže objasníme na analýze Youngova pokusu. Předpokládejme, že štěrbin S představující primární zdroj je konečné šířky a (obr. 4.8), zatímco štěrbin S_1 a S_2 jsou ideálně přímkové. Za předpokladu $d \ll r$ je zorný úhel, pod nímž se z místa S jeví vzdálenost štěrbin S_1, S_2 , je $\theta_1 = d/r$. Při symetrickém uspořádání jsou zorné úhly, pod nimiž se jeví šířka štěrbin S z míst S_1 a S_2 , stejné a



Obr.4.8.K viditelnosti proužků při Youngově pokusu

ni dvě jsou zakresleny na obr. 4.16. Do každé ze štěrbin S_1 , S_2 tedy dochází vlnění s různými fázemi, které se navzájem liší až o $k\Delta$, kde

$$\Delta \doteq a \theta_{1/2} \doteq a \frac{d}{2r}$$

Jestliže mají být Youngovy proužky viditelné, musí být fázový rozdíl libovolných dvou elementárních vln v obou štěrbinách menší než π a rozdíl optických drah menší než $\lambda/2$. Při rozdílu λ totiž přísluší okrajům štěrbin S pozice proužků posunutá o $\pm \frac{1}{2}$ meziproužkové vzdálenosti vůči systému proužků střední části štěrbin S, což znamená, že maxima spadají do minim druhého systému, kontrast se snižuje, proužky se stávají nezřetelné. Podmínka viditelnosti proužků, též podmínka prostorové koherence pro tento případ, se dá vyjádřit jako

$$a \frac{d}{r} < \lambda \quad \text{nebo} \quad \theta_2 < \frac{\lambda}{d}$$

Je vidět, že má-li být zdroj považován za koherentní, nezáleží na absolutní velikosti zdroje, nýbrž na poměru jeho velikosti ke vzdálenosti. Proto třeba stálíce s jejich ohromnými rozměry můžeme považovat za koherentní zdroje, pokud bychom užívali interferenční strukturu rozměrů $d \sim \text{lm}$ nebo menší.

Vzniká tedy otázka, proč vůbec pozorujeme interferenční jevy s reálnými, nekoherentními primárními zdroji? Důvod tkví v tom, že při zachování podmínek prostorové koherence inter-

označíme je $\theta_2 = a/r$. Kdyby byla štěrba S ideálně úzká, ležely by štěrby S_1 a S_2 na téže válcové vlnoploše a představovaly tak dokonale koherentní zdroje se stejnou fází. Ve skutečnosti do nich přicházejí vlnoplochy z různých míst štěrby S po různých optických drahách, z nichž kraj-

ferenční obrazce od jednotlivých svítících atomů jsou ve stejné poloze nebo tak málo navzájem posunuty, že oblasti maxim a minim jsou dostatečně přesně vymezené. Pak interferenční obrazce pocházející od jednotlivých emisních aktů se v každém bodě interferenčního obrazce časově středuji prostou supraposicí a pozorovaný obrazec je prostým součtem totožných rozdělení intensity.

Přesná teorie interferenčních jevů s nedokonale koherentním světlem je značně komplikované, avšak nabývá dnes důležitosti vzhledem k upřesnění teorie optického zobrazování a ke stále vzrůstajícímu uplatnění koherentních zdrojů světla.

4.7. Interference více svazků při štěpení vlnoplochy

Větší počet interferujících svazků stejné nebo srovnatelné intensity můžeme opět dostat dvojnásobkem, tj.

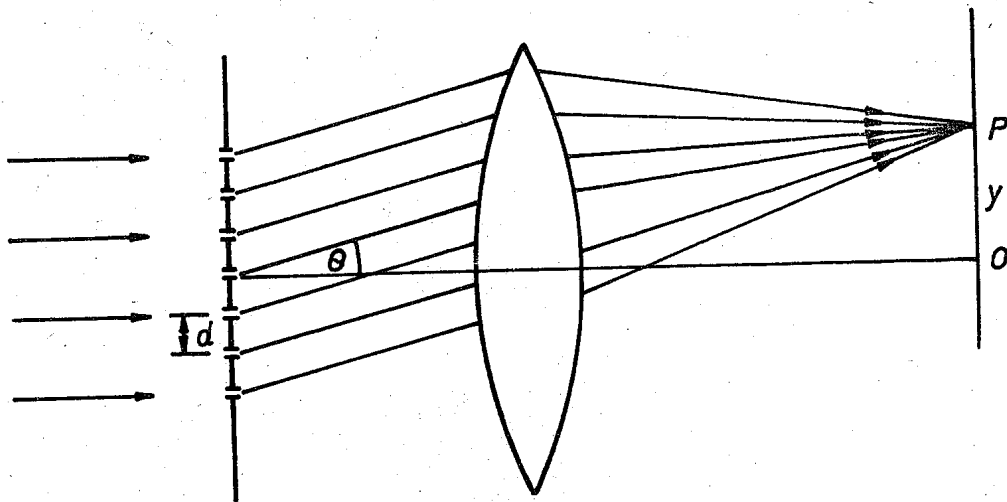
a) rozštěpením vlnoplochy, b) rozštěpením amplitudy.

První případ se dá realizovat pomocí soustavy ekvidistantních rovnoběžných štěrbin, druhý pomocí planparalelní vrstvy s vysokým koeficientem odrazivosti na obou rozhraních.

a) Soustava štěrbin

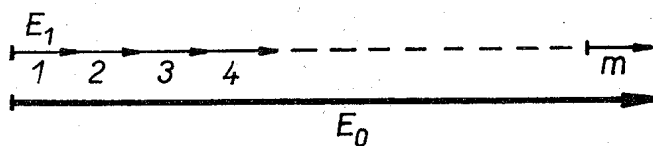
Tento případ je rozšířením Youngova pokusu a v tomto odstavci budeme zanedbávat vlastní šířku štěrbin, takže je budeme považovat za ideální přímkové koherentní zdroje.

Užijme obvyklé uspořádání jako v Youngově pokusu, jenže stínítko obsahuje m ekvidistantních štěrbin, kde d je vzdálenost dvou sousedních štěrbin (obr. 4.9). Při velkém počtu štěrbin pak dostáváme optickou mřížku. Pro $m = 2$ se případ redukuje na Youngův pokus. Štěrbiny osvětlujeme kolmo k rovině stínítka koherentním rovnoběžným svazkem. Pomocí čočky promítneme interferenční obraz tvořený rovnoběžnými svazky do ohniskové roviny. Na stínítku dostaneme, jak se dá očekávat, systém světlých a tmavých proužků různé intensity. Na-

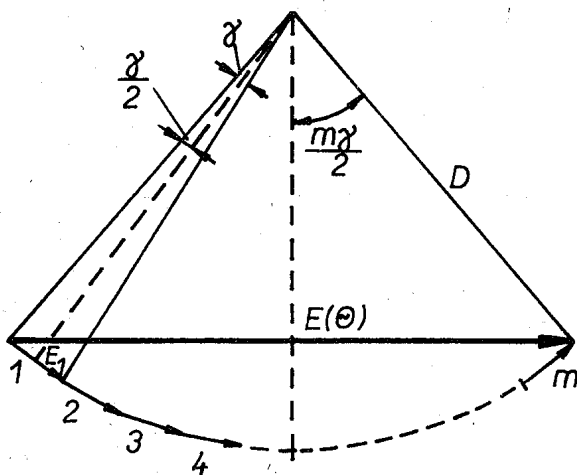


Obr.4.9. Interference na soustavě ekvidistantních štěrbin

šim cílem je najít výraz pro intenzitu v závislosti na úhlu odklonu θ od přímého směru. Při ohniskové vzdálenosti f čočky a malých úhlech θ platí přibližně $\theta = y/f$, kdy y je vzdálenost bodu na stínítku měřená od středního paprsku.



(a)



(b)

Velmi snadno a názorně se dá odvození provést pomocí fázorového diagramu. Nejprve pro přímý svazek ($\theta = 0$) platí, že paprsky ze všech štěrbin mají stejnou fázi a přispívají stejnými příspěvky E_1 k výsledné amplitudě E_0 ; $E_0 = mE_1$. Příslušný fázorový dia-

Obr.4.10. Fázorové diagramy k interferenci více svazků; (a) $\theta = 0$, (b) $\theta \neq 0$

gram je na obr. 4.10a.

Pro $\theta \neq 0$ mají dva sousední svazky dráhový rozdíl $d \sin \theta$ (předpokládáme $n = 1$) a fázový rozdíl μ ,

$$\mu = k d \sin \theta \quad (4.14)$$

Výslednou amplitudu ve směru θ dostaneme jako vektorový součet m fázorů navzájem pootočených vždy o úhel μ a stejně dlouhých. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že příspěvky k amplitudě od jednotlivých štěrbin jsou stejné jako v případě $\theta = 0$, tj. vesměs rovny E_1 . Z obr.4.10b plyne pro amplitudu E

$$E = 2D \sin \frac{m\mu}{2} \quad (4.15)$$

kde D je pomocná veličina, poloměr roztečné kružnice fázorového diagramu. Veličinu D můžeme vyloučit pomocí vztahu (viz obr.4.9b)

$$E_1 = 2 \cdot D \sin \frac{\mu}{2} = \frac{E_0}{m}$$

Je tedy výsledná amplituda

$$E = E_0 \frac{\sin \frac{m\mu}{2}}{m \sin \frac{\mu}{2}} \quad (4.16)$$

a výsledná intenzita čili čtverec amplitudy

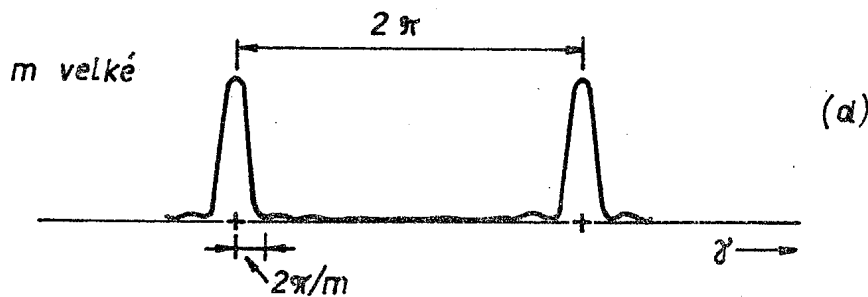
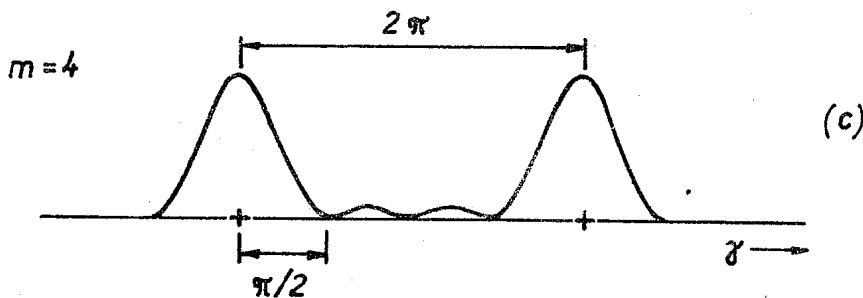
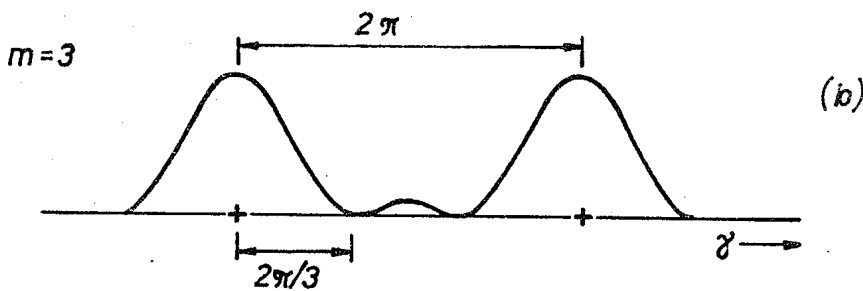
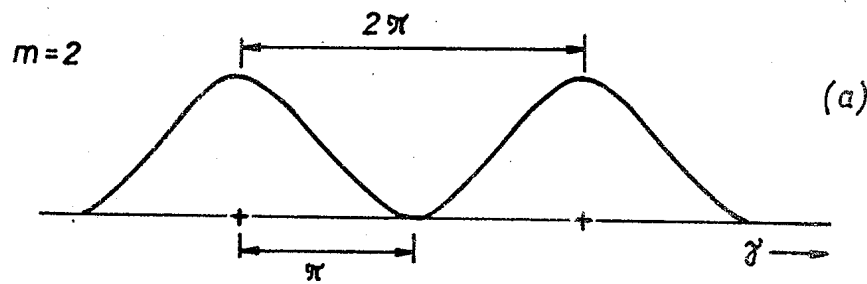
$$I = I_0 \frac{\sin^2 \frac{m\mu}{2}}{m^2 \sin^2 \frac{\mu}{2}} \quad (4.17)$$

Průběh této funkce pro $m = 2, 3, 4$ je na obr. 4.11, z něž je také patrné, jakou má tendenci pro vzrůstající m . Celkový charakter je takový, že se opakují význačná maxima (hlavní), pro něž snadno z rov. (4.11) nebo z fázorového diagramu odvodíme podmínku

$$\frac{\mu}{2} = N\pi$$

Platí např.

$$\lim_{\frac{\mu}{2} \rightarrow N\pi} \frac{\sin^2 \frac{m\mu}{2}}{\sin^2 \frac{\mu}{2}} = m^2$$



Obr. 4.11. Průběh intenzity interferenčních proužků při různém počtu štěrbin

avšak s podmínkou

$$M \neq p m$$

$$(4.20)$$

kde p je celé číslo, neboť v tom případě platí podmínka hlavního maxima (4.16). Mezi dvěma hlavními maximy podle rov. (4.16) pro $N, N+1$ leží $m-1$ minim. Z toho ovšem plyne, že

a tedy

$$I_{\max} = I_0$$

pro

$$d \sin \theta_{\max} = N \lambda$$

$$(4.18)$$

To je známá rovnice mřížky, která platí nezávisle na počtu štěrbin m . Fázorový diagram v tom případě ($\gamma = N \cdot 2\pi$) odpovídá obr. 4.10a. Minima jsou vesměs nulová a zřejmě jim odpovídají uzavřené m -úhelníky fázorového diagramu, tj. $m\gamma = 2\pi M$, kde M je celé číslo, čili

$$m d \sin \theta_{\min} = M \lambda$$

$$(4.19)$$

mezi minimy musí ležet lokální maxima funkce I , v počtu $m - 2$. Jak se dá ukázat, odpovídají přibližně podmínce

$$m d \sin \theta_{\max} = (M + \frac{1}{2}) \lambda \quad (4.21)$$

(pro $m \gg 1$)

Výška maxim I'_{\max} se dá potom z rov. (4.11) vypočítat. Pro první tři vedlejší maxima po stranách hlavního (I_{\max}) platí pro poměr intenzit I'_{\max}/I_{\max} , že klesá podle posloupnosti $(2/3\pi)^2$, $(2/5\pi)^2$, $(2/7\pi)^2$, což činí přibližně 4,5 %; 1,6 %; 0,08 % intenzity hlavního maxima.

Pro $m = 2$ dostáváme

$$\begin{aligned} I &= I_0 \frac{\sin^2 \mu}{4 \sin^2 \frac{\mu}{2}} = I_0 \cos^2 \frac{\mu}{2} \\ &= I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta \right) \end{aligned}$$

tedy výraz shodný s (4.8) pro Youngův pokus. Se stoupajícím počtem štěrbin m se šířka hlavních maxim zmenšuje. Šířka hlavního maxima je určena vzdáleností mezi nejbližšími minimy, průběh intenzity se blíží průběhu σ -funkce. Můžeme ji vypočítat v úhlové míře pro maximum nulového řádu ($N = 0$) takto: Podmínka prvních minim vpravo a vlevo od nulového maxima je

$$\mu_0 = \pm \frac{2\pi}{m}$$

$$k d \sin \Delta \theta = \pm \frac{2\pi}{m}$$

Pro velké m (což je případ optické mřížky) je přibližně

$$\Delta \theta = \pm \frac{\lambda}{m d}$$

Za pološířku maxima se bere úhel $\Delta \theta$, takže

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{L}$$

kde $L = m d$ je celková šířka mřížky.

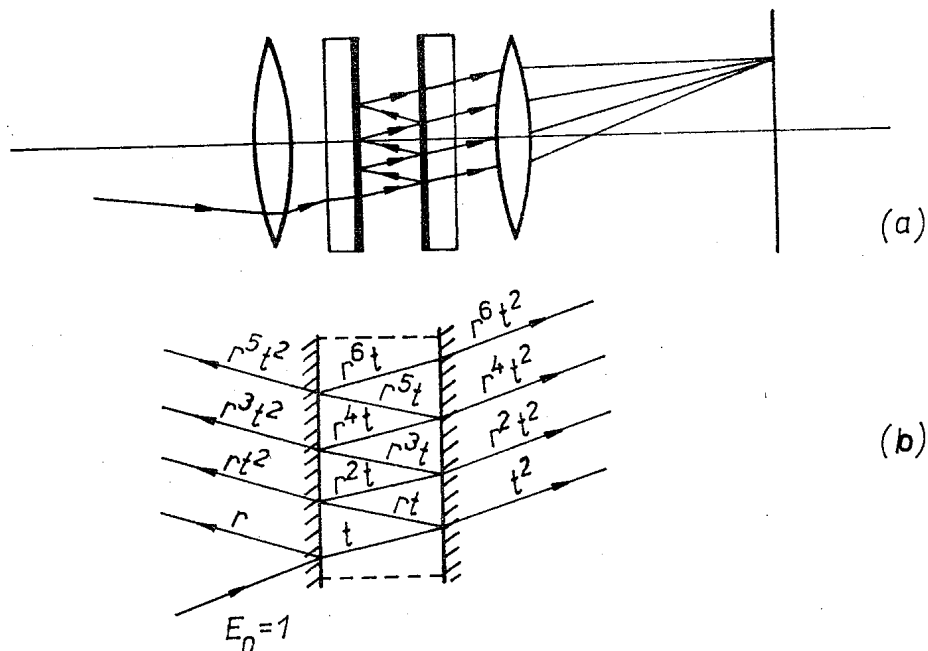
Docházíme zde k velmi důležitému poznatku o rozdílu mezi interferenčním obrazem při interferenci dvou a mnoha svaz-

ků: V prvním případě se mění intenzita zhruba podle funkce $\cos^2 x$, proužky jsou široké a neostré. V druhém případě (při velkém m) jsou sice světlé proužky na stejném místě jako prve, neboť podmínky polohy hlavních maxim jsou stejné (rov. (4.12)), avšak světlé proužky jsou úzké a mezi nimi je prakticky široký tmavý pruh, neboť vedlejší maxima mají zanedbatelnou intenzitu (obr. 4.11d). Uvidíme, že kvalitativně podobný průběh intenzity je i u interference mnoha svazků při štěpení amplitudy

4.8. Interference více svazků při štěpení amplitudy

V této kapitole projednáme především teorii Fabryho-Perotova etalonu a Lummerovy-Gehrckeovy desky. V obou případech se jedná v principu o interferenci na tlusté planparalelní vrstvě, kterou jsme probrali v kap. 4.3 s tím rozdílem, že uvažujeme příspěvky k interferenci od vícenásobně odražených paprsků v důsledku zvýšené odrazivosti na povrchu vrstvy.

Základní uspořádání u Fabryho-Perotova etalonu a interferometru je na obr. 4.12. Rovnoběžný monochromatický svazek



Obr.4.12. Fabryův-Perotův interferometr a etalon
(a) schematické uspořádání, (b) amplitudy svazků

paprsků (např. mezi hranolem a dalekohledem spektroskopu) dopadá téměř kolmo na soustavu dvou skleněných desek, které mají k sobě přivrácené povrchy velmi přesně rovinné a navzájem rovnoběžné ve vzdálenosti několika mm až několika cm. Tyto povrchy jsou pokryty kovovou odrazivou vrstvou s vysokým koeficientem odrazivosti ($R > 90 \%$) a s malou vlastní absorpcí. Desky se někdy vybrušují mírně klínovité ($\sim 1^\circ$), aby při pozorování nerušila případně interference na vrstvě skla. U etalonu je vzdálenost mezi deskami pevná a určena vhodnou distanční vložkou z křemenné trubky (aby se co nejméně měnila s teplotou). U interferometru je jedno ze zrcadel pohyblivé, ve směru kolmo k ploše zrcadla, pomocí mikrometrického šroubu.

Poněvadž zde amplitudy interferujících svazků už nemůžeme považovat za stejné, není užití fázorového diagramu účelné a provedeme proto odvození početně:

Uvažme nejdříve interferenci v prošlém světle. Budiž koeficient odrazu pro amplitudu r a koeficient propustnosti t stejný pro obě vrstvy. Budeme zde zanedbávat odrazy na nepokovených stěnách, neboť jejich příspěvek k celkové intenzitě je zanedbatelný a nedávají koherentní svazky schopné interference.

První paprsek dopadá na odrazovou vrstvu s amplitudou E_0 a částečně se odráží s amplitudou rE_0 a částečně prochází s amplitudou tE_0 , odráží se částečně na spodní vrstvě s amplitudou trE_0 a prochází vpřed s amplitudou t^2E_0 . Další svazek dozná druhý odraz s amplitudou tr^2E_0 a vychází s amplitudou $t^2r^2E_0$ atd. Přitom každé dva sousední svazky mají fázový rozdíl

$$\varphi = 2 t k \cos \beta \quad (n = 1)$$

Vytvoří se kroužky nebo proužky stejného sklonu podle toho, je-li vrstva orientována přesně kolmo nebo mírně skloněna k dopadajícímu svazku. Obvykle i v případě kroužků vidíme v zorném poli spektroskopu jen jejich části, kterými je modulován obraz spektrální čáry monochromatického zdroje.

S respektováním amplitudy a fáze dostaneme výslednou amplitudu sečtením všech příspěvků paprsků $0 \dots n$.

$$E = E_0(t^2 + t^2 r^2 e^{i\varphi} + t^2 r^4 e^{i2\varphi} + \dots + t^2 r^{2m} e^{im\varphi}) \quad (4.22)$$

To je však geometrická řada o kvocientu $r^2 e^{i\varphi}$, kterou dovedeme sečíst. Obyčejně se předpokládá, že m je velmi velké, takže

$$E = \frac{E_0 t^2}{1 - r^2 e^{i\varphi}}$$

Nás zajímá především intenzita daná výrazem $E \cdot E^*$

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1 - R e^{i\varphi})(1 - R e^{-i\varphi})}$$

kde jsme zavedli $E_0^2 = I_0$, $r^2 = R$ a $t^2 = T$. (Přesně vzato, odrazivost kovové vrstvy je komplexní a podobně u odrazu na rozhraní dielektrik může dojít k další změně fáze, takže by mělo být $r r^* = R$; $t t^* = R$.) Použitím Moivreovy poučky

$$I = I_0 \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \varphi}$$

a po malé úpravě

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (4.23)$$

Pokud je v samé kovové vrstvě nízká absorpce (což je možné docílit ve velmi čistých kovech), je součet propuštěné a odražené intenzity roven jedné, tj.

$$I_R + I_T = I_0$$

a odtud

$$R + T = 1 \quad (4.24)$$

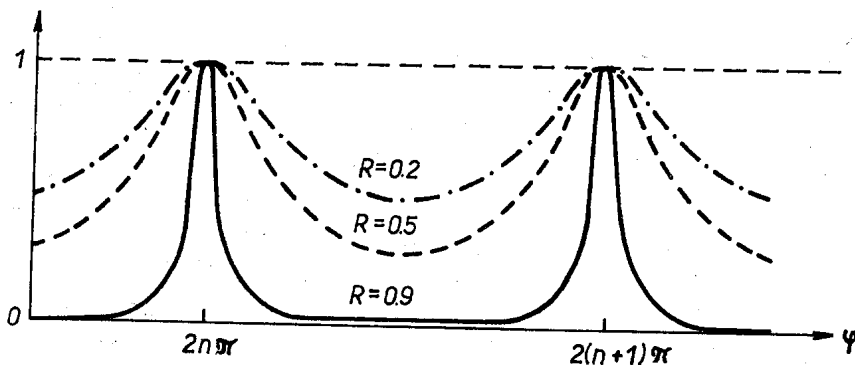
Dosazením za T z rov. (4.24) do (4.23) dostáváme po vykrácení $(1-R)^2$

$$I = I_0 \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2 \frac{1}{2} \varphi} \quad (4.25)$$

Zlomek u I_0 se nazývá Airyho funkcí. Pro velká R má faktor u $\sin^2 \frac{1}{2} \varphi$ vysokou hodnotu, tak např. pro $R = 0,8$ je hodnota

$$F = \frac{4R}{(1-R)^2}$$

rovna 80. Z toho vyplývá, že hodnota Airyho funkce je stále velmi malá s výjimkou těch směrů β , pro něž nabývá $\sin \frac{\varphi}{2}$ velmi malé hodnoty a maxima intensity nastávají pro $\varphi = 2N\pi$. Tato maxima jsou úzká a nabývají hodnoty $I_{\max} = I_0$.

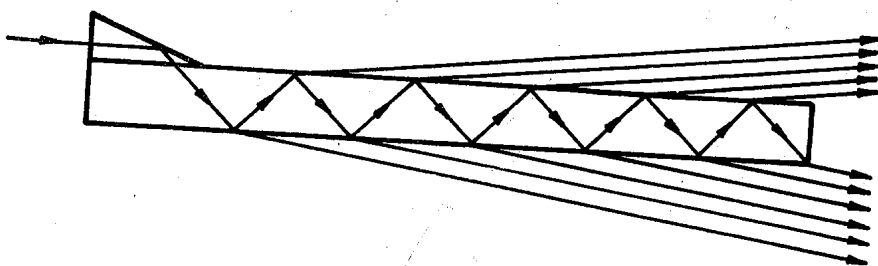


Obr.4.13. Průběh Airyho funkce pro různé odrazivosti v závislosti na φ

Průběh Airyho funkce v závislosti pro různé hodnoty R je na obr. 4.13.

Při použití monochromatického zdroje s velmi malou šířkou spektrální čáry

dostaneme jako interferenční obraz ostré světlé kroužky, nebo proužky, na tmavém pozadí. Můžeme tedy polohu



Obr.4.14. Lummerova-Gehrckeova deska

těchto maxim určit s mnohem větší přesností než u interferenční dvou svazků.

U Lummerovy-Gehrckeovy desky (obr.4.14) využíváme vysoké odrazivosti při dopadu paprsků pod úhlem blízkým k meznímu.

Paprsky vstupují do desky po totálním odrazu na přeponové straně přilepeného trojbokého hranolku, aby se neztrácela intenzita při téměř tečném dopadu. Paprsky vystupují na obou stěnách desky pod úhly lomu blízkými k $\pi/2$. Deska má podobu dlouhého hranolu, aby došlo k mnohonásobnému vnitřnímu odrazu. Jak bychom se snadno přesvědčili, v obou vystupujících svazcích světla jsou zcela obdobné podmínky interference. Rozdíl proti Fabryovu-Perotovu etalonu bývá v menším počtu odrazů. Poněvadž se vyžaduje planparalelita vybroušené vrstvy na (1/20 - 1/100), je velmi obtížné zachovat tuto přesnost na desce o délce 10 cm a více. Proto jsou L.G. desky velmi drahé a dnes se všeobecně dává přednost pro spektroskopické účely etalonu F-P.

4.9. Aplikace interference

a) Antireflexní vrstvy a interferenční filtry

Interference na tenkých planparalelních vrstvách nám umožňuje vytvářet optické povrchy a filtry s téměř libovolnou odrazivostí a propustností. Vrstvy se obvykle připravují vypařováním ve vakuu nebo katodickým rozprašováním látek různých indexů lomu na podložky skleněné, křemenné nebo kovové. Vrstvy bývají často složeny z několika různých materiálů ukládaných na podložku postupně. Cílem je např. získat plochy s vysokou odrazivostí nebo propustností pro určitý obor vlnových délek, nebo naopak s nízkou odrazivostí pro snížení ztrát světla.

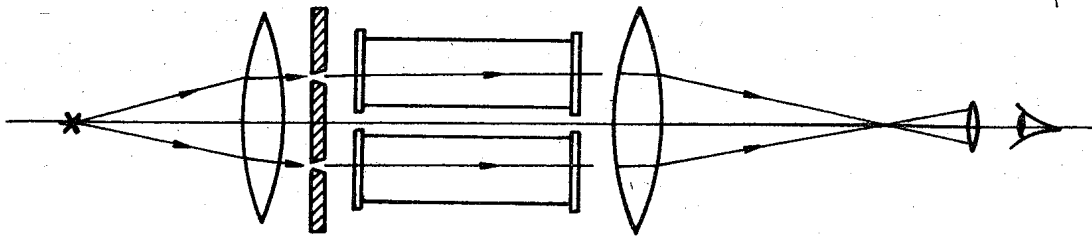
Tak např. čočky užívané ve fotografických přístrojích, mikroskopech a dalekohledech se dnes pravidelně opatřují protiodrazovými vrstvami, neboť optické systémy bývají složeny až z 6 - 14 čoček, které by representovaly 12 - 28 odrazových ploch. Kromě vysokých ztrát (40 % - 60 %) by rušily obrazy vytvořené odrazy na sférických plochách. Nejčastěji se používá vrstvy fluoridu hořečnatého, který má index

lomu $n_1 = 1,35$, tedy menší než sklo $n_2 = 1,5$ a větší než vzduch $n_0 = 1$. Jestliže se na sklo nanese vrstvička, jejíž optická tloušťka nt je rovna čtvrtině vlnové délky střední části viditelného světla, je pro kolmý dopad splněna podmínka minimální odrazivosti. Podle rov. (4.10) sice bychom očekávali právě pro tuto tloušťku maximum v odraženém světle, avšak poměry jsou zde rozdílné proti tomu, kdy platí (4.10). Oba odražené paprsky se totiž odráží na opticky hustším prostředí, tj. jak na rozhraní vzduch-vrstva, tak na rozhraní vrstva-sklo ($n_0 < n_1 < n_2$), a proto nastává dodatečná ztráta optické dráhy o $\pi/2$ u obou paprsků, podmínky minima a maxima jsou prohozené.

U interferenčních filtrů se docílí vícenásobné interference tím způsobem, že na skleněnou podložku se nejprve napaří částečně propustná vrstva kovu (Ag, Al), pak vhodný optický materiál o vhodné tloušťce t a navrch opět kovová vrstva. Je to tedy Fabryho-Perotův etalon o malé tloušťce a s prostředím o $n \neq 1$. Poněvadž na kovových vrstvách nedochází prakticky ke změně fáze, je podmínka pro maximální propustnost vlnové délky λ dána rovnicí $nt = \lambda/2$. Podle toho, jak vysoká je odrazivost R kovových vrstev, lze docílit různou pološířku propouštěného oboru podle obr. 4.11. Čím užší je propouštěný obor, tím nižší je propustnost v maximu. Interferenční filtry se obvykle kombinují s barevnými skleněnými filtry, aby se potlačila maxima vyšších řádů kratších vlnových délek. Nakláněním filtru lze v určitých mezích měnit i obor propustnosti.

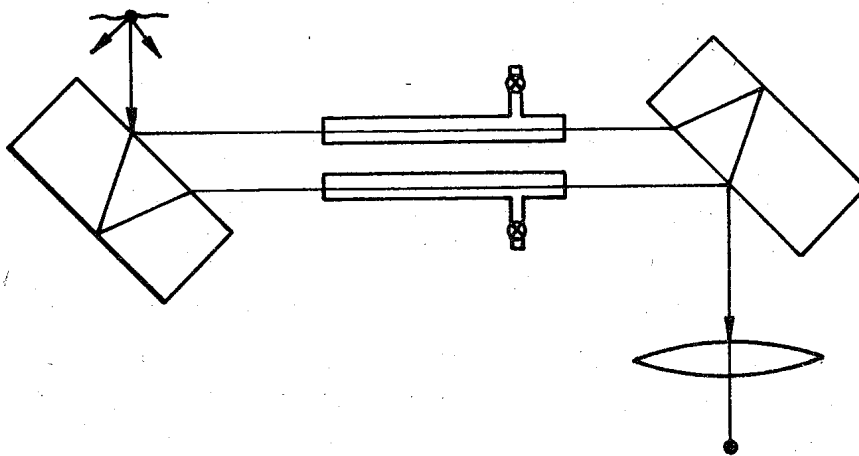
b) Interferometry

Interferometry jsou přístroje využívající interference buď dvou nebo více svazků k měření malých rozdílů optických drah. Z interferometrů dvousvazkových jsme již popsali Michelsonův. Jiný dvousvazkový interferometr je Rayleighův. Jeho princip je vlastně modifikace Youngova pokusu taková, že štěrbin jsou ve značné vzdálenosti od sebe (obr. 4.15). V důsledku toho je možno do paprsků vložit např. kyvety na-



Obr.4.15.Rayleighův interferometr

plněné plyny a měřit relativním způsobem změny indexu lomu jednoho z plynů pomocí posuvu interferenčních proužků. Po-
něvadž je vzdálenost štěrbin několik cm, jsou interferenční proužky velmi blízko u sebe a je nutno je pozorovat daleko-



Obr.4.16.Jaminův interometr

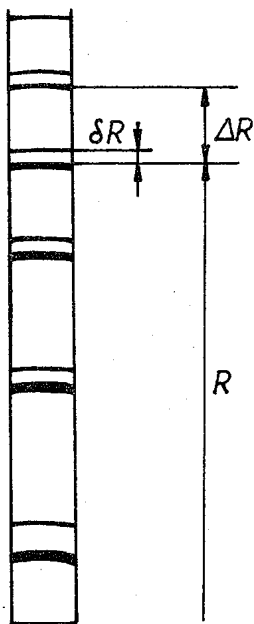
hledem se sil-
ným zvětšením.
Tohoto přístro-
je se užívá
často k zjišťo-
vání výbušných
plynů v důlní
atmosféře. Ji-
ný způsob, jak
od sebe dosta-
tečně daleko
oddělit dva in-

terferující paprsky, dává princip Jaminova interferometru (obr. 4.16). Pomocí dvou tlustých planparalelních skleněných desek (3 - 5 cm) se nejdříve rozštěpí a pak zase sjednotí dva rovnoběžné svazky (štěpení amplitudy), do nichž se opět mohou vložit kyvety nebo kompenzační skleněné desky, jejichž optická dráha se mění sklonem vůči paprskům. Počítáním proužků při změnách tlaku nebo teploty plynu v jedné kyvetě lze opět získat závislost indexu lomu na proměnných veličinách.

c) Interferenční spektroskopie

využívá toho, že vícesvazkové interferometry vytváří interferenční obraz (kroužky, proužky), který se velmi rychle mění i při malých změnách vlnové délky. Dříve popsané interferometry, tj. Fabryův-Perotův etalon a Lumerova-Gehr-

ckeova deska se užívají ke studiu struktury emisních čar plyných zdrojů nebo k proměrování efektů vedoucích k malým změnám vlnové délky, jako jsou např. Zeemanův nebo Starkův zjev.



Obr.4.17. K rozlišovací schopnosti v interferenční spektroskopii

Dejme tomu, že spektrální čára, která se v obyčejném spektroskopu jeví jako jednoduchá, je velmi blízký dublet s rozestupem $\Delta\lambda$ řádu tisícín nanometru. Jestliže nastavíme např. F.-P. etalon na kroužky a pozorujeme někde nepříliš blízko od středu obrazce, vidíme dva systémy poměrně ostrých čar (obr. 4.17) náležející vlnovým délkám λ , $\lambda + \Delta\lambda$. Pro názornost je na obr. 4.17 předpokládáno, že jedna z čar je slabší.

Ve vybraném místě interferenčního obrazce budiž poloměr světlého kroužku prvního systému R a dalšího řádu téhož systému $R + \Delta R$. Poloměr kroužku druhého systému nejbližšího k R budiž $R + \delta R$. Při téměř kolmém dopadu nechť odpovídá kroužku R řád interference N , takže

$$\lambda = \frac{2t}{N} \quad (4.26)$$

Kroužku $R + \Delta R$ pak odpovídá řád $N - 1$ téže vlnové délky. Nás nyní zajímá, jakému rozdílu vlnových délek $\Delta\lambda$ by odpovídalo zvětšení kroužku o ΔR při stejném řádu interference N . Jinak řečeno, pro jakou vlnovou délku $\lambda + \Delta\lambda$ dostáváme při konstantním t interferenční řád $N - 1$?

Derivováním rov. (4.26) dostaneme

$$\frac{d\lambda}{dN} = - \frac{2t}{N^2}$$

Při dostatečně vysokém řádu můžeme přejít ke konečným diferencím $\Delta\lambda$, $\Delta N = -1$ a dostáváme

$$\Delta\lambda = \frac{2t}{N^2} = \frac{\lambda^2}{2t} \quad (4.27)$$

Tato rovnice nám udává, jaký rozdíl vlnových délek odpovídá v zorném poli interferenčního spektroskopu rozestupu dvou sousedních maxim příslušejících vlnové délce λ . Malé rozdíly vlnových délek, $\sigma\lambda$, pokud nepřesáhnou $\Delta\lambda$, lze odvodit lineární interpolací a měřením vzdáleností σR :

$$\sigma\lambda = \frac{\sigma R}{\Delta R} \cdot \Delta\lambda$$

Tak např. při $t = 10^{-2}$ m, $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m odpovídá použitelný rozsah $\Delta\lambda = 1,25 \cdot 10^{-11}$ m, tedy asi 1/100 nm a můžeme snadno zjišťovat rozdíly vlnových délek řádu 10^{-12} m. Hlavní otázkou je získání dostatečně malých vlastních šířek použitých spektrálních čar. Při $\sigma\lambda > \Delta\lambda$ nelze jednoduše stanovit $\sigma\lambda$, protože neznáme skutečný řád interference druhého systému kroužků a nevíme, od kterého R máme σR měřit.

d) Interferenční metrologie

Citlivost interferenčního obrazce na malé změny tloušťky vrstvy nebo jejího indexu lomu umožňuje měřit jednak velmi malé tloušťky vrstev, jednak porovnávat délky lišící se o malé rozdíly, jednak měřit indexy lomu. Metody jsou velmi rozvinuté a užívají jak dvou tak i více svazků. Uvedeme zde jen některé příklady.

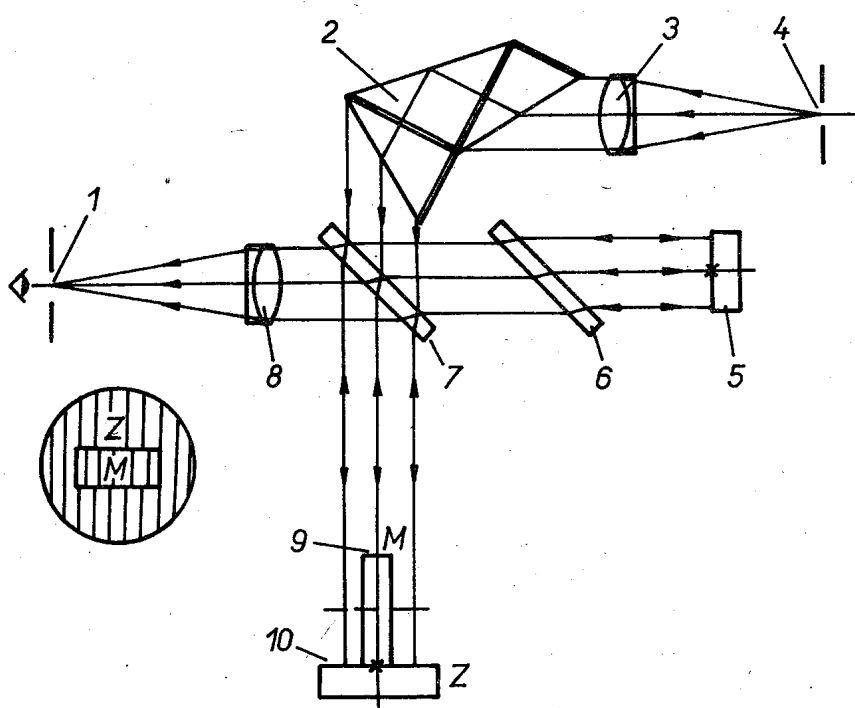
Délkové standarty se dnes užívají ve formě koncových měrek, tj. hranolů nebo válců s velmi přesně vybroušenými planparalelními základnami. Cílem interferenčního měření je buď stanovit absolutně jejich délku ve vlnových délkách nebo stanovit rozdíly mezi měrkou normální a kontrolovanou. Jako základ délkových měření byla vybrána vlnová délka spektrální čáry isotopu kryptonu 86, která vzniká přechodem mezi hladinami $2p_{10} \rightarrow 5d_5$ (a má vlnovou délku přibližně 605,6 nm). Pomocí ní je nyní bez ohledu na dřívější definici definován metr (1960) takto:

$$1 \text{ m} = 1\,650\,763,73 \lambda_0$$

S vhodným zdrojem je tato linie neobyčejně ostrá a umožňuje měřit mnohonásobnou interferenci na bazi 80 cm.

Kromě této standardní spektrální čáry se v praxi užívá čtyř čar kadmia, které jsou známy s přesností 10^{-8} . Jsou to:

Cd: červená	$\lambda_1 \approx 645 \text{ nm}$
žlutá	$\lambda_2 \approx 587 \text{ nm}$
zelená	$\lambda_3 \approx 564 \text{ nm}$
fialová	$\lambda_4 \approx 450 \text{ nm}$



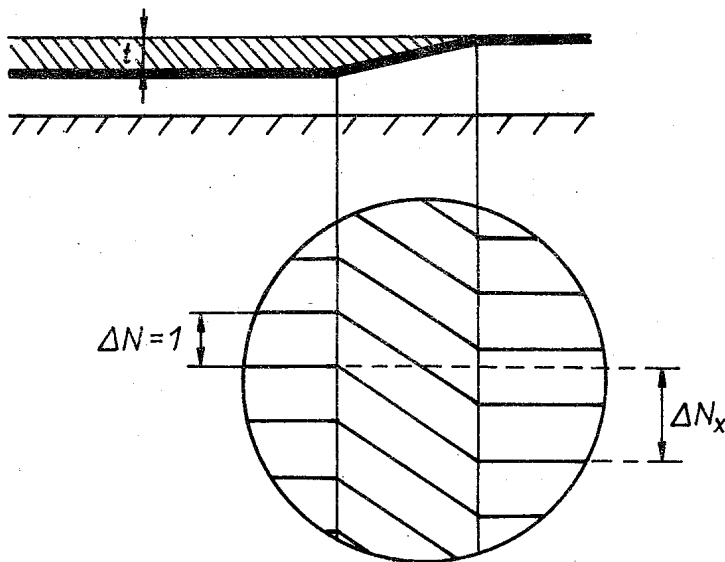
Obr.4.18. Interferenční komparátor fy. Zeiss. M - koncová měrka, Z - zrcadlo. V kruhu je vzhled interferenčního obrazce

Přístroje, kterých se v metrologii užívá, pracují např. na principu podobném Michelsonově interferometru (obr. 4.18). Zrcadla jsou poměrně velká, takže se může na jedno z nich (které se umístí horizontálně) postavit koncová měrka. V dalekohledu pak vidíme systém proužků

vzniklých jednak na vlastním zrcadle, jednak na čelní stěně měrky. Zrcadla se najastují na proužky stejné tloušťky a hledají se ty proužky, pro něž splývají maxima dvou různých vlnových délek (např. λ_1 , λ_2 Cd). Pak při délce měrky L platí pro řád interference

$$L = N_1 \frac{\lambda_1}{2} = N_2 \frac{\lambda_2}{2} \quad (4.28)$$

Řády N_1 N_2 ovšem předem neznáme. Přibližně určíme L mechanickým měřením s přesností asi na $1 \mu\text{m}$. Hledáme pak celočíselná řešení rovnice 4.28 (případně s přibráním dalších koincidencí vlnových délek $\lambda_1 + \lambda_2$), které leží v okolí přibližně vypočteného N z rov. (4.22). Metoda se dá upřesnit měřením zlomkových posunů interferenčních proužků různých vlnových délek. Další upřesnění je možné provést v uspořádání Fabryho-Perotova interferometru využitím mnohonásobné interference, takže lze dosáhnout přesnosti $1/100 \lambda$. Těmito metodami se srovnávají relativně délky koncových měrek.



Obr.4.19. K měření tloušťky tenkých vrstev

Při měření tenkých vrstev dielektrických se měření komplikuje jednak tím, že nebývá dostatečně přesně znám index lomu, jednak tím, že na povrchu reálných dielektrik dochází k fázovému zpoždění o nějaký obecný úhel ($\neq N \pi$). Jeden způsob, jak měřit tloušťku napařených vrstev, se zakládá na tom, že se současně s měřenou

vrstvou napaří vrstva na sklíčko tak, aby se vytvořila klínovitá hrana např. pomocí clony ve větší vzdálenosti od podložky. Pak se vrstva i přilehlá část skla opatří velmi tenkou napařenou vrstvičkou kovu, na němž prakticky nenastává změna fáze. Pomocí srovnávacího přesného povrchu se vytvoří proužky stejné tloušťky (obr. 4.19) napříč ke klínové hraně, takže se dá jejich pokračování na podložce sledovat přes šířku klínu

a tím určit rozdíl řádů ΔN nad vrstvou a nad podložkou. Přesné metody užívají polarizovaného světla a měří se elipticita odraženého světla. Měření mohou sloužit k určování tloušťky nebo indexu lomu.

O aplikacích optické mřížky pojednáme v další kapitole.

5. OHYB SVĚTLA (DIFRAKCE)

V úvodu jsme se zmínili, že jedním z argumentů proti Huygensově vlnové teorii světla bylo pozorování přímočarého šíření, tedy zdánlivá neexistence ohybu. Dnes víme, že jistá obtížnost pozorování ohybu souvisí s malou vlnovou délkou světla ($\lambda \sim 5 \cdot 10^{-7}$ m), takže třeba i otvory a překážky řádu mm, které se nám zdají malé, jsou stále ještě velké ve srovnání s vlnovou délkou. To neznamena, že by se na takových strukturách, které jsou pouhým okem ještě rozeznatelné, neprojevoval ohyb. Známe i z denního života řadu jevů, které jsou jeho důsledkem: tak např. když hledíme napjatou tkaničnou deštníku, tj. pravidelnou sítí, na vzdálenou pouliční svítilnu, vidíme velmi pěkně dvojrozměrný ohybový jev projevující se živými duhovými barvami. Ohyb na větších předmětech lze pozorovat s použitím zvláštní aparatury.

Přesná teorie ohybu vychází z řešení Maxwellových rovnic s použitím okrajových podmínek, které charakterizují tvar a vlastnosti předmětu (clona, stínítko, trojrozměrné těleso), na němž ohyb nastává. Tak např. pro ohyb na kovové kouli by okrajovou podmínkou bylo, že na povrchu koule jsou tečné komponenty vektoru E nulové. Matematické obtíže tohoto přístupu jsou ohromné a řešení je možné jen v geometricky nejjednodušších případech. Naštěstí je možný jiný přístup, mnohem názornější a i když ne tak přesný, přece jen pro běžné případy zcela vyhovující. Je to přístup z Huygensova principu, který v následujících odstavcích rozvineme. Přitom nebudeme přihlížet k vektorové povaze světelných vln, neboť jevy ohybu v prvním přiblížení nezávisí na směru polarizace světelné vlny. Že to je jen přibližně pravda, to nám může ukázat úvaha o ohybu na štěrbině. Kovová štěrbinina by implikovala okrajovou podmínku, že na jejích hranách musí být složka pole s nimi rovnoběžná rovna nule, kolmá složka však nikoli. To znamená, že průběh pole napříč štěrbinou pro polarizaci E rovnoběžné s hranami je jiný než pro pole kolmé

k hranám šterbiny, efektivní šířka šterbiny je pro oba mody různá. Poněvadž rozdíl činí jen zlomek vlnové délky, nemusí se v běžných případech k němu přihlížet.

5.1. Základní formulace teorie ohybu

Základní jevy ohybu se nejnázne demonstují tak, že z koherentního zdroje (laser, malý otvor nebo šterbina osvětlená nekoherentním primárním zdrojem) necháme svazek paprsků dopadat kolmo na rovinné stínítka obsahující otvor jednoduchého geometrického tvaru: úzkou šterbinu, kruhový otvor, tmavý kruhový disk nebo úzký pásek ve větším okénku apod. Ohybový jev pozorujeme buď na vzdáleném stínítku nebo pomocí optického systému jej zobrazíme.

Při rozboru ohybového jevu budeme vycházet z těchto zjednodušujících předpokladů:

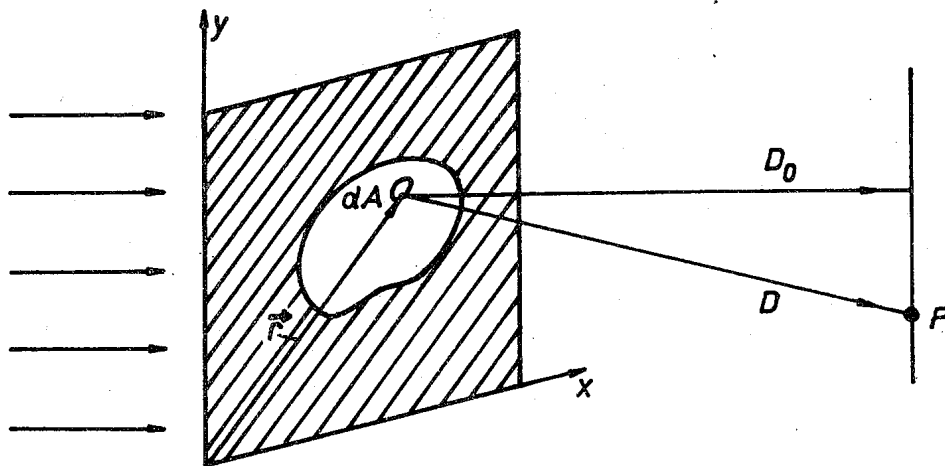
- 1) Neprůhledná část stínítka nezáří, absorbuje stoprocentně dopadající záření.
- 2) Body uvnitř propustné části stínítka představují ekvivalentní zdroje elementárních vlnoploch ve smyslu Huygensovy teorie, se stejnou vyzařovací schopností do všech směrů. To platí až těsně k hranám otvorů.

Na stínítka nechť dopadá koherentní záření, takže v každém bodě stínítka \vec{r} je popsáno jistou amplitudou a fází:

$$E(\vec{r}) = E_0(\vec{r}) e^{i[\varphi(\vec{r}) - \omega t]} \quad (5.1)$$

Funkci stínítka popisujeme aperturní funkcí $f(\vec{r})$ tak, že v bodech otvorů je $f(\vec{r}) = 1$ a v bodech nepropustné části stínítka je $f(\vec{r}) = 0$. Zavedení této funkce nám později umožní definovat obecnější případ, kdy předmět způsobující difrakci může absorbovat nebo reflektovat jen částečně, $f(\vec{r}) \in (0, 1)$ případně i měnit fázi vlny ($f(\vec{r}) = f_0(\vec{r}) e^{i[\varphi(\vec{r})]}$).

Každý element plochy v rovině stínítka se stává zdrojem elementární kulové vlny o amplitudě úměrné dopadající vlně a aperturní funkci $f(\vec{r})$. $C.E(\vec{r}) = f(\vec{r}) F(\vec{r})$, kde jsme zavedli $C E(\vec{r}) = F(\vec{r})$.



V pozorovacím bodě P, jehož vzdálenost od elementu dA (obr.5.1) je D , přispívá elementární vlna z elementu dA k celkovému rozruchu přispě-

Obr.5.1. K formulaci teorie ohybu

kem (s vynecháním časového faktoru)

$$dE(P) = \frac{1}{D} f(\vec{r}) F(\vec{r}) dA \exp(i k D)$$

Celkový rozruch v bodě P dostaneme integrací přes celou plochu stínítka (R):

$$E(P) = \int_{(R)} f(\vec{r}) F(\vec{r}) D^{-1} \exp(ikD) dA \quad (5.2)$$

a intenzita v bodě P je

$$I(P) = E(P) E^*(P) \quad (5.3)$$

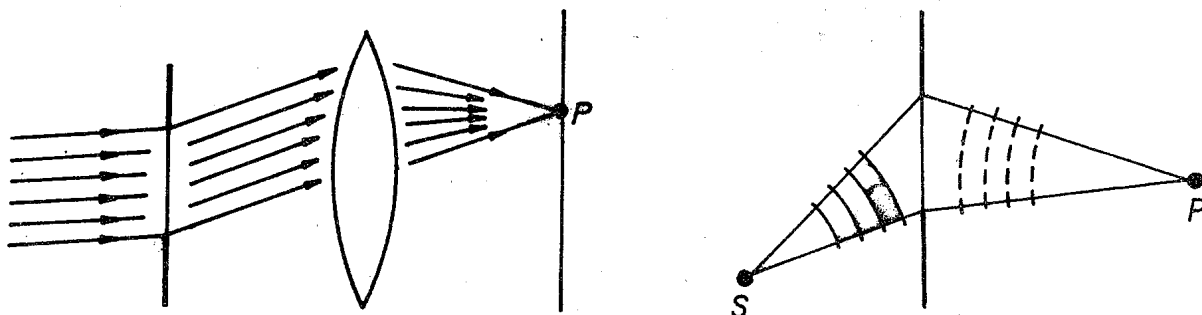
(Integrace (5.2) v jednoduchém případě, kdy $f(\vec{r})$ nabývá jen hodnot 1 a 0, znamená, že se integruje jen přes plochu otvorů, kde $f(r) = 1$. Rov. (5.2) nám tedy udává návod, jak zjistit amplitudu vlny a pomocí (5.3) pozorovanou intenzitu v libovolném bodu P prostoru za stínítkem. V uzavřené formě ovšem dovedeme integrál (5.2) spočítat jen pro jednoduché případy geometrických tvarů otvorů a překážek a též pro jednodu-

chý případ průběhu $E(\vec{r})$, jakým je např. osvětlení rovin-
nou nebo kulovou vlnou.

Podle stupně přiblížení, který užíváme při výpočtu
integrálu (5.2) se rozlišují dvě třídy chybových jevů:

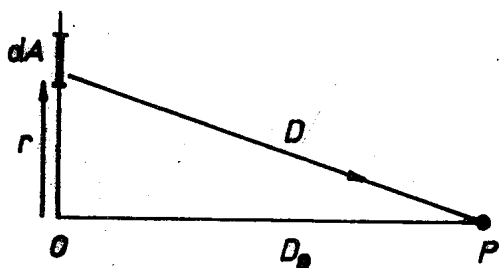
- a) Fraunhoferův ohyb
- b) Fresnelův ohyb

Jednodušší je případ a), který odpovídá rovinným vlnoplochám a je experimentálně realizován rovnoběžným osvětle-
ním stínítka (zdroj v nekonečnu) a pozorovacím bodem P v li-
mitě v nekonečnu ($D \rightarrow \infty$). To se dá také realizovat pomocí
čoček, které mění divergentní svazek na rovnoběžný a rovno-
běžný na konvergentní (obr. 5.2a).



Obr.5.2. (a) Fraunhoferův ohyb (b) Fresnelův ohyb

Případ Fresnelova ohybu nastává, jestliže v rovině
stínítka a v rozmezí otvorů nelze zanedbat zakřivení vlnoplo-
ch, reálné z bodového zdroje nebo fiktivní konvergující
k bodu P (obr.5.2b).



Obr.5.3. Geometrie k Fresnelovu ohybu 5.3.

Jak vidíme, je matematický roz-
díl mezi případy a) a b) v tom,
že v exponentu fázové funkce se
v prvním případě objeví lineár-
ní funkce, v druhém kvadratická
funkce integrační proměnné. Ob-
jasníme si tuto situaci na obr.

a) Na rovinné stínítko nechť dopadá kolmo rovinná vlna. Počátek souřadnic O nechť je dán patou kolmice D_0 spuštěné z pozorovacího bodu P . Fáze vlny φ z elementu dA v bodě P vztažená k fázi v rovině stínítka je

$$\varphi = kD = k(D_0^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} = k D_0 \left(1 + \frac{r^2}{D_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.4)$$

V každém případě se omezíme jen na takové uspořádání, při němž platí $r^2/D_0^2 \ll 1$ (pro Fresnelův i Fraunhoferův ohyb!).

Rozvineme-li odmocninu v (5.4) a omezíme se jen na první dva členy rozvoje, je

$$\varphi \approx k D_0 \left(1 + \frac{r^2}{2D_0^2}\right)$$

pro zkrácení

$$\varphi \approx \varphi_0 + \frac{kr^2}{2D_0} \quad (5.5)$$

Jestliže tedy neprovedeme další zanedbání, je exponent v (5.2) kvadratickou funkcí r , což odpovídá Fresnelovu ohybu.

Omezíme se nyní dále na ten případ, že propustná část stínítka je velmi malých rozměrů i vůči r_0 , takže se jedná o malý otvor charakteristického rozměru řádu δr , přičemž pozorujeme v mimoosovém bodě P (obr. 5.4) vzdáleném od osy otvoru o \vec{r}_0 . Pro element otvoru dA v bodě $\vec{r}_0 + \delta \vec{r}$ pak dostáváme fázi vlny v bodě P

$$\varphi = k(D_0^2 + |\vec{r}_0 + \delta \vec{r}|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Jestliže rozvineme odmocninu podle binomické věty a jestliže zanedbáme člen s $|\delta \vec{r}|^2$, dostaneme jako první dva členy:

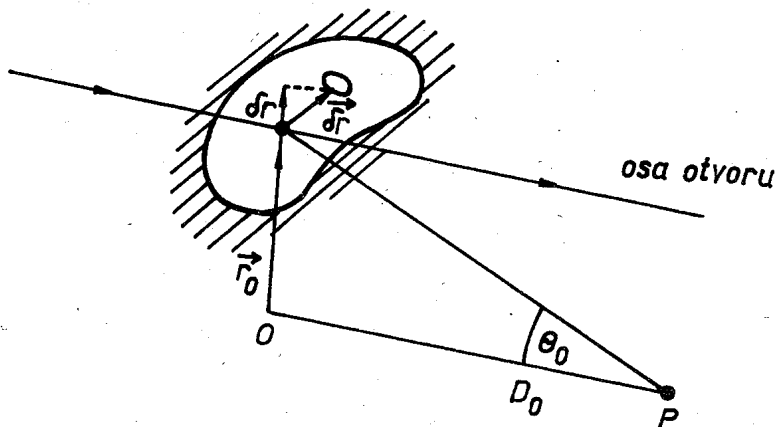
$$\varphi \approx k(D_0^2 + r_0^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{k(\vec{r}_0 \cdot \delta \vec{r})}{(D_0^2 + r_0^2)^{1/2}}$$

a podle obr. 5.4.

$$\varphi = k(D_0^2 + r_0^2)^{1/2} + k \int \sin \theta_0$$

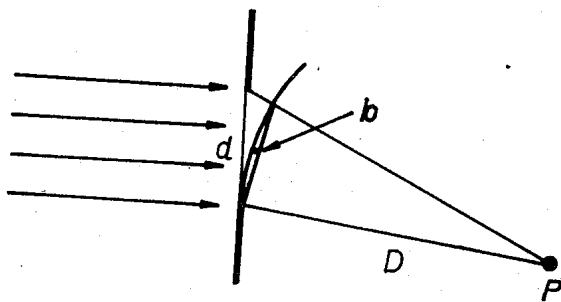
nebo zkráceně

$$\varphi = \varphi_0 + u \int r \quad (5.6)$$



kde jsme zavedli $\varphi_0 = k(D_0^2 + r_0^2)^{1/2}$; $k \sin \theta_0 = u$. Vidíme tedy, že v tomto přiblížení dostáváme lineární závislost fáze na \sqrt{r} , tj. na vzdálenosti elementu dA od osy otvoru. To jsou podmínky odpovídající Fraunhoferovu ohybu.

Obr.5.4. Geometrie ke kritériu Fresnelova a Fraunhoferova ohybu



Obr.5.5. Ke kritériu Fresnelova a Fraunhoferova ohybu

Fyzikální význam kritéria rozdělujícího ohybové jevy na Fraunhoferovy a Fresnelovy a podrobnější kvantitativní podmínku si odvodíme na zvláštním případě podle obr. 5.5. Budeme uvažovat dvojrozměrnou geometrii, což např. odpovídá ohybu na nekonečně dlouhé štěrbině a popisu v rovině kolmé ke hranám štěrbině.

Štěrbina o šířce d je osvětlena rovinnou monochromatickou vlnou dopadající kolmo na rovinu stínítka. Pozorujeme výsledek ohybu v mimoosovém bodě P ve vzdálenosti D od štěrbině. Kruhový oblouk ABC procházející hranou štěrbině nám představuje fiktivní konvergentní vlnoplochu, z jejíchž všech bodů by se dostalo do bodu P vlnění se stejnou fází. Kdyby bod P ustoupil v daném směru θ do nekonečna, změnila by se

dlouhé štěrbině a popisu v rovině kolmé ke hranám štěrbině.

Štěrbina o šířce d je osvětlena rovinnou monochromatickou vlnou dopadající kolmo na rovinu stínítka. Pozorujeme výsledek ohybu v mimoosovém bodě P ve vzdálenosti D od štěrbině. Kruhový oblouk ABC procházející hranou štěrbině nám představuje fiktivní konvergentní vlnoplochu, z jejíchž všech bodů by se dostalo do bodu P vlnění se stejnou fází. Kdyby bod P ustoupil v daném směru θ do nekonečna, změnila by se

tato fiktivní válcová vlnoplocha na rovinnou, která se odchyluje od válcové vlnoplochy maximálně o úsečku b , pro niž platí (za dříve uvedeného předpokladu $d \ll D$)

$$b \approx \frac{d^2}{8D}$$

Rozhodující je nyní velikost b v porovnání s vlnovou délkou. Při Fraunhoferově ohybu je $b \ll \lambda$, v limitě rovno nule. Pak je zřejmě fázový rozdíl paprsků z různých míst štěrbin lineární funkcí vzdálenosti od okraje štěrbin, neboť fiktivní vlnoplocha je rovinná. Při Fresnelově ohybu je b srovnatelné s vlnovou délkou nebo větší. Pak je fázový rozdíl určen vzdáleností fiktivní válcové vlnoplochy od skutečné vlnoplochy v rovině štěrbin a je přibližně kvadratickou funkcí vzdálenosti paprsku od okraje štěrbin.

Čtenář si snadno doplní, že podobná úvaha by se dala provést pro zdroj v konečnu s tím rozdílem, že bychom mluvili o zakřivení skutečných vlnoploch. Jestliže budeme tedy považovat D za charakteristickou vzdálenost zdroje nebo pozorovacího bodu od stínítka (tj. menší z nich) a d za charakteristický rozměr difrakčního předmětu, pak podmínku Fraunhoferova ohybu lze zpřísněně (s vynecháním číselného faktoru) formulovat jako

$$\frac{d^2}{D} \ll \lambda \quad (5.7)$$

V opačném případě je nutno uvažovat zakřivení vlnoploch a jev přechází na Fresnelův.

Tak např. při kruhovém otvoru o průměru 1 mm a s použitím $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m je podmínka pro Fraunhoferovu difrakci $D \gg d^2/\lambda = 20$ cm. Při vzdálenosti $D \gtrsim 1$ m lze už bezpečně zakřivení vlnoploch zanedbat.

5.2. Fresnelův ohyb na kruhovém otvoru a disku

Vzhledem k převažujícímu praktickému významu Fraunhoferova ohybu se zde budeme zabývat jen vybranými případy Fresnelova ohybu, který je matematicky značně složitý. Probereme nejdříve ohyb na útvarech s osovou symetrií, tj. na kruhovém otvoru, na kruhovém disku a na Fresnelově zonální desce. Základní uspořádání pokusu je velmi jednoduché. Mírně divergentním svazkem paprsků z He-Ne laseru (divergenci docílíme slabou rozptylkou) osvětlujeme stínítko s uvedenými tvary rozměrů kolem 1 mm. Ohybový jev pozorujeme lupou, která je na optické lavici axiálně posuvná, nebo prostě na bílém projekčním stínítku, takže můžeme měnit vzdálenost pozorovacího bodu či roviny od aperturního stínítka.

a) Kruhový otvor

Pozorovaný ohybový jev má tvar soustředných tmavých a světlých kroužků, přičemž v závislosti na vzdálenosti od otvoru je ve středu buď světlý nebo tmavý bod.

Úplný matematický popis je obtížný a omezíme se zde jen na výpočet amplitudy v ose obrazce v závislosti na poloměru otvoru R a vzdálenosti pozorovacího bodu D_0 . Poněvadž dráhy paprsků přicházejících z celého otvoru do bodu P se liší jen nepatrně, je možno ve výpočtu místo faktoru $1/D$ brát konstantní faktor $1/D_0$. V exponentu integrandu rov. (5.2) se omezíme jen na kvadratický výraz pro D , tj.

$$D = D_0 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{D_0}$$

kde r je vzdálenost elementu plochy od osy otvoru. Je vhodné integrovat po elementech tvaru mezikruží o šířce dr a ploše $dA = 2\pi r dr$. Z rov. (5.2) pak dostaneme

$$E(P) = \frac{\sqrt{\pi} F}{D_0} \exp(ikD_0) \int_{(R)} f(r) \exp\left(ik \frac{r^2}{2D_0}\right) 2r dr$$

Substitucí $r^2 = s$ a po zavedení $B = (\pi F/D_0) \exp(ikD_0)$, $f(r) = g(s)$ dostaneme

$$E(P) = B \int_{(R)} g(s) \exp\left(\frac{ik}{2D_0} s\right) ds \quad (5.8)$$

Této rovnici lze použít pro libovolný osově symetrický tvar aperturní funkce $f(r)$, což je vyjádřeno její změněnou formou $g(s)$. Pro kruhový otvor je tedy

$$g(s) = 1 \quad \text{pro } 0 \leq s \leq R^2$$

$$g(s) = 0 \quad \text{pro } s > R^2$$

takže

$$E(P) = B \int_0^{R^2} \exp\left(\frac{ik}{2D_0} s\right) ds$$

$$= B \frac{2D_0}{ik} \left[\exp\left(\frac{ik}{2D_0} R^2\right) - 1 \right]$$

a příslušná intenzita

$$I = B B^* \cdot \frac{4D_0^2}{k^2} \left[\exp\left(\frac{ikR^2}{2D_0}\right) - 1 \right] \left[\exp\left(-\frac{ikR^2}{2D_0}\right) - 1 \right]$$

$$I = \frac{8 \pi^2 F^2}{k^2} \left(1 - \cos \frac{kR^2}{2D_0} \right) \quad (5.9)$$

Výsledek je překvapující: intenzita je periodickou funkcí veličiny $1/D_0$ a mění se od nuly při $kR^2/2D_0 = 2N\pi$ do hodnoty $16 \pi^2 F^2/k^2$ při $kR^2/2D_0 = (2N+1)\pi$

Perioda proměnné $1/D_0$ je tedy $4\pi/kR^2 = 2\lambda/R^2$. V uvedeném příkladu $2R = 1$ mm, $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m dostáváme na ose tmavé body ve vzdálenostech 1/4 m, 1/8 m, 1/12 m atd. a světlé body s maximální intenzitou ve vzdálenostech 1/2m, 1/6 m, 1/10 m atd.

Tento výsledek lze snadno zobecnit i na případ, že zdroj i pozorovací bod P jsou na ose, v konečnu. Jestliže vzdále-

nost zdroje od aperturního stínítka je D_1 , pak do otvoru dopadá kulová vlna o poloměru vlnoplochy D_1 a její zakřivení způsobuje fázový rozdíl vůči rovinné vlně (podle (5.4))

$$\begin{aligned}\varphi' &= k D_1 \left(1 + \frac{r^2}{D_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \varphi_1 + \frac{kr^2}{2D_1}\end{aligned}$$

Tento fázový rozdíl se sčítá s fázovým rozdílem φ , takže výsledný $\phi = \varphi + \varphi'$ lze napsat

$$\phi = \phi_0 + \frac{kr^2}{2} \left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_0}\right)$$

To znamená, že se zdrojem v konečnu můžeme použít vzorců odvozených pro rovinnou vlnu, jestliže nahradíme faktor $1/D_0$ výrazem $1/D_1 + 1/D_0$.

b) Kruhový disk

Zde je nejpozoruhodnější, že bez ohledu na vzdálenost je na ose vždy světly bod. To bylo nejdříve předpovězeno teoreticky a experimentální důkaz znamenal významné potvrzení vlnové podstaty světla.

Matematická formulace pro body na ose je obdobná jako v případě kruhového otvoru, avšak vzhledem k tomu, že aperturní funkce nabývá hodnot

$$\begin{aligned}g(s) &= 0 \quad \text{pro } 0 \leq s \leq R^2 \\ g(s) &= 1 \quad \text{pro } s > R^2\end{aligned}$$

je nutno integrovat od R^2 do nekonečna. Aniž bychom analyzovali přesněji konvergenci tohoto integrálu, můžeme nahlédnout, že zde musíme respektovat úbytek amplitudy od elementů daleko vzdálených od osy vzhledem k faktoru D^{-1} v rov. (5.2). V důsledku toho se v difrakčním integrálu uplatní hlavně příspěvky z okolí dolní meze R^2 , kde můžeme klást $D = D_0$ a užít

v podstatě rov. (5.8) s tím, že hodnota primitivní funkce při horní hranici ($s \rightarrow \infty$) bude nulová. Je tedy

$$E_p = \frac{2D_0}{ik} B \left[0 - \exp\left(\frac{ikR^2}{2D_0}\right) \right]$$

a intenzita

$$I = \frac{4D_0^2}{k^2} B B^* \exp\left(i\frac{kR^2}{2D_0}\right) \exp\left(-\frac{ikR^2}{2D_0}\right) = B B^* \cdot \frac{4D_0^2}{k^2}$$

$$I = \frac{4\tilde{\pi}^2 F^2}{k^2}$$

Jak jsme již předznamenal, intenzita je nenulová a nezávisí na R , ani na D_0 .

c) Fresnelova zonální deska

je clona s osově symetrickou, periodickou propustností. Má strukturu ostře ohraničených propustných a nepropustných mezikruží tak, aby platilo

$$\begin{aligned} g(s) &= 0 & \text{pro } 0 \leq s \leq a_0^2 \\ g(s) &= 1 & a_0^2 < s < 2a_0^2 \\ g(s) &= 0 & 2a_0^2 \leq s \leq 3a_0^2 \\ g(s) &= 1 & 3a_0^2 < s < 4a_0^2 \end{aligned}$$

atd., kde a_0 je zvolená konstanta. Znamená to, že poloměry hranic mezi tmavými a průhlednými zónami rostou podle posloupnosti $a_0, a_0\sqrt{2}, a_0\sqrt{3}, \dots$. Především je zřejmé, že plochy všech propustných zón jsou stejné a že přispívají k intenzitě v bodě P stejnými příspěvky. Výpočet difrakčního integrálu podle (5.8) pro velmi velký počet zón ukazuje, že intenzita na ose je rovna stále nule kromě bodů, které splňují rovnici

$$\frac{k}{2D_0} = \frac{2N\tilde{\pi}}{2a_0^2}$$

Jestliže např. bodový zdroj se nachází v konečnu ve vzdálenosti D_1 , pak se vytvoří ostré maximum ve vzdálenosti D_0 za zonální deskou, takže platí pro první řád ($N = 1$) difrakce

$$\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_0} = \frac{2}{ka_0^2}$$

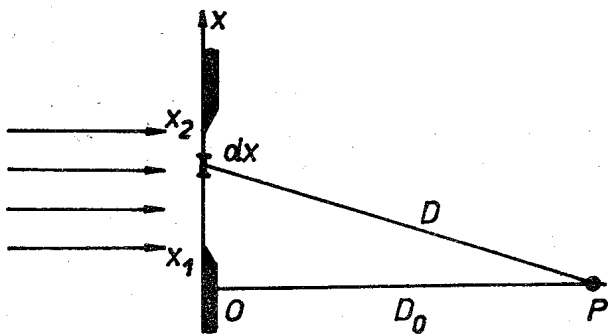
Zonální deska působí tedy, pokud se týká bodů na ose, jako čočka o ohniskové dálce $\frac{ka_0^2}{2}$

Zonální deska nemá sice nějaký zvláštní význam, avšak slouží k pochopení významu difrakce při zobrazování. Můžeme ji totiž pokládat za ohybový obraz bodového zdroje vytvořený kruhovým otvorem. Jestliže ji znovu použijeme jako difrakční předmět, dostáváme, jak uvidíme později, rekonstrukci původního "předmětu", tj. bodového zdroje. Matematicky je tento fakt skryt v tom, že integrál (5.8) znamená vlastně v proměnné s Fourierovu transformaci aperturní funkce $g(s)$. O tom blíže v odst. 5.7.

5.3. Fresnelův ohyb na štěrbině a hraně

Ve stejném uspořádání jako při ohybu na kruhových útva-
rech můžeme pozorovat také ohyb na lineárních útva-
rech, jako je rovnoběžná štěrbinu, pásek (drát) nebo jediná hrana. Ve
všech případech pozorujeme v pozorovací rovině (na projekč-
ním stínítku) poblíž hranic geometrického stínu prostorově
oscilující intenzitu světla, tedy světlejší a tmavší prouž-
ky, jejich polohy, šířky i intenzity se mění se vzdáleností
pozorovací roviny od aperturního stínítka. Začneme se šter-
binou.

Matematický popis je formulován jako jednorozměrný. Cí-
lem výpočtu je zjistit amplitudu a fázi vlnění v jistém bodě
P pozorovací roviny. Aperturní štěrbinu je v rovině vzdále-
né o D_0 od bodu P (obr. 5.6) a její hrany mají souřadnice



x_1 , x_2 , takže její šířka je $d = x_2 - x_1$. Počátek souřadnic O leží v patě kolmice z bodu P na rovinu štěrbinu. Zahrneme-li opět konstantní faktory do konstanty B , lze pro komplexní výraz $E(p)$ psát

Obr.5.6. Fresnelův ohyb na štěrbině

$$E(P) = B \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp [i \varphi(x)] dx \quad (5.10)$$

kde $\varphi(x)$ znamená fázi vlny, s níž přichází paprsek z elementu dx do bodu P , vztaženou k fázi vlny z některého pevně zvoleného bodu, např. x_1 . Aperturní funkce je rovna jedné v intervalu (x_1, x_2) , jinde rovna nule. Lze tedy rov. (5.10) přepsat

$$E(P) = B \int_{x_1}^{x_2} \exp [i \varphi(x)] dx \quad (5.11)$$

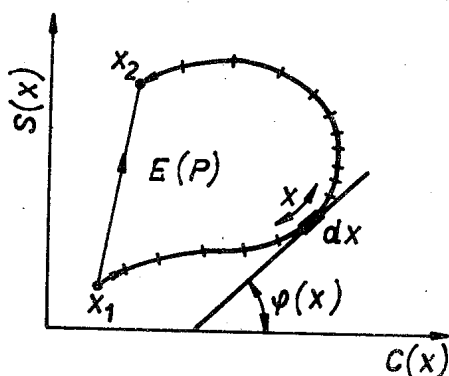
Poněvadž při Fresnelově ohybu je $\varphi(x)$ kvadratickou funkcí x , nedovedeme integrál vyjádřit v uzavřené formě. Užívá se proto buď numerických metod nebo grafického výpočtu, který zde naznačíme.

V geometrickém znázornění znamená integrál v rov. (5.11) vektorový součet elementárních fázorů o absolutních velikostech dx a směrových úhlech $\varphi(x)$. Tyto fázory tvoří spojitou křivku, jejíž oblouk měřený od výchozího bodu x_1 do bodu x má délku $\int_{x_1}^x dx = x - x_1$ a fázor v tomto bodě má

směrový úhel $\varphi(x)$ daný tečnou. Abychom mohli tuto situaci znázornit geometricky, zavedeme označení pro reálnou a imaginární část integrálu takto:

$$\int_{x_1}^x \exp [i \varphi(x)] dx = C(x) + i S(x) \quad (5.12)$$

Křivka složená z elementárních fázorů v souřadnicích C a S na obr. 5.7. Jeden z elementárních fázorů příslušející bodu



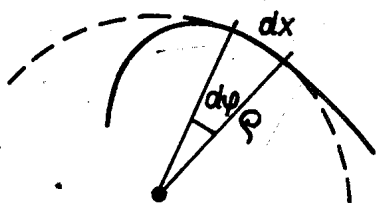
x je zakreslen s patričnou fází $\varphi(x)$. Výsledný fázor odpovídající integrálu od x_1 do x_2 je udán spojnicí koncových bodů oblouku křivky a jeho směrový úhel nám udává fázi výsledné vlny v bodě P vzhledem k fázi paprsku vycházejícího od hrany x_1 . Celkový oblouk křivky má délku

Obr.5.7.Fázorový diagram $x_2 - x_1 = d$ nezávisle na poloze bodu P. pro ohyb na jedno- rozměrné struktuře

Obr. 5.7. nám naznačuje, jak lze graficky získat komplexní hodnotu integrálu (5.11), jestliže ovšem známe průběh křivky $S = S(C)$. V našem případě máme tuto křivku dānu parametricky, takže parametrem je délka jejího oblouku a explicitě je udán úhel tečny $\varphi(x)$ ke křivce v souřadnicích C,S (srov.rov. (5.5))

$$\varphi(x) = \frac{k x^2}{2D_0} \quad (5.13)$$

Tato rovnice říká, že směrový úhel tečny roste kvadraticky s délkou křivky. Jaký tvar má taková křivka? O tom nám více řekne tato úvaha: jestliže se na obecné křivce posuneme o element oblouku - u nás označeného jako dx - pak se změní směrový úhel o $d\varphi$, takže platí (obr. 5.8)



$$dx = \rho d\varphi$$

kde ρ je lokální poloměr křivosti. Je tedy poloměr křivosti obecně definován vztahem

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx}$$

Obr.5.8.Vztah mezi obloukem, směrem tečny a poloměrem křivosti

V našem konkrétním případě dostaneme kombinací s rov. (5.13)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{k}{D_0} \cdot x$$

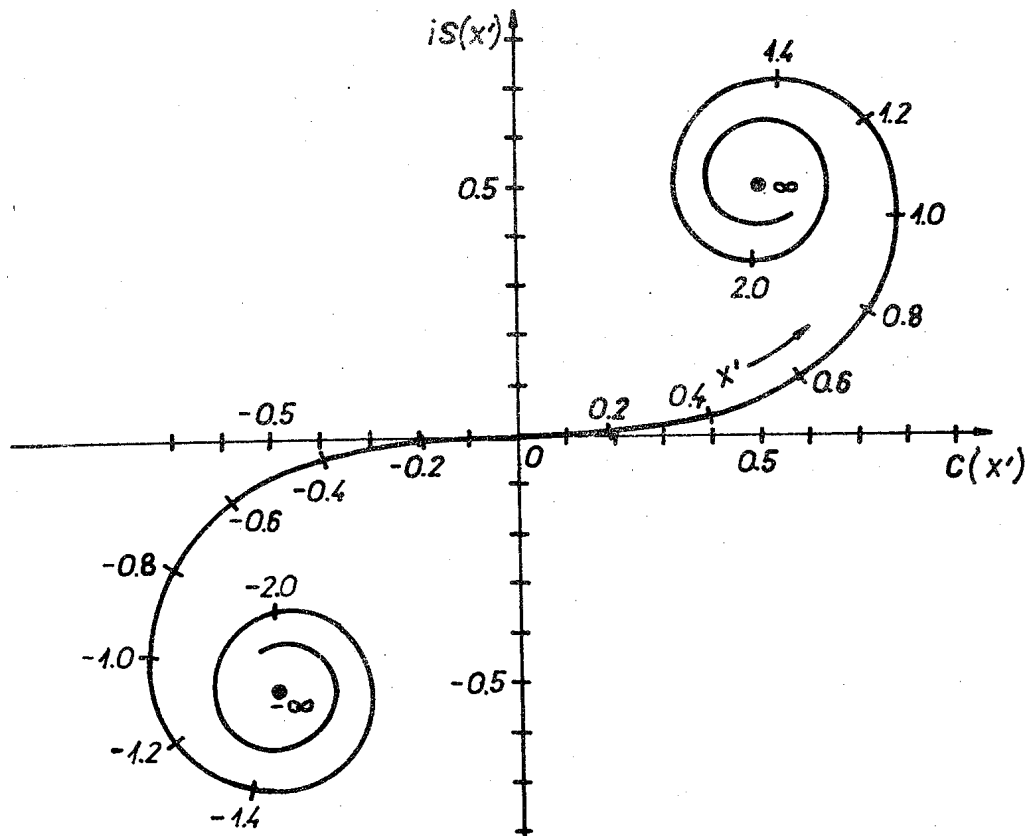
Zavedeme-li $\beta^2 = k/D_0$, zní rovnice křivky

$$\frac{1}{\varrho} = \beta^2 x$$

Tato křivka má tvar dvojstranné spirály (5.14) s rychle stoupající hustotou závitů.

Obvykle ji znázorňujeme v bezrozměrných souřadnicích $x' = \beta x$ a $\varrho' = \beta \varrho$. Pak parametrická rovnice křivky má tvar

$$\varrho' = \frac{1}{x'}$$

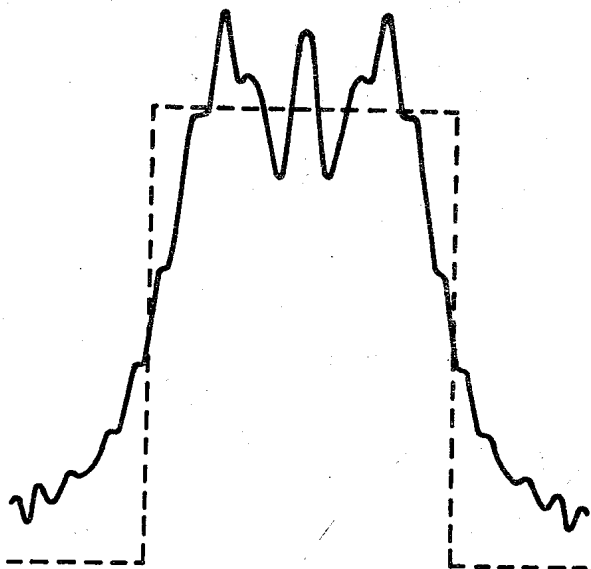


Obr.5.9. Cornuova spirála

Této křivce se říká Cornuova spirála. Je na obr. 5.9. Dvě větve $x' \rightarrow \pm \infty$ Cornuovy spirály konvergují k bodům $(1/2, 1/2)$ a $(-1/2, -1/2)$. Jak nyní pomocí Cornuovy spirály vypočteme průběh amplitud a fází $E(P)$ v závislosti na poloze bodu P

při pevné vzdálenosti D_0 ? Výpočet je nutno provádět bod po bodu.

Zvolíme si tedy jistou polohu bodu P a ta nám definuje souřadnice hran štěrbin x_1, x_2 . Vypočteme $\beta = (k/D_0)^{1/2}$ a provedeme transformaci $x'_1 = \beta x_1$, $x'_2 = \beta x_2$. Na spirále najdeme body odpovídající těmto parametrům podle stupnice, kterou je křivka opatřena. Přesné určení poloh x_1, x_2 je ovšem obtížné vzhledem k tomu, že máme měřit oblouk podél křivé čáry. Úsečka spojující body spirály odpovídající x'_1, x'_2 udává výsledný fázor $E(P)$ v jistém měřítku. Jeho fázi dostaneme jako úhel sklonu fázoru $E(P)$ k ose C a je vztažena k fázi středního paprsku, neboť křivka je nakreslena tak, že $\varphi(0) = 0$.



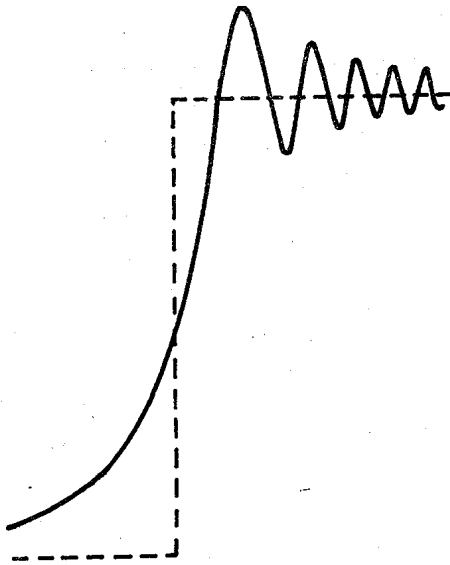
Obr. 5.10. Průběh amplitudy Fresnelova ohybu na štěrbině pro $x'_2 - x'_1 = 8,5$. Čárkovane je naznačen¹ průběh hranice geometrického stínu

Na obr. 5.10 je průběh relativní amplitudy ohybového jevu pro určitou hodnotu $x'_2 - x'_1$. Čárkovanou čarou je znázorněn průběh intenzity, jaký by měl být podle geometrické optiky, tj. pro $\lambda \rightarrow 0$. Význačným rysem Fresnelova ohybu je, že v oblasti, kde by byl světlý pruh podle geometrické optiky, vznikají zřetelná minima, tedy tmavší proužky. Tomu tak u Fraunhoferova ohybu není, tam máme ve středu význačné, nestrukturované maximum.

Jak tedy vznikají oscilace amplitudy (a intenzity)? Jestliže při pevné šířce štěrbin, tj. pevné délce oblouku mezi x'_1, x'_2 postupujeme s bodem P od osy štěrbin ($x'_1 = -x'_2$) stranou, "navíjí se" vlákno délky $x'_2 - x'_1$ na zavnutý úsek spirály, takže konec vlákna, tj. bod x'_2 , padá postupně na úseky spirály bližší

a vzdálenější od středu (0,0) a tím osciluje délka výsledného fázoru. Je zřejmé, že při dostatečné vzdálenosti bodu P od osy štěrbin se mohou oba body x_1 x_2 ocitnout v témže klubku spirály, takže jejich koncové body padnou velmi blízko sebe na blízkých závitech spirály a výsledná amplituda je velmi malá - téměř nulové minimum - zatímco v dalším postupu skončí vlákno $x_2 - x_1$ na protilehlých částech klubka a objeví se maximum.

Ohyb na hraně můžeme projednávat podobným způsobem. Integrace v tom případě probíhá od bodu x_1 do nekonečna. To by znamenalo na grafu Cornuovy spirály hledat spojnicí bodu x_1 s bodem (1/2, 1/2), k němuž konverguje horní větev spirály. To ovšem není přesné, neboť bychom měli uvažovat závislost amplitudy na $1/D$. Pro takový případ se užívá opravené Cornuovy spirály, u níž velikost elementárních fázorů se příslušně zmenšuje se vzdáleností x' . Průběh intenzity v závislosti na vzdálenosti od hranice



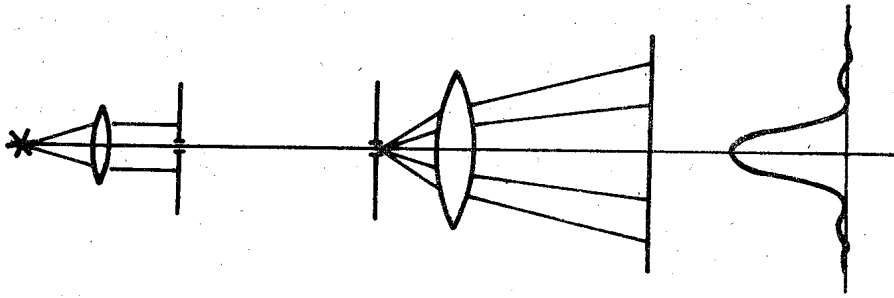
ideálního geometrického stínu hrany je na obr. 5.11. Je vidět, že v oblasti geometrického stínu ubývá intenzita monotonně, zatímco před touto hranicí se projevují oscilace, viditelné jako proužky klesající šířky a kontrastu.

5.4. Fraunhoferův ohyb na štěrbině a kruhovém otvoru

Obr.5.11. Průběh intenzity Fresnelova ohybu na hraně

Probereme nejdříve jev na štěrbině jakožto matematicky nejjednodušší. Experimentální uspořádání je

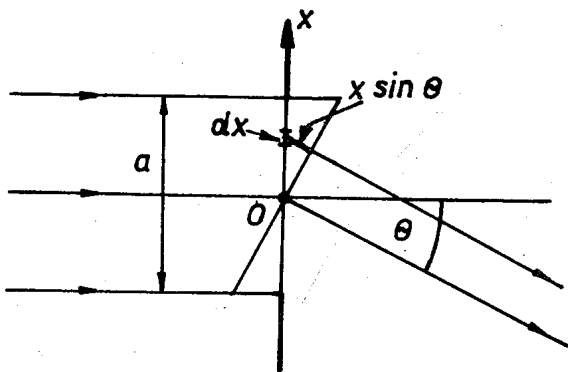
na obr. 5.12. Světlo z intenzivního zdroje usměrníme čočkou do rovnoběžného svazku, kterému postavíme do cesty první štěrbinu jakožto lineární koherentní zdroj válcových vlnoploch. V přiměřené vzdálenosti je druhá štěrbinu, která představuje aperturní otvor. S použitím laseru jako zdroje odpadá konden-



Obr.5.12. Fraunhoferův ohyb na štěrbině

sor a první štěrbina. Má-li být jev zřetelný, musí být štěrbinou velmi přesně rovnoběžné, což se dá docílit tím, že jedna z nich je otočná kolem osy celého uspořádání. Výsledek ohybu pozorujeme na dostatečně vzdáleném stínítku nebo v ohniskové rovině čočky postavené za druhou štěrbinou. Šířka aperturní štěrbinou a a vzdálenosti zdroje $š_1$ a projekčního stínítka musí splňovat kritérium Fraunhoferova ohybu, což se štěrbinami řádu $100 \mu\text{m}$ lze snadno docílit.

Ohybový jev s monochromatickým světlem se vyznačuje širokým světelným pruhem uprostřed (jehož šířka je nepřímo úměrná šířce štěrbinou) a střídavými tmavými a světlými pruhy po stranách rychle ubývající intenzity a klesající šířky. Na rozdíl od Fresnelova jevu na štěrbině za prvé, střední světelný pruh nejeví už žádnou další strukturu a za druhé, minima intenzity v tmavých pruzích jsou nulová.



Obr.5.13. Geometrie k Fraunhoferově ohybu na štěrbině

Poněvadž pozorujeme jev v rovnoběžných paprscích, budeme počítat průběh amplitudy a intenzity jako funkci odklonu θ od osy štěrbinou. Předpokládáme, že do štěrbinou přichází svazek rovnoběžných paprsků, takže rovina štěrbinou je částí vlnoplochy. Fázový rozdíl paprsků budeme vztahovat k paprsku procházejícímu středem štěrbinou (obr.5.13).

Úzký proužek dx vzdálený o x od středu štěrbiny přispívá k celkovému rozruchu $E(\theta)$ příspěvkem $B \exp(ikx \sin \theta) dx$. Je-li šířka štěrbiny a , je aperturní funkce nenulová v intervalu $(-a/2, a/2)$ a výsledný rozruch ve směru θ je dán integrálem

$$E(\theta) = B \int_{-a/2}^{a/2} \exp(ikx \sin \theta) dx \quad (5.15)$$

$$= \frac{-iB}{k \sin \theta} \left[\exp(ikx \sin \theta) \right]_{-a/2}^{a/2}$$

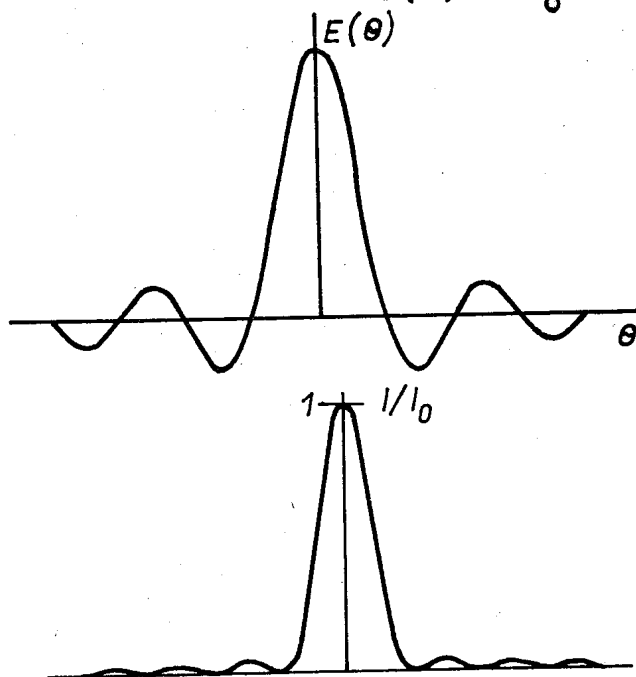
$$= B a \frac{\sin(1/2 k a \sin \theta)}{1/2 k a \sin \theta}$$

Zavedeme-li $B a = C$; $1/2 k a \sin \theta = u$, je

$$E(u) = C \frac{\sin u}{u} \quad (5.16)$$

Intensitu pak dostaneme povýšením $E^2(u)$. Zavedeme-li ještě $C^2 = I_0$, máme konečný vzorec

$$I(u) = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \quad (5.17)$$



I_0 má význam intensity v přímém směru ($\theta = 0$), tj. ve středu ohybového jevu, kde $\lim(\sin u/u) = 1$. Průběh amplitudy $E(u)$ a intensity $I(u)$ je na obr. 5.14. Minima intensity jsou určena podmínkou $\sin u = 0$ při $\theta \neq 0$

$$\frac{1}{2} k a \sin \theta_{\min} = N \pi ;$$

$$N = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$a \sin \theta_{\min} = N \lambda \quad (5.18)$$

Obr. 5.14. Průběh amplitudy (a) a intensity (b) při Fraunhoferově ohybu na štěrbině

Ze vzorce (5.17) je patrné, že minima jsou nulová.

Šířka středního světlého pásu je určena v podstatě vzdáleností minim prvního řádu, $\Delta \theta$. Při malých úhlech θ je přibližně $\sin \theta \approx \theta$, takže je

$$\Delta \theta = 2 \cdot \frac{\lambda}{a},$$

a tedy nepřímo úměrná šířce štěrbin.

Je vhodné upozornit na vnitřní souvislost posledního vzorce s podmínkou prostorové koherence $\theta_1 < \frac{\lambda}{a}$ (§ 4.6). Lze jej chápat tak, že svazek vycházející ze štěrbin o šířce a s úhlovou divergencí menší než $\Delta \theta/2 = \frac{\lambda}{a}$ můžeme pokládat ještě za koherentní, neboť žádné jeho dva paprsky nemají vzájemný dráhový rozdíl větší než $\lambda/2$. To znamená např., že kdybychom štěrbinu použili jako "čarový" zdroj v interferenčních (nebo ohybových) pokusech, pak podmínka viditelnosti interferenčního obrazce je, aby celá struktura, na níž má nastávat interference (ohyb) byla z místa štěrbin viditelná pod zorným úhlem menším než $\Delta \theta/2$, čili aby byla osvětlena svazkem nejvýše s poloviční šířkou středního ohybového maxima.

Z rov. (5.18) je také vidět, že pravý ohybový jev s oscilující intenzitou dostaneme jen tehdy, je-li $a > \lambda$. Při šířce štěrbin $a < \lambda$ bychom dostali intenzitu monotónně klesající s úhlem θ . Prakticky se ovšem tak úzká štěrbin konečné délky nedá realizovat.

Polohy maxim nejsou určeny tak jednoduchou podmínkou. Můžeme je odvodit, jestliže najdeme podmínku extrémů funkce $\sin u/u$ při $\theta \neq 0$

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\sin u}{u} \right) = \frac{u \cos u - \sin u}{u^2} = 0$$

Odtud podmínka maxima

$$u_{\max} = \operatorname{tg} u_{\max} \quad (5.19)$$

Tato transcendentní rovnice má pro vyšší řády N přibližná řešení

$$u \doteq (N + \frac{1}{2}) \pi$$

čili

$$a \sin \theta_{\max} \doteq (N + \frac{1}{2}) \lambda$$

Pro nízké hodnoty N tato podmínka je nepřesná. Tak např. 1. kořen rovnice (5.19) je

$$u_1 = \pm 1,43 \pi$$

zatímco přibližná formule dává

$$u_1 \doteq 1,5 \pi$$

Při jiných geometrických tvarech otvorů ani Fraunhoferův ohyb se nedá vyjádřit pomocí analytických funkcí. Tak např. ohyb na kruhovém otvoru vede k závislosti intenzity na odklonu θ od osy otvoru podle rovnice

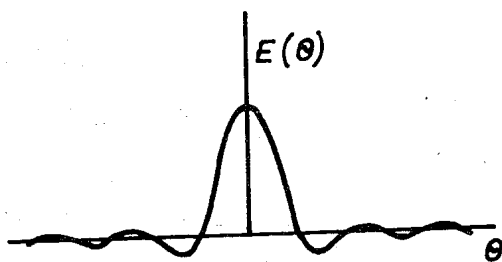
$$I = I_0 \frac{2J_1(\varphi)^2}{\varphi} \quad (5.20)$$

kde J_1 je Besselova funkce prvního druhu, řádu jedna a φ je zkratka za výraz

$$\varphi = k R \sin \theta$$

kde R je poloměr kruhového otvoru.

I_0 je intenzita ve středu ohybového obrazce ($\theta = 0$). Obrazec se vyznačuje tím, že je osově symetrický, se světlým kruhem uprostřed (na rozdíl od Fresnelova ohybu!) obklopeným tmavými a světlými kroužky. Průběh relativní intenzity I/I_0 je na obr. 5.15.



Obr. 5.15. Průběh relativní amplitudy při Fraunhoferově ohybu na kruhovém otvoru

Poloměr středního světlého kruhu (Airyho disku) je určen prvním kořenem rovnice $J_1(\varphi) = 0$. Ten je numericky $\varphi_0 = 3,832$, čili úhlový poloměr disku je

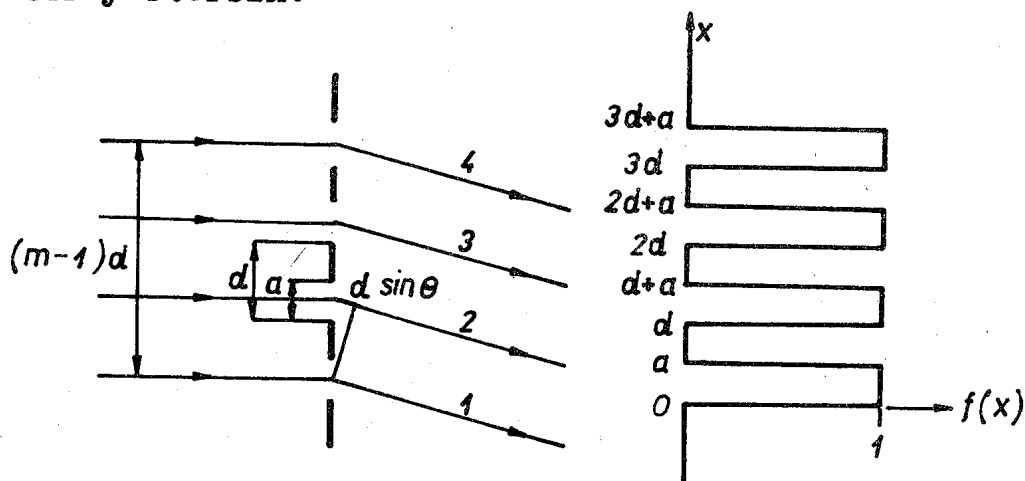
$$\sin \theta_0 \approx \theta_0 \approx \frac{3,832}{k R}$$

$$\theta_0 = \frac{1,22 \lambda}{D} \quad (5.21)$$

kde $D = 2R$ je průměr otvoru. Tento vzorec má mimořádnou důležitost v teorii optických přístrojů a byl odvozen Airym pro účely astronomie. Konečný poloměr ohybového terče totiž určuje minimální rozměr "obrazu" bodového zdroje vytvořeného přístrojem s konečným průměrem objektivu. Z toho důvodu se jeví stálice v sebe dokonalejším dalekohledu jako kotoučky konečného poloměru tím menšího, čím větší je průměr objektivu.

5.5. Ohyb na soustavě štěrbin. Optická mřížka

V tomto odstavci upřesníme popis jevu interference na soustavě rovnoběžných, stejných štěrbin, který jsme probrali v odst. 4.7 s tím, že započteme vliv ohybu v důsledku konečné šířky štěrbin.



Obr.5.16. Ohyb na soustavě rovnoběžných identických štěrbin

Máme opět nejjednodušší experimentální uspořádání, kdy na rovinné aperturní stínítko dopadá kolmo rovinná koherentní vlna. Stínítko obsahuje m rovnoběžných štěrbin o šířce a a vzdálenosti mezi štěrbinami d . (obr.5.16). Aperturní funkce je rovna jedné v intervalech $(0, a)$, $(d, d + a)$... $([m-1]d, [m-1]d + a)$, všude jinde je rovna nule.

Ve směru θ se sčítá m příspěvků od jednotlivých štěrbin, pro něž jsme si odvodili výraz (5.16). Fáze těchto příspěvků je vztažena k fázi středního paprsku ze štěrbin a nyní musíme respektovat vzájemné fázové rozdíly z jednotlivých štěrbin. Budeme tyto fáze vztahovat ke střednímu paprsku 1. štěrbin, takže příspěvek n -té štěrbin bude

$$E_n = C \frac{\sin u}{u} \cdot e^{i(n-1)k d \sin \theta}$$

Zavedeme pro zkrácení $k d \sin \theta = \gamma$

Celkový součet příspěvků m štěrbin je

$$E(\theta) = C \frac{\sin u}{u} \sum_{n=1}^m \exp[i(n-1)\gamma] \quad (5.22)$$

Na pravé straně (5.22) máme součet geometrické řady s kvocientem $e^{i\gamma}$, který nám dává

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m \exp[i(n-1)\gamma] &= \frac{1 - \exp(i m \gamma)}{1 - \exp(i \gamma)} = \\ &= \frac{\exp(i m \frac{\gamma}{2})}{\exp(i \frac{\gamma}{2})} \cdot \frac{\exp(-i m \frac{\gamma}{2}) - \exp(i m \frac{\gamma}{2})}{\exp(-i \frac{\gamma}{2}) - \exp(i \frac{\gamma}{2})} = \\ &= \exp[i(m-1) \frac{\gamma}{2}] \frac{\sin m \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \end{aligned}$$

Takže celkem máme

$$E(\theta) = \frac{\sin u}{u} \cdot \exp i \left[(m-1) \frac{\gamma}{2} \right] \cdot \frac{\sin(m \frac{\gamma}{2})}{\sin \frac{\gamma}{2}} \quad (5.23)$$

Pokud se týká amplitudy, je její závislost na úhlu γ dána součinem výrazů pro ohyb na jedné štěrbině a interferenci na m štěrbinách (podle rov.(4.16)). Výsledná fáze vlny je shodná s fází, která by příslušela paprsku procházejícímu středem celého souboru štěrbin (tj. v případě lichého m střednímu paprsku střední štěrbin).

Při výpočtu intenzity $E E^*$ vypadne exponenta, protože čtverec její absolutní hodnoty je roven jedné. Zavedeme-li opět I_0 jako intenzitu ve směru $\theta = 0$, tj.

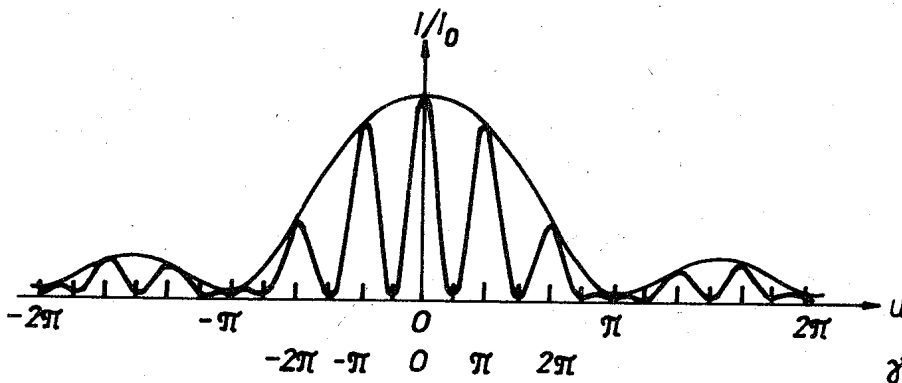
$$I_0 = m^2 C^2,$$

dostáváme výraz pro intenzitu ve směru θ

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \left[\frac{\sin(m\gamma/2)}{m \sin(\gamma/2)} \right]^{-2} \quad (5.24)$$

Vidíme, že s respektováním ohybu dostaneme průběh intenzity takový, že funkce odpovídající interferenci je modulována funkcí odpovídající ohybu na jediné štěrbíně. Tak např. pro dvojštěrbinu (Youngův pokus) dostáváme ($m = 2$)

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin \gamma}{2 \sin \gamma/2} \right)^2 = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$



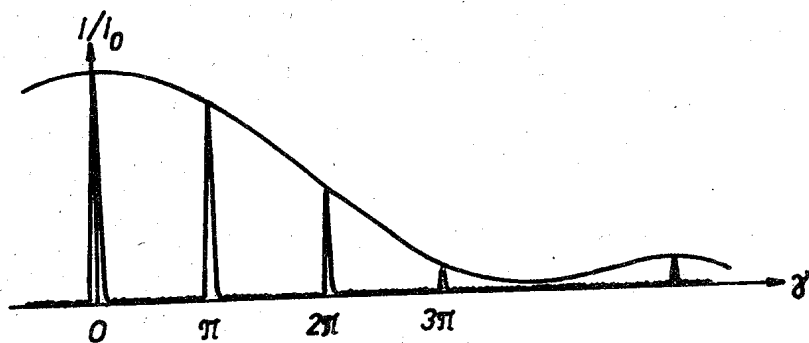
Obr.5.17. Fraunhoferův ohyb na dvojštěrbíně (Youngův pokus)

Na obr. 5.17 je znázorněn průběh relativní intenzity I/I_0 pro případ

$$\gamma = 3u \quad \text{čili} \\ d = \frac{3}{2} a.$$

V případě optické mřížky, kde m je velmi vel-

ké, bývá šířka štěrbiny a velmi malá, takže v rozmezí několika nízkých řádů hlavních maxim ($d \sin \theta = N \lambda$) se mění jen málo modulační faktor $(\sin u/u)^2$ a je přibližně roven jedné, takže maxima nízkých řádů jsou přibližně stejně vysoká. (obr. 5.18).



Obr. 5.18. Ohyb na soustavě mnoha štěrbin (na mřížce)

Při užití optické mřížky ve spektroskopii je důležitý pojem rozlišovací schopnosti. Jak jsme v této a minulé kapitole vyložili, ideálně monochromatické světlo dává

při ohybu na mřížce hlavní maxima jisté konečné šířky. Tato šířka je určena vzdáleností sekundárních minim nejblíže k hlavnímu maximu N -tého řádu. Z kap. 4 víme, že sekundární minimum se objeví vedle hlavního maxima N -tého řádu, jestliže se změní γ z hodnoty $N\pi$ o hodnotu $\pm \Delta\gamma = \pi/m$. Tomu odpovídá změna úhlu θ o $\Delta\theta_N$, pro niž platí :

$$\Delta\gamma = \frac{\pi}{m} = \frac{1}{2} k d \cos \theta \Delta\theta_N$$

$$\Delta\theta_N = \frac{\lambda}{m d \cos \theta} \quad (5.25)$$

Šířka "čáry" v mřížkovém spektru je pak dána hodnotou $2\Delta\theta_N$. Máme-li rozlišit dvě blízké spektrální čáry o vlnových délkách λ , $\lambda + \Delta\lambda$ v N -tém řádu ohybového spektra mřížky, musí úhlová odlehlost maxim $\Delta\theta_\lambda$ být minimálně rovna úhlové odlehlosti nejbližšího minima v sousedství maxima N -tého řádu. Z mřížkové rovnice $d \sin \theta = N\lambda$ plyne diferenciací

$$\Delta\theta_\lambda = \frac{N \Delta\lambda}{d \cos \theta} \quad (5.26)$$

Porovnáním (5.25) a (5.26) dostáváme podmínku rozlišitelnosti, kterou užíváme ve tvaru

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m N \quad (5.27)$$

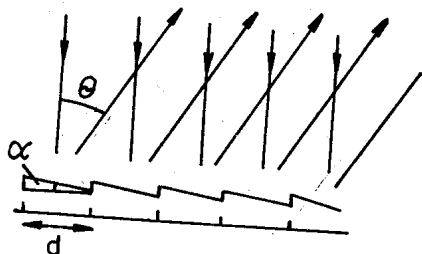
Veličinu $\lambda/\Delta\lambda$ nazýváme rozlišovací schopností a jak vidíme z (5.27), závisí tato rozlišovací schopnost jen na celkovém počtu vrypů mřížky m a řádu difrakce N . Samozřejmě, že takové rozlišovací schopnosti můžeme docílit jen tenkrát, když celá šířka mřížky ($m d$) se účastní ohybu, tj. celá mřížka je zasažena dopadajícím svazkem paprsků. Nedokonalosti při rytí mřížky způsobují, že v praxi se dosahuje asi 50 - 90 % hodnoty ideální rozlišovací schopnosti podle (5.27).

Tak např. mřížka o šířce ryté plochy 5 cm s mřížkovou konstantou $d = 1 \mu\text{m}$ obsahuje $m = 5 \cdot 10^{-2} / 10^{-6} = 5 \cdot 10^4$ vrypů (štěrbin). Rozlišovací schopnost v 1.řádu je v ideálním případě

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 5 \cdot 10^4$$

To znamená, že např. v okolí vlnové délky $\lambda = 500 \text{ nm}$ je nejmenší rozlišitelný rozdíl vlnových délek $\Delta\lambda = 5 \cdot 10^{-7} / (5 \cdot 10^4) = 10^{-11} \text{ m}$, tj. 1/100 nm.

V praxi se většinou užívá mřížek na odraz, které se získají rytím do skla a následujícím napařením silně odrážející tenké vrstvy kovu (Ag, Al). Často se užívá vrypů pilového tvaru, které mají sklon odrazových plošek volen tak, aby pro vybranou vlnovou délku a řád ohybu byl právě splněn zákon odrazu ve směru hlavního maxima (obr. 5.19). Většina intenzity pak je soustředěna do spektra jednoho řádu a ostatní řády jsou potlačeny.

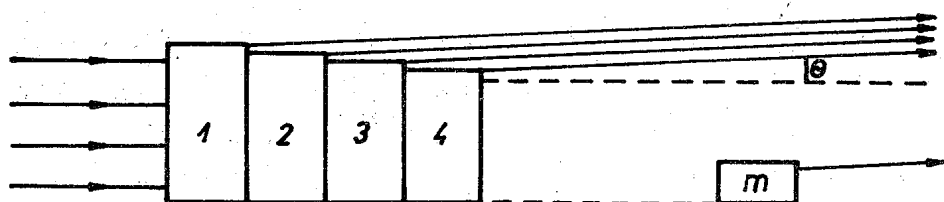


Obr. 5.19. Mřížka s odleskem

Uvádí se pak jako mřížka s odleskem pro vlnovou délku λ v N -tém řádu (blazed grating).

Rov. (5.27) naznačuje, že vysoké rozlišovací schopnosti můžeme docílit buď v nízkém řádu N s velkým počtem štěrbin (jak je tomu v běžné optické mřížce) nebo ve vysokém řádu s malým počtem štěrbin. Této druhé možnosti využívá Michelsonova stupňová mřížka. Je to sada 10 - 20 přesně stejně tlustých

skleněných desek s odstupňovanou výškou (obr. 5.20) těsně k sobě přitisknutých. Jestliže na čelní stěnu první desky dopadá téměř



dá téměř kolmo rovnoběžný svazek monochromatických paprsků, můžeme pod úhlem θ

Obr.5.20. Michelsonova stupňová mřížka

pozorovat výsledek interference a ohybu m svazků, které mají vůči sobě fázový rozdíl určený tloušťkou desek t , jejich indexem lomu n a odklonem θ . Je vidět, že v tomto případě i při úhlu $\theta = 0$ mají sousední paprsky vysoký rozdíl fází daný výrazem $\mu_0 = n k_0 t$, kde k_0 je vlnčet ve vzduchu. Je-li při úhlu $\theta \neq 0$ úhel lomu uvnitř desky roven β , pak je

$$\mu = n k_0 t \cos \beta$$

jako při interferenci na planparalelní vrstvě. Jinak působí stupňová mřížka jako optická a je možno užít rovnici (5.24) s použitím uvedeného výrazu pro μ , m je zde počet stupňů, a je výška jednoho stupně. Podmínka hlavních maxim je

$$\mu_{\max} = n k_0 t \cos \beta = 2 N \pi$$

a je z ní vidět, že se jedná o interferenční maxima vysokých řádů. Tak např. při tloušťce $t = 1$ cm a $n = 1,5$ je $N \approx 3 \cdot 10^4$. Rozlišovací schopnost při dvaceti stupních je pak

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 20 \cdot 3 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^5,$$

tedy asi o řád vyšší, nežli u běžné spektroskopické mřížky. Proto se používalo stupňové mřížky ve spektroskopii vysokého rozlišení stejným způsobem, jako Fabry-Perotova etalonu nebo Lummer-Gehrckeovy desky. Vzhledem k vysokým nárokům na přesné dodržení tloušťky a planparalelity (na $1/10 - 1/100 \lambda$), jakož i homogenitu skla jsou takové mřížky velmi drahé a dnes už velmi vzácné.

5.6. Ohyb na vícerozměrných periodických strukturách

Jak jsme poznali, ohybový obraz, tj. plošné či prostorové rozložení amplitudy a fáze světelného rozruchu $E(\vec{r})$ je jednoznačně přiřazeno struktuře aperturního stínítka, tj. aperturní funkci $f(\vec{r})$. Můžeme říci, že $E(\vec{r})$ je jistým zobrazením funkce $f(\vec{r})$. Vzniká tedy otázka, zda můžeme naopak ze znalosti $E(\vec{r})$ zpětně získat - rekonstruovat - funkci $f(\vec{r})$. Tato otázka je mimořádně důležitá pro zkoumání struktur pevných látek pomocí ohybu paprsků X, elektronů a neutronů.

Stavební kameny krystalických látek, tj. atomy, ionty, molekuly jsou uspořádány v periodické trojrozměrné mříži s prostorovými periodami řádu desetin nanometrů. Jestliže na takovou strukturu dopadá elektromagnetické vlnění, mohou atomy prostřednictvím svých elektronových obalů interagovat se zářením a rozptylovat je podobně jako jsme popsali v odstavci o dispersi. Jestliže se však použije vlnění o vlnové délce řádu meziatomových vzdáleností a menší, nelze použít popisu pomocí makroskopických parametrů ϵ , n , nýbrž se musí projednávat důsledek interference koherentních vln rozptýlených atomy do všech směrů.

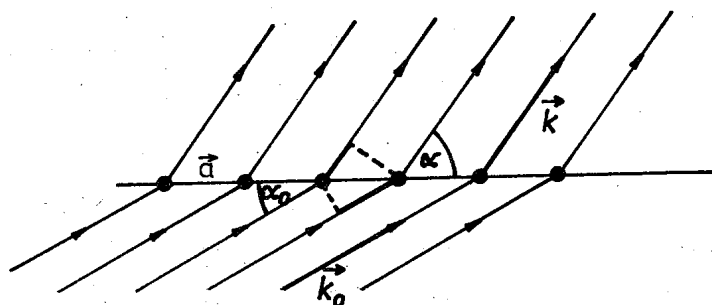
Jednoduchý popis tohoto jevu sice je formulován jako interference z ideálních bodových zdrojů, jak jsme ji definovali v kap. 4, avšak přesnější je popis pomocí ohybu na krystalové struktuře. Vhodné druhy záření jsou paprsky X s vlnovými délkami několik desetin až setin nm nebo svazky elektronů urychlených na energie desítek až stovek keV nebo pomalých (termických) neutronů s energiemi desetin eV. Posledně jmenovaná korpuskulární záření se projevují při interakci s atomárními útvary jako vlny o vlnové délce λ

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

kde h je Planckova konstanta a p je hybnost částice. Při výše uvedených energiích jsou příslušné vlnové délky právě vhodné velikosti pro ohyb na krystalových mřížkách. Omezíme se zde na ohyb paprsků X.

Experimentální uspořádání pro pozorování ohybu paprsků X na krystalu je principiálně jednoduché. Clonkami vymezený úzký svazek paprsků X se nechá dopadat na zkoumaný preparát a difraktované záření se registruje buď fotograficky na film, nebo elektronicky pomocí detektorů různého typu. Zjišťuje se směr ohybových maxim a jejich intenzita. Naznačíme jen základní myšlenku, protože podrobný výklad experimentálních metod a vyhodnocování je samostatným oborem fyziky pevných látek.

Nejjednodušší model krystalové struktury pro ohyb je periodické rozložení identických rozptylových bodových center. Pro jednoduchost budeme uvažovat jen ortogonální mříže, u nichž jsou mřížové body uspořádány v rozích elementárních



Obr. 5.21. Ohyb na řadě bodové

buněk o hranách \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . Vznikají tak tři systémy lineární periodicity navzájem ortogonální. Uvažme nejdříve jedinou řadu bodovou o periodě \vec{a} . Jestliže na tuto řadu rozptylových center dopadá rovnoběžný svazek paprsků

s vlnovým vektorem \vec{k}_0 , pak interferenční maximum nastane ve všech směrech \vec{k} , pro jejichž směrové úhly platí podle obr. 5.21

$$a(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) = N_1 \lambda \quad (N_1 \text{ celé})$$

Difraktované paprsky tedy leží na kuželi kolem osy kolineární s \vec{a} a o vrcholovém úhlu 2α .

Jestliže bychom měli rovinnou periodickou síť rozptylových bodů s periodami \vec{a} , \vec{b} , pak pro směry maxim α , β musí současně platit dvě podmínky

$$a(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) = N_1 \lambda$$

$$b(\cos \beta_0 - \cos \beta) = N_2 \lambda$$

Geometricky to znamená, že směry ohybových maxim jsou dány společnými přímkami dvou kuželů s navzájem kolmými osami rovnoběžnými s vektory \vec{a} , \vec{b} společným vrcholem a s vrcholovými úhly 2α , 2β . Takové dvě kuželové plochy mají obecně společné dvě přímky buď a) reálné různé, b) reálné totožné (kužely se dotýkají), nebo c) imaginární kužely se neprotínají). To znamená, že buď existují v daných řádech (N_1, N_2) dva směry, v nichž se paprsky ohýbají, nebo jediný, nebo žádný.

Rozšíření na trojrozměrnou mříž je zřejmé: tři podmínky pro směrové úhly α , β , γ musí být splněny, aby existovalo ohybové maximum v tomto směru. (Laueho podmínky)

$$\begin{aligned} a(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) &= N_1 \lambda \\ a(\cos \beta_0 - \cos \beta) &= N_2 \lambda \\ c(\cos \gamma_0 - \cos \gamma) &= N_3 \lambda \end{aligned} \quad (5.28)$$

Současně však platí v ortogonálních systémech $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, takže máme čtyři rovnice pro tři neznámé. Je tedy vidět, že máme-li dostat ohyb, nemůžeme volit zbývající parametry α_0 , β_0 , γ_0 , λ libovolně. Fyzikálně to znamená hlavně dvě alternativy:

a) Máme-li pevný směr dopadu paprsků vůči krystalu, musíme použít spojitého záření, tj. záření obsahující všechny vlnové délky λ v širším oboru, takže pro jistou kombinaci čísel N_1 N_2 N_3 jsou Laueho podmínky splněny pro určitou vlnovou délku z tohoto oboru. Každému pozorovanému směru maxima (α, β, γ) tedy odpovídá obecně jiná vlnová délka a jiné trojice čísel N_i .

b) Máme-li monochromatické světlo o pevné vlnové délce λ , nemůžeme volit orientaci krystalu vůči dopadajícímu svazku libovolně, nýbrž krystalem otáčíme kolem různých os tak, aby se měnily spojitě α_0 , β_0 , γ_0 , nebo použijeme práškového vzorku, v němž jsou orientace krystalických zrn zcela nahodilá a ohyb nastane na příznivě orientovaných zrnech.

Jak se dá nyní využít ohybu paprsků X a jiných pronikavých záření k získání informací o struktuře? Rámcová odpověď na základě našich dosavadních poznatků o ohybu by byla asi následující:

Skutečná ohybová struktura není jen jednoduchá bodová mříž, nýbrž složité prostorově periodické rozdělení střední hodnoty náboje valenčních elektronů a iontů, které způsobuje rozptyl záření s různou rozptylovou mohutností na různých místech mříže \vec{r} a v různých směrech \vec{k} . Matematické vyjádření této složité situace by byla jistá "aperturní funkce" $f(\vec{r}, \vec{k})$, jak ji známe z teorie ohybu. Výsledek difrakce se pak dostane sečtením příspěvků od všech objemových elementů krystalu dV s respektováním fáze v daném směru šíření \vec{k} . Jde o třírozměrnou analogii integrálu typu (5.10), kde $\varphi(\vec{r}, \vec{k})$ by bylo lineární funkcí souřadnic. (Frauhoferův ohyb):

$$E(\vec{k}) = C \cdot \int_{(V)} f(\vec{r}, \vec{k}) \exp [i \varphi(\vec{r}, \vec{k})] dV \quad (5.29)$$

Důsledek prostorové periodičnosti $f(\vec{r})$ se projeví v tom, že rozložení E v prostoru není spojitě, nýbrž vykazuje ostrá maxima v určitých směrech \vec{k} , podobně jako je tomu u interference mnoha svazků.

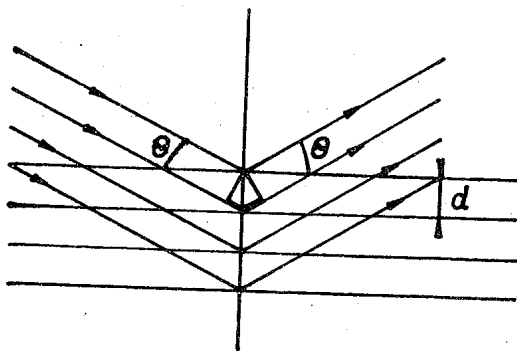
Praktická úloha je pak taková: Z pokusu získáme co možno kompletní údaje o intenzitě $E \cdot E^*$ jako funkce \vec{k} . Úkolem pak je rekonstruovat z těchto údajů funkci $f(\vec{r}, \vec{k})$ tak, aby vypočtené hodnoty intenzity pomocí (5.29) co nejlépe odpovídaly naměřeným hodnotám. Jak se funkce $f(\vec{r}, \vec{k})$ získává a jak se z ní dá usuzovat na prostorové rozložení jednotlivých atomů v elementární buňce, k tomu byly vypracovány složité početní metody, o kterých se zde nemůžeme zmiňovat.

Často se však spokojíme s mnohem skromnějším cílem, a to je určení mezirovinné vzdálenosti (mřížkové konstanty) jistého systému atomových rovin. Použijeme-li monochromatického záření, pak při vhodné orientaci krystalu dostáváme ohybové maximum ve zcela určitém směru. Platí zde známý zákon Braggův,

podle něž se ohyb pozoruje za podmínek, které by odpovídaly zákonu odrazu na jistém systému atomových rovin v krystalu, přičemž pro úhel θ měřený od roviny k paprskům dopadajícím a odraženým platí:

$$2d \sin \theta = N \lambda \quad (5.30)$$

kde d je mezirovinná vzdálenost v difraktujícím systému rovin (obr. 5.22).



Obr. 5.22. Braggův zákon pro ohyb paprsků X na soustavě atomových rovin

Tento zákon objevený empiricky nevysvětluje, proč právě jen za podmínky jakoby zrcadlového odrazu se projeví interferenční maximum. Dá se však snadno dokázat, že rov. (5.30) je jen zvláštním případem Laueho podmínek. Jestliže totiž rovnice (5.28) povýšíme a sečteme a zavedeme-li

$$\cos \alpha_0 \cos \alpha + \cos \beta_0 \cos \beta + \cos \gamma_0 \cos \gamma = \cos \delta$$

kde δ je úhel mezi dopadajícím a difraktovaným paprskem (obr. 5.22), dostaneme

$$2(1 - \cos \delta) = \left(\frac{N_1^2}{a^2} + \frac{N_2^2}{b^2} + \frac{N_3^2}{c^2} \right) \lambda^2$$

Dále zavedeme $\theta = \frac{\delta}{2}$, a $N_1 = Nh$; $N_2 = Nk$; $N_3 = Nl$, kde h , k , l jsou nesoudělná čísla a N je nejvyšší společný dělitel čísel N_1 , N_2 , N_3 dostáváme podmínku maxima ve tvaru

$$(2 \sin \theta)^2 = N^2 \left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} \right) \lambda^2$$

Jak se však v krystalografii odvozuje, je mezirovinná vzdálenost d soustavy rovin s Millerovými indexy $(h k l)$ v ortogonálních systémech dána výrazem

$$d_{hkl} = \left(\frac{h^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} + \frac{l^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Takže podmínku difrakce jsme uvedli na tvar Braggova zákona (5.30),

$$2 \sin \theta = N d_{hkl}^{-1} \lambda$$

Z této rovnice pak můžeme změřením úhlu θ obvykle pro $N = 1$ a ze znalosti λ určit mřížkovou konstantu d_{hkl} . Jestliže určíme d_{hkl} pro více kombinací indexů, můžeme určit základní translační vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} . U neortogonálních systémů se dá dokázat stejně tak ekvivalence Laueho a Braggovy formule. Výrazy pro d_{hkl} jsou v těch případech komplikovanější.

5.7. Fourierova transformace a ohyb světla Základy holografie

Při výpočtu Fraunhoferova ohybu na lineárních strukturách jsme se setkali s integrálem tvaru

$$\int f(x) e^{iKx} dx,$$

který připomíná předpis, podle kterého se určují komplexní amplitudy Fourierova rozkladu periodické funkce (rov. 1.12a). Aperturní funkce $f(x)$ je však obvykle neperiodická, takže rozklad na diskrétní spektrum harmonických funkcí není proveditelný. Vzniká otázka, zda můžeme obecnou (neperiodickou) funkci vyjádřit jako součet harmonických funkcí. Přechod od funkce periodické k neperiodické můžeme provést tak, že periodu (např. X_1) necháme vzrůstat do nekonečna ($X_1 \rightarrow \infty$). To je totéž, jako bychom u vlny nechali klesat základní vlnočet k_1 k nule ($k_1 \rightarrow 0$). Pak se zřejmě místo součtu diskrétních členů řady objeví integrál přes spojitě proměnný parametr. Tímto parametrem je u prostorové funkce spojitě proměnný vlnočet k nebo u časově periodické funkce spojitě proměnná frekvence ω .

Máme-li tedy rozumnou neperiodickou funkci $f(x)$ (požaduje se kvadratická integrabilita), pak podle integrální Fourierovy věty nazýváme Fourierovým obrazem (transformací) integrál

$$g(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iKx} dx \quad (5.32)$$

Z tohoto obrazu dostaneme obrácenou Fourierovou transformací, tj. se změnou znaménka u exponentu, původní funkci $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(K) e^{-iKx} dK \quad (5.33)$$

Ve funkci $g(K)$ můžeme tedy spatřovat spektrální rozklad funkce $f(x)$, z něžž můžeme "syntézou" (5.33) rekonstruovat původní funkci $f(x)$. Vidíme tedy, že v podstatě dvojí Fourierovo zobrazení rekonstruuje původní "předmět", tj. funkci $f(x)$.

Fourierův integrální teorém je možno rozšířit i na vícerozměrné prostory. V kartézském prostoru mějme tedy funkci $f(\vec{r})$ polohového vektoru $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$. Podobně i parametr K se stává vektorem (v reciprokém prostoru), $\vec{K} = i\vec{K}_x + j\vec{K}_y + k\vec{K}_z$. Fourierův obraz funkce $f(\vec{r})$ je pak

$$g(\vec{K}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int f(\vec{r}) \exp i(\vec{K} \cdot \vec{r}) d^3 r \quad (5.34)$$

(celý prostor r)

Analogicky bychom dostali zpětnou rekonstrukci

$$f(\vec{r}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \int g(\vec{K}) \exp [-i(\vec{K} \cdot \vec{r})] d^3 K \quad (5.35)$$

(celý prostor K)

Vrátíme-li se k našemu Frahoferovu ohybu na šterbině, má parametr K v rov. (5.32) význam $k \sin \theta$ (viz rov. 5.15). Prostorové rozložení světelného rozruchu $E(P)$ na stínítku je tedy v jistém měřítku určeno Fourierovým obrazem apertur-

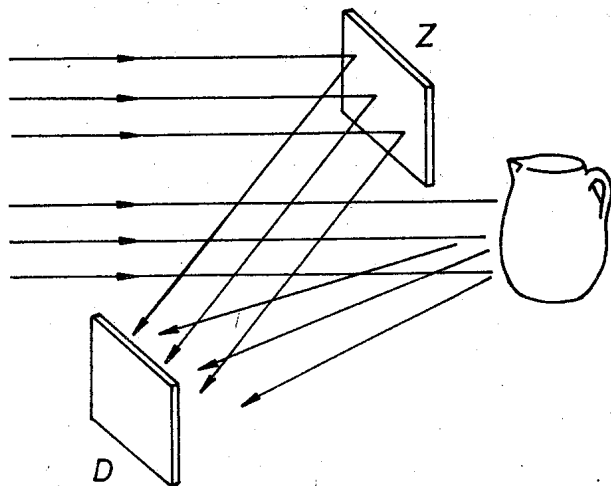
ní funkce. Základní vlastnost Fourierova zobrazení vnuká myšlenku, že kdybychom vyšli z aperturní funkce $g(K)$, v níž by parametr K byl opět ve vhodném měřítku převeden na prostorovou souřadnici x' , ($K = Mx'$), pak opětovným provedením chybu na "stínítku" popsaném funkcí $g(Mx') = g'(x')$ bychom dostali věrný obraz původního stínítka popsaného funkcí $f(x)$. Tato myšlenka je základem holografie, zobrazování bez použití zobrazovacích soustav podle geometrické optiky. Pro praktické provedení jsou tu dvě potíže:

- (1) funkce $g(K)$ je obecně komplexní, to znamená, že naše "stínítko" musí mít schopnost nejen prostorově modulovat amplitudu vlny, nýbrž i její fázi;
- (2) k přesné rekonstrukci $f(x)$ potřebujeme provést zobrazení funkce $g(K)$ v nekonečném integračním oboru. To by znamenalo, že bychom měli mít k dispozici stínítko $g'(x')$ nekonečných rozměrů. Ve skutečnosti vždy bude stínítko prostorově omezeno a zobrazení $f(x)$ nebude úplně věrné.

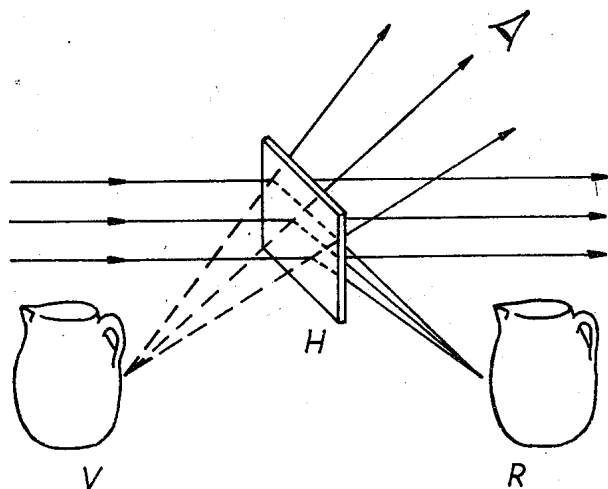
Tyto potíže se podařilo překonat rozvojem laserů, které umožňují získání intenzivních a širokých koherentních svazků.

Princip získání hologramu a rekonstrukce obrazu je na obr. 5.23. Hologram nazýváme zvláštní druh stínítka ve smyslu výše zmíněném.

Při získání hologramu postupujeme takto: Širokým svazkem koherentních paprsků osvětlíme předmět, který se má zobrazit. Část téhož svazku se odráží na rovinném zrcadle Z a dopadá na fotografickou desku jakožto referenční svazek. Světlo odražené na předmětu dopadá rovněž na desku a interferuje tam s referenčním svazkem (jde o koherentní svazky) (obr. 5.23a). Jestliže desku vyvoláme a negativ (nebo i diapositiv) osvětlíme svazkem koherentních paprsků pod stejným úhlem dopadu jako měl referenční svazek (obr. 5.23b) a pozorujeme směrem, kterým byl původně vzhledem k desce umístěn předmět, objeví se nám virtuální obraz na jeho místě a symetricky k rovině desky i reálný obraz předmětu.



(a)



(b)

Obr.5.23.(a) Snímání hologramu; Z-zrcadlo, D - fot. deska
 (b) Rekonstrukce holografického obrazu; H-hologram, R-reálný obraz, V-virtuální obraz

Jak si máme vyložit tento překvapující pokus? Budeme předpokládat, že osvětlující koherentní svazek je rovnoběžný. To není nutné, ale zjednodušuje to úlohu. Předmět můžeme považovat za trojrozměrnou ohybovou strukturu ($f(\vec{r})$), která v odraženém světle vytváří v rovině x,y citlivé vrstvy jisté světelné pole popsané amplitudou $a(x,y)$ a fází $\varphi(x,y)$ světelného rozruchu $U(x,y)$

$$U(x,y) = a(x,y) e^{i\varphi(x,y)} \quad (5.37)$$

kde $a(x,y)$ je reálná funkce. $U(x,y)$ je Fourierovým obrazem předmětu.

Světelné pole referenčního svazku je jednoduché pole rovinné vlny:

$$U_0(x,y) = a_0 e^{i(\vec{k}, \vec{r})} \quad (5.38)$$

Tento výraz přepíšeme na tvar

$$U_0(x,y) = a_0 e^{i(\mu x + \nu y)}$$

kde $\mu = k \cos \alpha$ a $\nu = k \cos \beta$ jsou průměty vlnového vektoru k do směrů x a y , tedy prostorové frekvence světelného pole.

Intensita $I(x,y)$ světelného pole, kterou registruje deska, je dána koherentní superposicí polí U a U_0

$$\begin{aligned} I(x,y) &= (U + U_0)(U + U_0)^* = a^2 + a_0^2 + \\ &+ a a_0 \exp[i(\varphi(x,y) - \mu x - \nu y)] + \\ &+ a a_0 \exp[-i(\varphi(x,y) - \mu x - \nu y)] = \\ &= a^2 + a_0^2 + 2a a_0 [\cos(\varphi(x,y) - \mu x - \nu y)] \end{aligned}$$

Po vyvolání získáme obraz, v němž zčernání je úměrné intenzitě dopadajícího světla. Jestliže vyrobíme pozitiv, bude jeho propustnost úměrná rozložení $I(x,y)$. Jestliže nyní osvětlíme hologram stejnou rovinnou vlnou, jako byl referenční svazek, budou body hologramu působit jako světelné koherentní zdroje s amplitudou a a fází, až na nějaký konstantní faktor, rovný $U_0(x,y) I(x,y)$.

Získali jsme tak fázově a amplitudově modulovanou ohybovou strukturu. Nová aperturní funkce tedy je

$$\begin{aligned} U_T(x,y) &= U_0 I = a_0(a^2 + a_0^2) \exp[i(\mu x + \nu y)] + \\ &+ a_0^2 a \exp(i\varphi) + a_0^2 a \exp[-i(\varphi - 2\mu x - 2\nu y)] \\ U_T &= (a^2 + a_0^2) U_0 + a_0^2 U + a^2 U^{-1} U_0^{-2} \end{aligned} \quad (5.39)$$

Interpretace tří členů na pravé straně (5.39) je taková:

První člen představuje přímý paprsek procházející hologramem. Druhý člen $a_0^2 U$ dává zřejmě až na faktor a_0^2 stejné rozložení světelného pole, jako dával předmět v rovině desky podle rov. (5.37). To znamená, že ohyb pocházející od této části světelného pole vytvoří virtuální prostorový obraz předmětu (zpětné Fourierovo zobrazení) v poloze relativně stejné vůči desce, v jaké se předmět nacházel. Třetí člen potřebuje

podrobnější rozbor, který zde nebudeme provádět. Ukazuje se, že je zodpovědný za reálný obraz.

Můžeme poznamenat, že je lhostejné, zda k rekonstrukci obrazu uijeme negativu nebo pozitivu hologramu. Rozdíl mezi nimi je jen ten, že celé světelné pole je posunuto fázově o π , což pozorovatel nemůže postřehnout.

Nakonec bychom chtěli zdůraznit význam referenčního svazku. Kdyby ho nebylo, deska by zaznamenala jen intenzitu $I = U U^*$ a informace o fázi by byla ztracena. Pomocí referenčního svazku je do fotografické emulze zakodována informace o fázi v důsledku interferenčního členu a použitím téhož svazku se při rekonstrukci obrazu tato informace dekoduje.

6. GEOMETRICKÁ OPTIKA

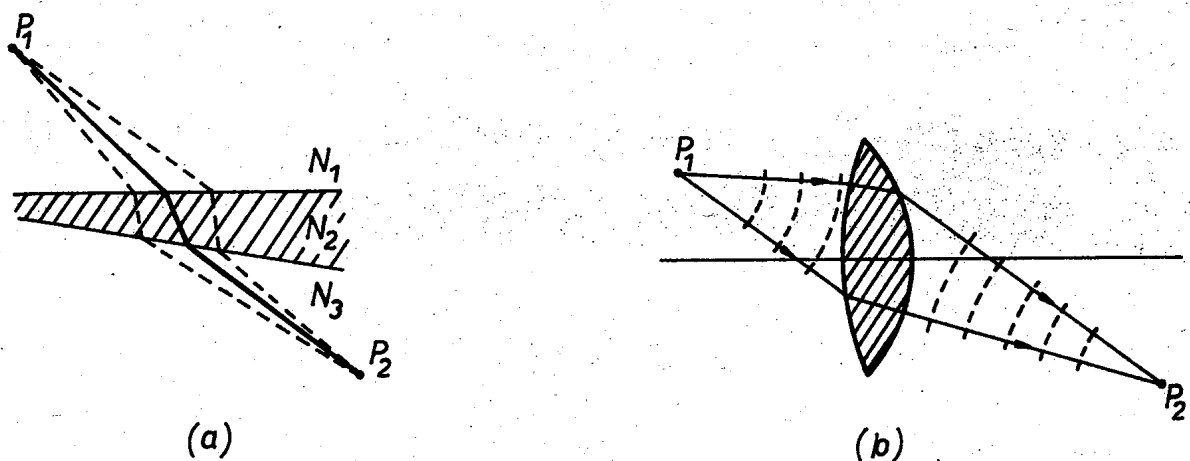
Geometrická optika jakožto nauka o optickém zobrazování a základ teorie optických přístrojů pracuje s idealizovaným pojmem světelného paprsku. Světelným paprskem v tomto smyslu rozumíme úzký svazek světla, jaký by vycházel z malého osvětleného otvoru v limitním případě, že příčný rozměr svazku by konvergoval k nule a stejně tak i vlnová délka světla. Jinak řečeno, v geometrické optice nepřihlížíme ke konečné délce vlny světla a pokládáme zákon o přímočarém šíření světla jako přesně platný. Stejně tak neuvažujeme jevy koherentního skládání vln, takže při úvahách o intenzitě se užívá prosté superposice intenzit, tj. zákona o nezávislosti paprsků.

Toto zjednodušení zcela vyhovuje pro rozsáhlou část geometrické optiky včetně vysoko rozvinuté teorie optických soustav. Jdeme-li však ke zkoumání struktury optických obrazů, tj. k otázkám rozlišovací schopnosti, pozbývá pojem paprsku jako geometrické přímky svůj dobrý smysl a je nutno vyjít z vlnové teorie světla, konkrétně z teorie ohybu.

V optických soustavách se modifikuje chod paprsků lomem a odrazem, jsou tedy zákony odrazu a lomu pro izotropní prostředí a index lomu průhledného prostředí téměř jedinými fyzikálními pojmy v geometrické optice, ostatní vše je geometrie.

6.1. Fermatův princip

Fermatův princip formuluje obecně podmínku, jakou musí splňovat světelný paprsek při průchodu libovolnými prostředími a rozhraními mezi nimi. Je vlastně aplikací Hamiltonova principu minimální akce z mechaniky na optiku. Fermatův princip říká, že optická dráha paprsku mezi dvěma pevnými body P_1 , P_2 (obr. 6.1), po níž se pohybuje skutečný paprsek, pro-



Obr.6.1. K Fermatovu principu

bíhá tak, že optická dráha, tj. $\int_{P_1}^{P_2} n \, ds$ je buď minimální, nebo maximální mezi všemi sousedními myslitelnými drahami v jistém regulárním okolí. Matematickou formulací je, že variace integrálu optické dráhy vymizí

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n \, ds = 0 \quad (6.1)$$

n je index lomu, obecně závislý na souřadnicích. Poněvadž je $n = \frac{c}{v}$, je jiná formulace Fermatova principu

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \delta \int_{P_1}^{P_2} dt = 0 \quad (6.1')$$

Z rov. (6.1') vyplývá, že světlo se šíří tak, aby doba, za niž paprsek dorazí z bodu P_1 do P_2 , byla extrémální. Jinak můžeme také říci, že optická dráha nebo doba proběhu paprsku má stacionární hodnotu vzhledem k malým variacím dráhy.

Z Fermatova principu plyne jako triviální důsledek přímočaré šíření v homogenním prostředí a dá se snadno odvodit zákon lomu a odrazu. Jiný důsledek je důležitý pro pozorování interferenčních jevů. Jestliže použijeme v pokusech o interferenci bodově zobrazující čočky, znamená to, že paprsky procházející z předmětového bodu do jeho obrazu musí mít v

důsledku platnosti Fermatova principu stejnou optickou dráhu, čočka nevnáší do pokusu žádný další rozdíl optických drah (obr. 6.1(b)).

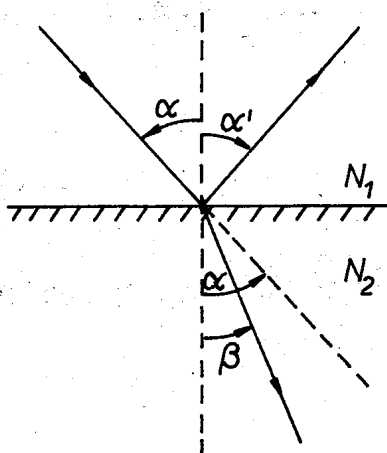
6.2. Odraz a lom na rovinné ploše

Zákony odrazu a lomu budeme v této kapitole formulovat podle obr. 6.2 takto:

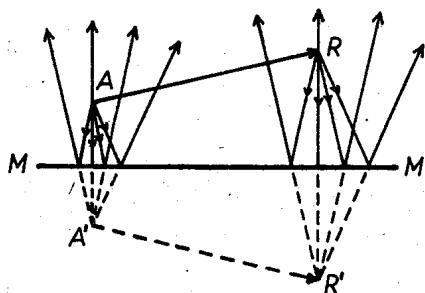
$$\alpha = -\alpha'$$

$$\sin \alpha = n \sin \beta; \quad n = \frac{N_2}{N_1}$$

Někdy bude výhodné nerozlišovat mezi odrazem a lomem tím způsobem, že budeme pokládat odraz za lom při relativním



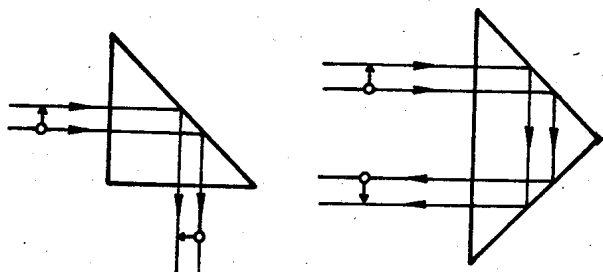
Obr.6.2. Orientace úhlů při odrazu a lomu



Obr.6.3. Zobrazení rovinným zrcadlem

indexu lomu $n_R = -1$. Zobrazení rovinným zrcadlem je znázorněno na obr. 6.3. Svazek paprsků vystupujících např. z bodu A se odráží podle zákona lomu na zrcadle a vstupuje do oka jako divergentní svazek. Původ světelného jevu vidíme zdánlivě v prodloužení paprsků bezprostředně do oka vstupujících, tedy v bodě A'. Poněvadž v bodě A' se neprotínají skutečné paprsky, nýbrž jen jejich prodloužení za rovinu zrcadla, je bod A' zdánlivým, či virtuálním obrazem bodu A. Body A, A' jsou symetricky sdružené vůči rovině zrcadla. Podobnost před-

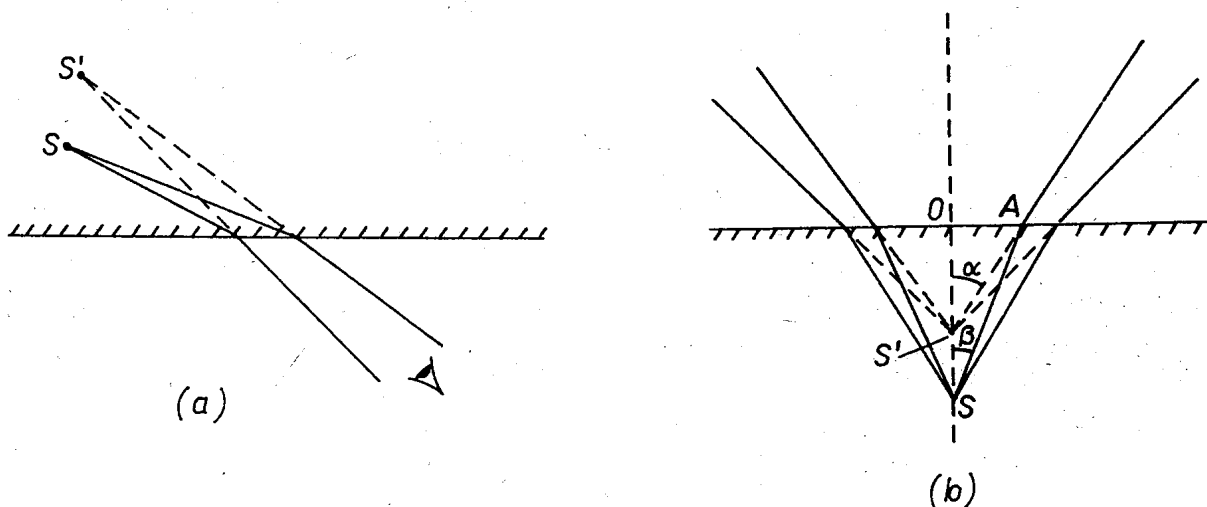
mětu a zrcadlového obrazu je takového charakteru, že se žádným geometrickým pohybem nedají ztotožnit, např. pravotočný šroub se zobrazuje jako levotočný. Zobrazení zrcadlem nemá žádné vady, neboť je přesně bodové a zákon odrazu nezávisí na vlnové délce.



Obr.6.4. Totálně reflektující hranoly

Jako zrcadlicích ploch se užívá jednak kovových vrstev, jednak stěn hranolů v uspořádání úplného odrazu. Některé případy užití 45° -ových skleněných hranolů jsou na obr. 6.4. Známe je např. užití dvou hranolů v uspořádání se zkříženými

lámavými hranami k obrácení obrazu v triedrech. Výhoda odrazových hranolů je v tom, že odrazivost je stálá, nepodléhá chemickým vlivům jako u kovové vrstvy.



Obr.6.5. Zobrazení rovinnou lámavou plochou

Zobrazení rovinnou lámavou plochou (obr. 6.5) už není bodové. Jednak je nutno respektovat dispersi indexu lomu, která způsobuje chromatickou vadu, jednak to, že poloha obrazu S' , záleží na tom, pod jakým sklonem pozorujeme zdroj S v druhém prostředí. Pouze při pozorování úzkým svazkem paprsků můžeme dostat přibližně bodové zobrazení. Pro svislý směr paprsků by byla splněna podmínka bodového zobrazení (obr.6.5b),

kdyby platilo $\operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \beta = \frac{OS'}{OS} = \text{konst.}$ Pro malé úhly v rámci přiblížení $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$, $\sin \beta \approx \operatorname{tg} \beta$ je tedy i zobrazení lomem na rovinné ploše s monochromatickým světlem bodové.

Důležitým prvkem optických přístrojů jsou lámavé hranoly. Lámavým hranolem rozumíme opticky homogenní těleso ohraničené částečně dvěma rovinnými stěnami. Průsečnice těchto lámavých stěn je lámavá hrana a úhel mezi stěnami je lámavý úhel. Nás nyní zajímá, jak prochází paprsek hranolem. Omezíme se na případ, že rovina dopadu na první stěnu hranolu je kolmá na lámavou hranu, takže celá dráha paprsku leží v této rovině (obr. 6.6). Je-li relativní index lomu hranolu



Obr. 6.6. Lom a rozklad světla hranolem

vůči obklopujícímu prostředí n , platí pro úhly paprsku s normálami stěn hranolu: $\sin \alpha_1 / \sin \beta_1 = \sin \alpha_2 / \sin \beta_2 = n$ a pro úhel lámavý φ a deviaci δ

$$\varphi = \beta_1 + \beta_2$$

$$\delta = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2 - \varphi$$

Je vidět, že deviaci δ jako funkci φ , n , α_1 nelze explicitě vyjádřit. Úloha se zjednoduší, jestliže dráha paprsku je symetrická podle roviny půlící lámavý úhel hranolu. Pak paprsek uvnitř hranolu prochází kolmo na symetrálu úhlu φ a platí $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Dá se ukázat, že při tomto uspořádání je úhel δ minimální a mluvíme proto o poloze hranolu odpovídající minimální deviaci. Takto se užívá hranolů ve spektrálních přístrojích. Označíme-li příslušnou deviaci δ_{\min} , platí

$$\delta_{\min} = 2\alpha - \varphi$$

Jestliže se nám podaří změřit minimální deviace pro určitou vlnovou délku a známe lámavý úhel φ , můžeme určit příslušný index lomu ze Snelliho zákona

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi + \delta_{\min})}{\sin \frac{1}{2}\varphi} \quad (6.2)$$

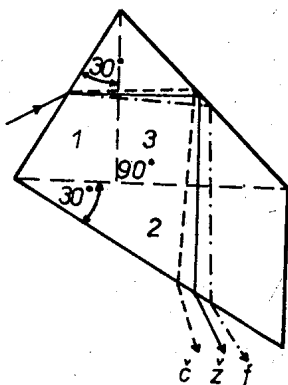
Pro malý lámavý úhel a malý úhel dopadu na čelní stěnu hranolu lze místo sinů psát přímo úhly, takže platí pro minimální deviace

$$n = \frac{\varphi + \delta_{\min}}{\varphi}$$

Ukazuje se, že za těchto podmínek deviace jen velmi málo závisí na úhlu dopadu α_1 , takže uvedený vztah se užívá pro explicitní vyjádření deviace. Vzhledem k tomu, že platí pro $\varphi \rightarrow 0$, označíme deviace δ_0 a platí

$$\delta_0 = (n - 1)\varphi \quad (6.3)$$

Měření úhlů pomocí spektrometrů jsou velmi přesná a proto měření pomocí hranolu je nejpřesnější metodou zjišťování indexu lomu, příp. jeho závislosti na vlnové délce.



Obr. 6.7. Hranol se stálou deviací 90°

60°-hranolu pod úhlem minimální deviace. Je tedy zřejmé, že právě paprsku s celkovou skutečnou deviací 90° odpovídá situace minimální deviace. Jestliže ve spektrosko-

Nevýhodou prostého hranolu je, že minimální deviace je v důsledku disperse n závislá na vlnové délce. Hranol Rutherfordův (obr. 6.7) využívá totálního odrazu a jeho tvar odpovídá vlastně dvěma hranolům s lámavým úhlem 30° a totálně odrážejícímu 45° -hranolu. Z obrázku 6.7 je patrné, že paprsek, který prochází pod 45° k odrazové stěně uvnitř hranolu, se láme způsobem, který by odpovídal lomu na jednom 60° -hranolu pod úhlem minimální deviace.

pu jsou kolimátor a dalekohled pevně nastaveny s osami k sobě kolmými, můžeme natáčením hranolu nastavit do osy dalekohledu různé části spektra, tj. různé vlnové délky stále za podmínky minimální deviace. Tento hranol ("s konstantní deviací") je velmi výhodný pro přímé odečítání vlnových délek pomocí mikrometrického otáčení hranolu nebo ke konstrukci monochromátorů.

6.3. Ideální zobrazení. Definice pojmů

Základní požadavek, který klademe na optický obraz je, aby byl věrný, tj. aby byl geometricky podobný předmětu, a ostrý, tj. aby zřetelně vykreslil jemné detaily předmětu. Geometricky to znamená, že v limitě bodového předmětu má odpovídat bodový obraz, přímce přímka, rovině rovina.

Co je to vlastně obraz bodu? Z bodového zdroje vychází tzv. homocentrický svazek, prochází soustavou a po jistém počtu lomů nebo odrazů vychází ven, v ideálním případě opět jako svazek homocentrický. Jeho střed je ideálním obrazem bodu. Takové zobrazení je bodové čili stigmatické. Mluvíme o skutečném obrazu, jestliže se ve středu svazku setkávají skutečné paprsky, obraz pak je možno zachytit na stínítku. Jestliže střed svazku leží jen v prodloužení výstupního svazku směrem do soustavy, mluvíme o virtuálním či neskutečném obrazu. Skutečný i virtuální obraz mohou sloužit jako předměty další zobrazovací soustavy.

Stigmatické zobrazení je pochopitelně jen přibližně možno realizovat. Podmínky realizace poznáme v dalším. Nyní se budeme zajímat o geometrický popis ideálního zobrazení.

Ideální stigmatický systém přiřazuje každému bodu předmětového prostoru (x, y, z) jeden a jen jeden bod obrazového prostoru (x', y', z') . Přiřazení je vratné, to znamená, že bod a jeho obraz jsou si vzájemně přiřazeny bez ohledu, který prostor označíme jako předmětový či obrazový. Budeme tedy

mluvit o dvojicích sdružených útvarů (bod, čára, plocha).

Oba prostory nejsou od sebe odděleny, nýbrž se navzájem prolínají, to znamená, že každý bod reálného prostoru může současně patřit do předmětového i obrazového prostoru.

Při věrném zobrazení tedy budeme požadovat vzájemné přiřazení bod \leftrightarrow bod, přímka \leftrightarrow přímka, rovina \leftrightarrow rovina. Obecná geometrická příbuznost, která splňuje tento požadavek, je kolineace. Souřadný systém v předmětovém prostoru bude x, y, z , jemu sdružený v obrazovém prostoru x', y', z' .

V našem výkladu se omezíme jen na prakticky důležité případ osové symetrie, tj. vyloučíme zde např. válcové čočky a zrcadla apod. Osu symetrie systému ztotožníme s osami x a x' . V důsledku symetrie jsou souřadnice y a z (y' a z') ekvivalentní a omezíme se tedy jen na popis v rovinách xy a $x'y'$. Při složených soustavách se omezíme jen na tzv. centrované, tj. takové, jejichž osy symetrie splývají.

Dále je nutno stanovit pravidla o znaménkách os a čítání úhlů: Námí použitá pravidla se liší od běžně užívaných v elementárních učebnicích, která se nehodí pro obecnější optické systémy. Jsou to čtyři pravidla, která platí bez ohledu na typ optické soustavy.

- 1) Kladný směr os x a x' je dán směrem paprsků vstupujících do systému. (Osy x, x' mají stejný smysl bez ohledu na to, zda jde o lámavé nebo odrazové plochy.)
- 2) Souřadné systémy (x, y, z) a (x', y', z') jsou stejně točivosti (tj. buď oba pravotočné nebo oba levotočné).
- 3) Úhly paprsků s osou čítáme od osy k paprsku a bereme jen ostré úhly. Za kladný směr otáčení bereme směr proti pohybu hodinových ručiček.
- 4) Poloměr křivosti lámané nebo odrazové plochy bereme jako kladný, je-li obrácena vypuklou stranou k dopadajícím paprskům (v opačném případě jako záporný).

Dále uvedeme definice nejdůležitějších pojmů, které charakterizují ideální zobrazovací soustavu.

(1) Ohniska F, F' :

jsou body sdružené úběžným bodům osy, tj. předmětové ohnisko F má obraz $(\infty, 0, 0)$, obrazové ohnisko F' je obrazem bodu $(-\infty, 0, 0)$. Roviny φ, φ' procházející ohnisky F, F' , kolmé k osám, nazýváme ohniskové.

(2) Příčné zvětšení Z :

je poměr příčných odlehlostí sdružených bodů

$$Z = \frac{y'}{y} \quad (6.3)$$

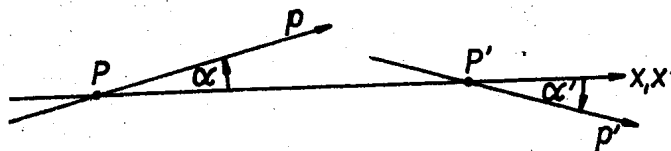
(3) Hlavní roviny $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$:

jsou roviny navzájem sdružené, kolmé k ose a takové, že všem dvojicím jejich sdružených bodů přísluší příčné zvětšení $Z = 1$

(4) Úhlové zvětšení

je poměr tangents úhlů, které svírají sdružené paprsky s osou (obr. 6.8)

$$\xi = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} \quad (6.4)$$



Obr.6.8. K pojmu úhlového zvětšení

(5) Uzlové body U, U' :

jsou dva navzájem sdružené body osy takové, že pro libovolné jimi procházející sdružené paprsky je $\xi = 1$

(6) Ohniskové vzdálenosti f, f' :

jsou vzdálenosti hlavních bodů od příslušných ohnisek

$$\begin{aligned} f &= \overrightarrow{FH} \\ f' &= \overrightarrow{F'H'} \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.4. Zobrazovací rovnice. Kardinální body soustavy

Obecné transformační vzorce pro kolineaci mají tvar

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1}{ax + by + cz + d} \quad \text{atd.},$$

tedy lomené výrazy lineárních polynomů se stejným jmenovatelem pro všechny souřadnice. Jestliže nyní zavedeme dříve uvedené omezení, tj. osovou symetrii podle os x, x' a dále položíme počátky souřadnic do ohnisek, tj.

$$x_F = y_F = 0 \quad \text{a} \quad x'_{F'} = y'_{F'} = 0,$$

zjednoduší se kolineární transformační vzorce na tvar

$$\begin{aligned} x' &= \frac{A}{x} & x &= \frac{A}{x'} \\ y' &= \frac{By}{x} & y &= \frac{A}{B} \frac{y'}{x'} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Použitím definice ohniskových délek a hlavních bodů dostaneme zobrazovací rovnice ve známém Newtonově tvaru. Z (6.3) a (6.6) plyne totiž

$$Z = \frac{y'}{y} = \frac{B}{x_H} = \frac{B x'_H}{A} = 1$$

a z definice (6.5) $x_H = f$, $x'_H = f'$.

Takže význam konstant A , B je

$$B = f; \quad \frac{A}{B} = f'; \quad A = ff'$$

Definitivní tvar transformačních rovnic je tedy:

$$\begin{aligned} x x' &= f f' & (a) \\ y' &= \frac{fy}{x} & (b) \\ y &= \frac{f' y'}{x'} & (c) \end{aligned} \quad (6.7)$$

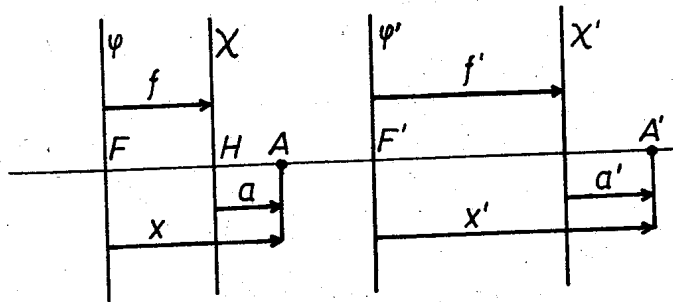
Optické soustavy klasifikujeme nyní podle znamének f a f' do čtyř typů:

	$f > 0$	$f < 0$
$ff' > 0$	(1) spojná katoptrická	(3) rozptylná katoptrická
$ff' < 0$	(2) spojná dioptrická	(4) rozptylná dioptrická

Příklady:

- (1) duté zrcadlo
- (2) spojná čočka
- (3) vypuklé zrcadlo
- (4) rozptylná čočka

Jiný tvar zobrazovacích rovnic, označovaný obvykle jako čočková rovnice, se dostane z (6.7), jestliže posuneme počátky souřadnic z ohnisek do hlavních bodů. Nové souřadnice podél osy soustavy označíme a, a' a platí podle obr. 6.9



$$x = a + f, \\ x' = a' + f'$$

Dosazením do (6.7) dostaneme po malé úpravě

Obr.6.9.K čočkové rovnici

$$\frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} + 1 = 0 \quad (a)$$

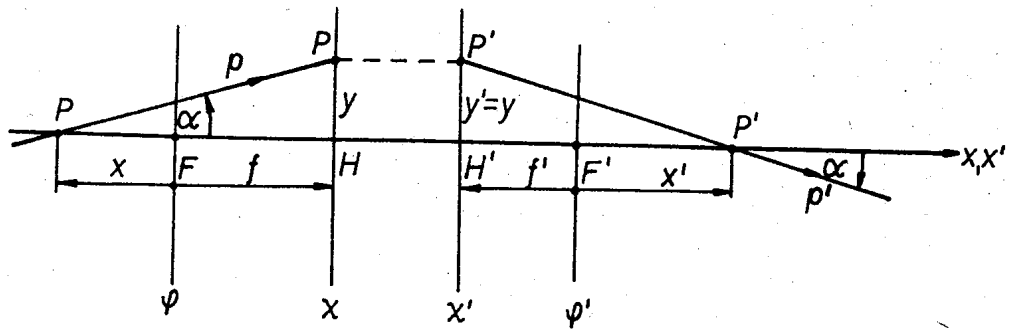
(6.8)

$$y' = \frac{f y}{a + f} \quad y = \frac{f' y'}{a' + f'} \quad (b)$$

Pozn.: Na rozdíl od znaménkové konvence užívané v elementárních textech, máme hlavně tyto odchylky:

- (a) u čoček jsou zásadně ohniskové vzdálenosti f, f' opačných znamének
- (b) u čočkové rovnice (6.8a) je opačné znaménko u absolutního členu proti běžné čočkové rovnici.

Zbývá ještě určit polohu uzlových bodů. K tomu najdeme výraz pro úhlové zvětšení pomocí obr. 6.10. Mějme paprsek AP a jeho obraz $A'P'$. Poněvadž bod P leží v hlavní rovině \mathcal{K} , bude



Obr.6.10. K odvození úhlového zvětšení

jeho obraz ve stejné výši v rovině \mathcal{X}' . Pro souřadnice bodů $A(x,0)$ $A'(x',0)$ platí rov.(6.7)(a) a tangenty úhlů paprsků s osou jsou

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{f - x} \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{y}{f' - x'}$$

Pro úhlové zvětšení tedy platí

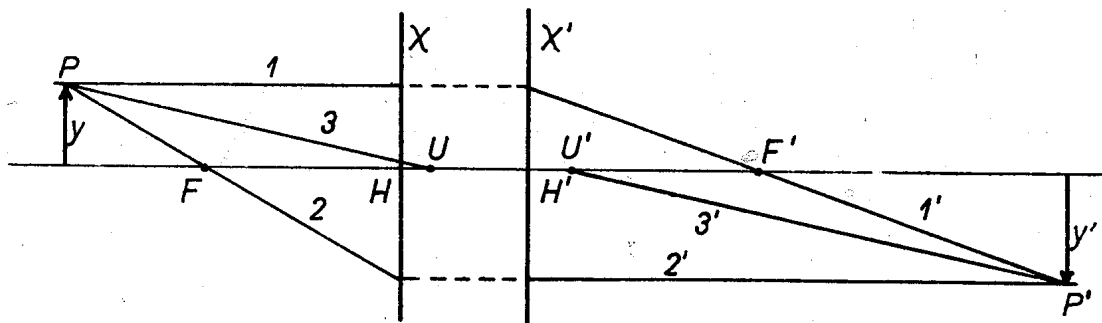
$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{f - x}{f' - x'} = \\ &= (f - x) \left(f' - \frac{ff'}{x} \right)^{-1} = \frac{f'}{x} \end{aligned}$$

a nebo

$$= - \frac{f}{x'}$$

Pro uzlové body o souřadnicích $(x_u, 0)$ a $(x'_u, 0)$ tedy platí $\xi = 1$, čili

$$x_u = -f' \quad x'_u = -f$$



Obr.6.11. Geometrická konstrukce obrazu mimoosového bodu

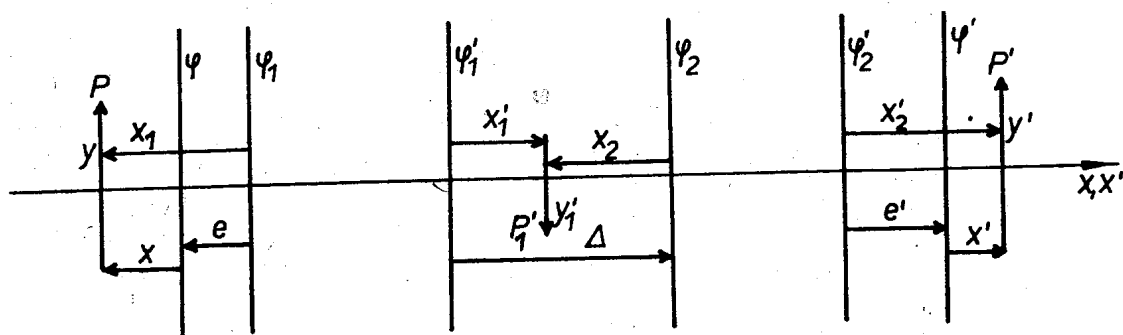
Jestliže tedy známe např. polohu F, F' , a ohniskové vzdálenosti f, f' , je tím jednoznačně určena poloha dalších kardinálních bodů H, H' , U, U' , pomocí nichž můžeme geometricky sestavit obraz libovolného bodu $P(x, y)$. Paprsky, které k tomu můžeme užít, jsou (obr. 6.11):

- (1) Paprsek jdoucí z bodu P ohniskem F protíná hlavní rovinu \mathcal{X} v bodě (f, y') ; zobrazuje se jako paprsek jdoucí rovnoběžně s osou ve vzdálenosti y' .
- (2) Paprsek jdoucí bodem P rovnoběžný s osou protíná rovinu \mathcal{X} v bodě (f, y) a vynořuje se jako paprsek jdoucí bodem (f', y) hlavní roviny \mathcal{X}' a ohniskem F' .
- (3) Paprsek jdoucí z bodu P uzlovým bodem U se zobrazuje jako paprsek jdoucí bodem U' rovnoběžně s původním paprskem.

Samozřejmě, stačí vždy jen dva z uvedených paprsků, abychom dostali v jejich průsečíku obraz bodu P . Třetí paprsek prochází tímž bodem automaticky.

6.5. Centrované soustavy

Jak jsme již uvedli, obraz vytvořený jednou optickou soustavou může sloužit jako předmět pro další soustavu. Z vlastností kolineárního zobrazení plyne, že soustavu složenou z několika jednodušších lze nahradit jedinou, opět kolineární. Nás zajímá jen případ centrovaných soustav, tj. s totožnými osami. (obr. 6.12). Pro jednoduchost uvažujme dvě soustavy



Obr. 6.14. Dvě centrované zobrazovací soustavy

dané polohami ohnisek F_1, F_1', F_2, F_2' a ohniskovými vzdálenostmi f_1, f_1', f_2, f_2' . Hledáme polohu ohnisek F, F' a ohniskové dálky f, f' soustavy ekvivalentní daným dvěma. Postupujeme tak, že pomocí dvojí transformace typu (6.7) soustavami 1 a 2 najdeme ohniska výsledné soustavy jakožto body sdružené s osovými body $x \rightarrow \infty$ a $x' \rightarrow \infty$. Potom najdeme transformační rovnice obecného bodu osy a uvedeme do tvaru rovnic (6.7), čímž získáme výrazy pro f a f' . Specifikace výsledné soustavy je podle obr. 6.12 dána vzdálenostmi e, e' ohnisek F, F' od původních ohnisek F_1 a F_2' . Rozhodujícím parametrem je optický interval Δ , tj. vzdálenost měřená od ohniska F_1' k ohnisku F_2 . V případě naznačeném na obr. 6.12 je $\Delta > 0$. Poněkud zdlouhavým, avšak elementárním výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} e &= + \frac{f_1 f_1'}{\Delta} & e' &= - \frac{f_2 f_2'}{\Delta} \\ f &= - \frac{f_1 f_2}{\Delta} & f' &= + \frac{f_1' f_2'}{\Delta} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Z výrazů pro výsledné ohniskové vzdálenosti (6.9) např. plyne, že dvě spojně soustavy ($f_1 > 0, f_2 > 0$) s kladným optickým intervalem dávají výslednou soustavu rozptylnou ($f < 0$), se záporným optickým intervalem soustavu spojnou. Jak se čtenář sám může přesvědčit, případ dvou rozptylných soustav se záporným intervalem $\Delta < 0$, který by domněle dával spojnou soustavu, se nedá realizovat. Jiný důsledek je např., že dvě katoptrické soustavy ($f_1 f_1' > 0, f_2 f_2' > 0$) dávají vždy soustavu dioptrickou ($ff' < 0$) stejně tak jako dvě dioptrické soustavy, bez ohledu na znaménko Δ .

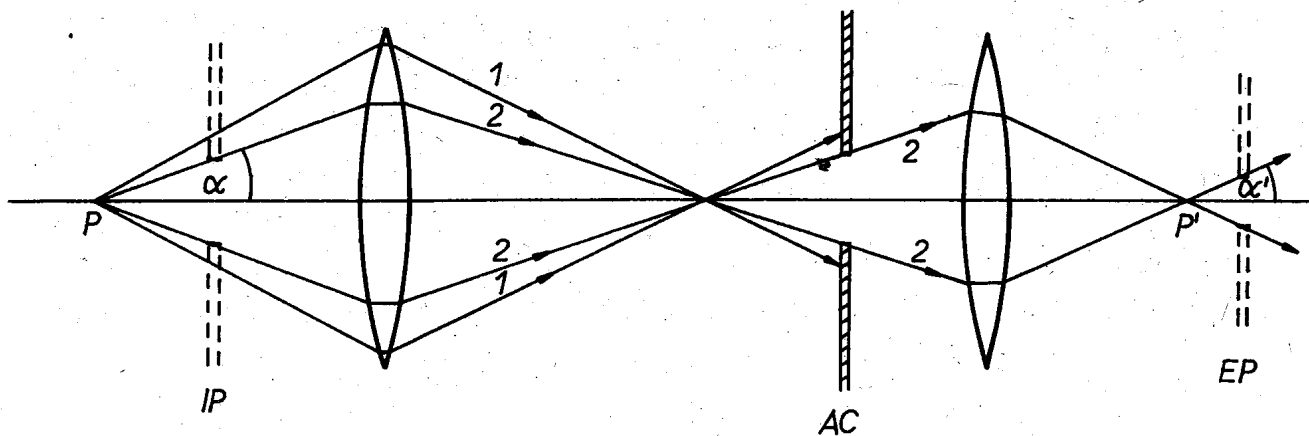
Jestliže nyní známe hlavní rysy geometrického popisu kolineárních zobrazovacích soustav, vzniká otázka, do jaké míry se reálné soustavy mohou přiblížit ideálnímu modelu. Pro praxi mají pro optické zobrazování význam především lámavé a odrazové plochy sférické, tj. sférické čočky a zrcadla. Jak v dalším odstavci uvidíme, splňuje jediná aktivní sférická plo-

cha požadavky bodového zobrazení bodů v Gaussově "nitkovém" prostoru, tj. při zobrazení bodů blízkých k ose úzkým svazkem paprsků svírajících s osou jen malé úhly. Zvětšováním počtu lámavých ploch s použitím materiálů o různém indexu lomu nebo užitím asférických ploch lze se více přiblížit k ideálnímu modelu stigmatické zobrazovací soustavy, ovšem toto přiblížení má svoje hranice ekonomické a technické. Na štěstí v praxi obvykle požadujeme, aby soustava pracovala jen za jistých omezených podmínek (např. objektiv mikroskopu zobrazuje vždy jen jedinou pevnou předmětovou rovinu, dalekohled zobrazuje jen nekonečně vzdálené předměty), což úlohu velmi usnadňuje.

6.6. Clony, pupily a apertura

Clonou v osově symetrických systémech rozumíme kruhový otvor v nepropustné stěně, který omezuje svazek paprsků účastnících se zobrazení. V tomto smyslu obruby čoček a zrcadel počítáme mezi clony. Skutečné clony se vkládají do optických systémů za účelem zmenšení zobrazovacích vad, vymezení zorného pole nebo pro regulaci světelného toku (irisové clony s měnitelným průměrem otvoru). Clony a obruby čoček rozhodují o celkovém světelném toku, který projde systémem a tím způsobem i o intenzitě osvětlení obrazu.

Zobrazovací systém (např. dalekohled) se skládá obecně z několika podsystémů (objektiv, okulár), z nichž je každý opět tvořen několika členy (jednotlivé čočky) a kromě toho v něm jsou vestavěny clony. Kdybychom nyní sledovali vstupní svazek z osového bodu předmětu, zjistili bychom, že jedna z clon nebo jedna z objímek čoček systému tento svazek nejvíce omezuje. Na obr. 6.13 je to např. clona AC. Tato clona se nazývá aperturní. Mimoходом, toto omezení svazku způsobuje, že některé členy systému nejsou využity (u nás čočka \check{C}_1 , zona mezi paprsky 1 a 2). Jestliže jsme našli, která ze clon působí jako aperturní, zobrazíme tuto clonu tou částí optického



Obr.6.13. Aperturní clona, vstupní a výstupní pupila

systému, která se nachází před aperturní clonou, takže dostaneme její obraz IP , který může být reálný nebo virtuální. Tomuto obrazu říkáme vstupní pupila. Úhel α , který svírají s osou paprsky z osového bodu P procházející okrajem vstupní pupily, se nazývá aperturní úhel. Jeho dvojnásobek je tedy zorný úhel, pod nímž vidíme vstupní pupilu z osového bodu roviny předmětu. Aperturní clonu můžeme tedy vyhledat takovýmto postupem: Zobrazíme každou clonu celého systému tou částí systému, která je před ní směrem k předmětu. Získáme tak řadu obrazů clon. Ten z obrazů, který se jeví z místa předmětu pod nejmenším zorným úhlem, je vstupní pupila a příslušná clona je aperturní.

Analogicky, část systému za aperturní clonou vytváří její obraz EP . Tento obraz se nazývá výstupní pupila. Je zřejmé, že výstupní pupila je obraz vstupní pupily vytvořený celým systémem.

V teorii mikroskopu má význam veličina nazvaná numeric-kou aperturou N.A. Je to součin z indexu lomu prostředí na straně předmětu násobený sinem aperturního úhlu.

$$N.A. = N \sin \alpha$$

Tato veličina rozhoduje jednak o světelnosti obrazu, jednak o rozlišovací schopnosti objektivu. Z ekonomických důvodů je často účelné, aby aperturní clonou byla objímka čelní čočky systému. Pak je totiž plocha čočky plně využita. U fotogra-

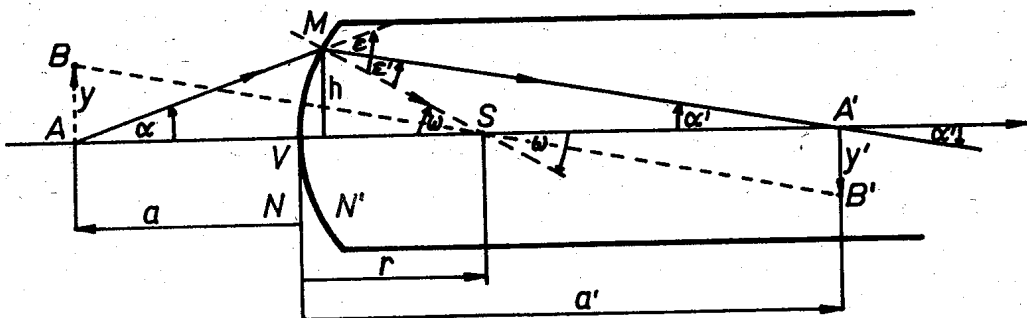
fických objektivů se charakterizuje apertura pomocí tzv. relativního otvoru nebo ohniskového poměru F , což je poměr průměru vstupní pupily D objektivu k ohniskové vzdálenosti f

$$F = D/f$$

a je to tedy přibližně dvojnásobek tangenty aperturního úhlu pro předmět v ohniskové rovině.

6.7. Lom a odraz na kulové ploše

Lámací kulová plocha ohraničuje dvě prostředí o indexech lomu N , N' . Její poloměr r jsme na obr. 6.14. zvolili jako kladný (je obrácena vypouklou stranou k dopadajícím paprskům). Jestliže se omezíme na paraxiální paprsky, čili Gaussův prostor, jsou všechny úhly malé a nemusíme činit rozdíl mezi úhlem, jeho sinem nebo tangentou. Dokážeme,



Obr.6.14. Zobrazení lomem na kulové ploše

že obraz osového bodu A je bodový, tj. že všechny paprsky (paraxiální) z bodu A se lámou do bodu A' . Podle obr. 6.14 platí:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \alpha - \omega \\ \omega &= \alpha' - \epsilon'; \quad \epsilon' = \alpha' - \omega \\ \alpha &\doteq -\frac{h}{a} \quad \alpha' \doteq -\frac{h}{a'} \quad \omega \doteq -\frac{h}{r} \end{aligned}$$

Použijeme nyní Snelliův zákon pro malé úhly:

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{N'}{N} = \frac{\alpha - \omega}{\alpha' - \omega}$$

Dosazením za úhly α , α' , ω po malé úpravě dostaneme zobrazovací rovnici

$$\frac{N}{a} - \frac{N'}{a'} + \frac{N' - N}{r} = 0 \quad (6.10)$$

Tato rovnice neobsahuje h a dokazuje uvedené tvrzení o bodovém zobrazení. Rov. 6.10 řešíme podle a' :

$$a' = \frac{N' r a}{(N' - N)a + Nr} \quad (6.11)$$

Transformační rovnici pro souřadnici y mimoosového bodu (stále v Gaussově prostoru) dostaneme myšleným pootočením celé konstrukce (6.14) kolem středu křivosti S . o takový úhel, aby se bod A posunul bočně o vzdálenost y . Z obr. 6.14 s respektováním správných znamének vyplývá

$$\frac{y'}{y} = \frac{r - a'}{r - a}$$

a dosazením za a' z (6.11) dostaneme

$$y' = \frac{N r y}{(N' - N)a + Nr} \quad (6.12)$$

Rovnice (6.11) a (6.12) splňují požadavky kolineární transformace, takže jsme dokázali, že zobrazení sférickou plochou je kolineární. Vyšetříme ještě parametry soustavy. Polohu ohnisek dostaneme pro limity $a \rightarrow \infty$ příp. $a' \rightarrow \infty$ (zavedeme $N'/N = n$)

$$a'_F = \frac{N' r}{N' - N} = \frac{n r}{n - 1}$$

$$a_F = \frac{N r}{N' - N} = - \frac{r}{n - 1}$$

Poloha hlavních rovin je určena podmínkou $y'/y = 1$. Ihned je patrné (z rov. 6.12), že tato podmínka je splněna pro $a_H = a_H' = 0$. Hlavní roviny tedy splývají a procházejí vrcholem plochy. Podle definic (6.5) jsou ohniskové vzdálenosti

$$f = a_H - a_F = \frac{r}{n - 1} \quad (6.13)$$

$$f' = a_H' - a_F' = - \frac{nr}{n - 1} \quad (6.14)$$

Uzlové body mají souřadnice

$$a_u = a_F - f' = - (f + f')$$

$$a_u' = a_F' - f = - (f - f') = a_u$$

Dosadíme-li sem z rov. (6.13) a (6.14), dostaneme

$$a_u = a_u' = - \left(\frac{r}{n - 1} - \frac{nr}{n - 1} \right) = r$$

$$U \equiv U' \equiv S$$

Oba uzlové body splývají se středem křivosti lámavé plochy. To je zcela pochopitelné, neboť paprsky procházející středem křivosti se lomem neodchylují, tj. sdružené paprsky leží v téže přímce.

Pokud se týká typu soustavy, závisí na n a znaménku r . V každém případě je to soustava dipotrická (= lámavá) a např. pro $n > 1$ a $r > 0$ je to soustava spojná, pro $n > 1$, $r < 0$ rozptylná.

Odvozených výsledků můžeme ihned použít pro sférická zrcadla, jestliže dosadíme $n = -1$. Ohniskové vzdálenosti pak jsou podle (6.13) a (6.14)

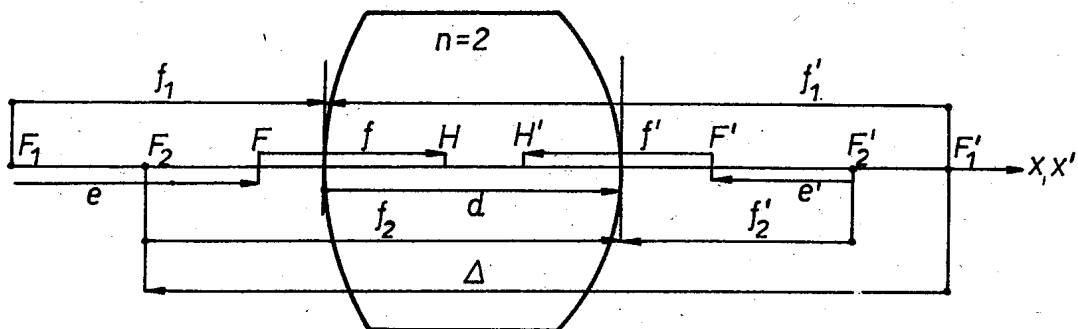
$$f = f' = - \frac{r}{2}$$

To znamená, že ohniska leží vždy na polovině vzdálenosti mezi vrcholem a středem křivosti, tj. u dutého zrcadla ($r < 0$)

před zrcadlem, u vypuklého ($r > 0$) za zrcadlem. Stejně jako pro lámavou plochu platí i pro zrcadla, že hlavní roviny jdou vrcholem a uzlové body splývají se středem křivosti.

6.8. Čočky

Čočkou budeme rozumět optickou soustavu tvořenou dvěma sférickými plochami (z nichž nejvýše jedna může mít $r = \infty$, tj. být rovinná) omezuje prostředí o indexu lomu N . Pro jednoduchost budeme předpokládat, že po obou stranách čočky je stejné prostředí o indexu lomu N' , takže pro lom na přední straně čočky máme relativní index lomu $n = N'/N$ a na zadní straně $n' = 1/n$. Čelní stěna čočky tvoří optickou soustavu



Obr. 6.15. Tlustá čočka

o ohniskových vzdálenostech $f_1 = r_1/(n-1)$, $f_1' = -nr_1/(n-1)$, druhá stěna pak má $f_2 = -nr_2/(n-1)$, $f_2' = r_2/(n-1)$. Obě lámavé plochy čočky tvoří centrovanou složenou soustavu, jejíž osa je spojnice středů. K výpočtu parametrů této soustavy potřebujeme znát ještě optický interval Δ . Podle obr. 6.15 je

$$\Delta = \overrightarrow{F_1' F_2} = f_1' - (f_2 - d)$$

Po dosazení z (6.13) a (6.14)

$$\Delta = \frac{d(n-1) + (r_2 - r_1)n}{n-1} = \frac{R}{n-1}$$

kde jsme zavedli $R = d(n-1) + (r_2 - r_1)n$.

Výsledné ohniskové vzdálenosti pak jsou podle (6.9):

$$f = \frac{n r_1 r_2}{(n - 1)R} \quad (6.15)$$

$$f' = - \frac{n r_1 r_2}{(n - 1)R} = - f \quad (6.15')$$

Vidíme, že absolutní velikosti f a f' jsou stejné, pokud je na obou stranách čočky stejné prostředí. Z toho ihned plyne, že hlavní a uzlové body splývají, tj. $H \equiv U$, $H' \equiv U'$. K úplnému určení by bylo třeba ještě stanovit polohu hlavních rovin nebo ohniskových rovin vůči vrcholům pomocí rovnic (6.9), tím se však zdržovat nebudeme. Ponecháme čtenáři např. dokázat, že je-li jedna stěna čočky rovinná (ploskovypuklá nebo ploskodutá), je jedna z hlavních rovin tečná ke zbývající sférické ploše.

Často bývá tloušťka čočky d malá proti poloměrům křivosti a pak v rov. (6.15) lze užít vztahu $R \doteq (r_2 - r_1)n$, s nímž dostaneme vzorec pro ohniskovou vzdálenost tenké čočky

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)} \quad (6.16)$$

Místo ohniskové vzdálenosti specifikujeme čočku pomocí optické moci D v dioptriích, což je reciproká ohnisková vzdálenost v metrech

$$\frac{1}{f} = D = (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (6.16')$$

S ohledem na vztah $f = - f'$ má čočková rovnice pro tenkou čočku s naší znaménkovou konvencí tvar

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} + (n-1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 0$$

Zde měříme a a a' od vrcholu čočky směrem dopadajících paprsků a říkáme jí proto vrcholová.

U spojných čoček máme $f > 0$, $f' < 0$ a u rozptylných $f < 0$, $f' > 0$. U rozptylných tedy leží předmětové ohnisko za čočkou a obrazové před čočkou.

Máme-li centrovanou soustavu dvou tenkých čoček ve vzdálenosti v , platí pro optický interval Δ složené soustavy analogicky podle obr. 6.15:

$$\Delta = v + f'_1 - f_2 = v - f_1 - f_2$$

Výsledná optická mohutnost je pak podle (6.9)

$$D = - \frac{\Delta}{f_1 f_2} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{v}{f_1 f_2}$$

Jestliže nadto jsou čočky v těsném dotyku ($v \rightarrow 0$), je

$$D = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = D_1 + D_2,$$

to znamená, že se sčítají optické mohutnosti.

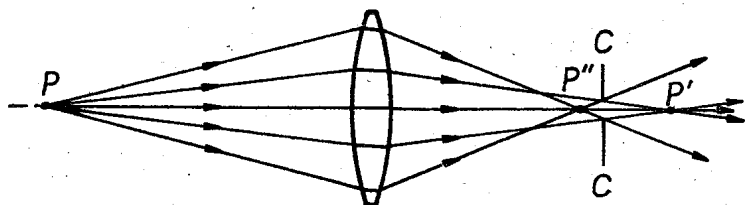
6.9. Vady (aberrace) zobrazování

Stigmatické zobrazování sférickými lámavými plochami je splněno jen pro velmi úzký svazek monochromatických paprsků a pro body v blízkém okolí osy. V praxi s tímto omezením se nemůžeme spokojit, neboť potřebujeme zobrazovat co nejostřeji i mimoosové body, a to širším svazkem (z důvodů světelnosti obrazu) a bílým (složeným) světlem. Při opuštění hranic Gaussova prostoru zobrazení není stigmatické, tj. původní homocentrický svazek se zobrazuje jako nehomocentrický, tj. jeho vlnoplocha není kulová. Jeho příčný průřez má všude konečný rozměr a v místě největšího zúžení, které při reálném zobrazení pokládáme za obraz bodu, máme jisté plošné rozložení intenzity s více či méně širokým maximem uprostřed. (Ideální zobrazení by dávalo rozložení intenzity v podobě funkce δ). Kromě této základní vady zobrazení jsou ještě další, které mohou vznikat i při zachování stigmatického zobrazení a které souvisí s odchylkami od kolineárního vztahu mezi obrazem a předmětem. Je to zejména zakřivování obrazů přímek a rovin.

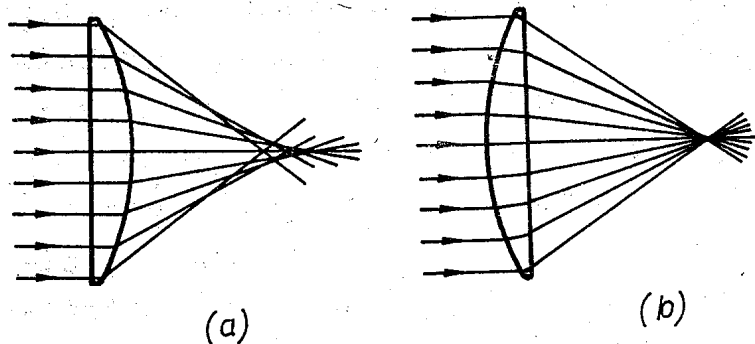
U jednoduché čočky závisí poloha a velikost obrazu na ohniskové dálce a ta je funkcí indexu lomu. V důsledku disperse je tedy hodnota ohniskové dálky závislá na barvě použitého světla, a to způsobuje tzv. chromatické vady. Tato okolnost komplikuje korekci ostatních vad. Projednáme nejdříve nejdůležitější vady zobrazení a naznačíme způsoby, jak se dají odstranit bez ohledu na chromatické vady.

(a) Sférická vada

vzniká při zobrazení bodů osových a blízkých k ose širokým svazkem paprsků. U spojně čočky paprsky, které procházejí blízko osy, se protínají dále od čočky, než paprsky procházející okrajem čočky (obr. 6.16). Paprsky obalují tzv. kaustickou plochu. Velikost vady můžeme např.

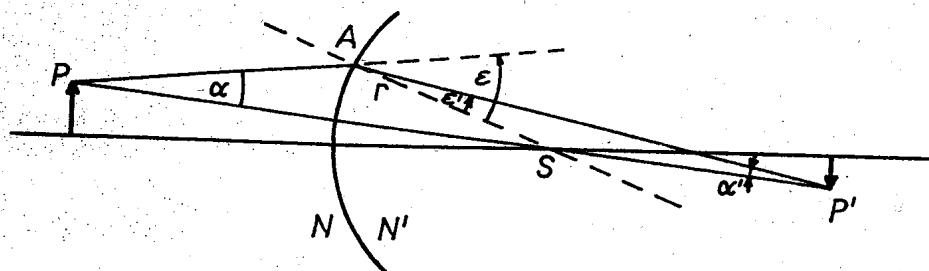


Obr. 6.16. Sférická vada



Obr. 6.17. Zmenšení sférické vady tvarem čočky

udat poloměrem nejmenšího průřezu kaustické plochy tzv. kroužkem nejmenšího rozptylu. Velikost sférické vady závisí na tvaru čočky a jejím postavení (obr. 6.17). Dá se ukázat, že sférická vada jediné čočky je nejmenší, když odchylka paprsků lomem je rovnoměrně rozdělena na obě lámavé plochy. Vhodnou volbou poloměrů křivosti lze sférickou vadu zmenšit. Dokonalejší odstranění sférické vady je možno pomocí kombinace dvou čoček, spojky (z korunového skla) a rozptylky (z flintového skla), neboť u rozptylky je tomu s průsečíky osových a mimoosových paprsků naopak než u spojky.



Obr.6.18. K odvození sinové podmínky

Obecnou podmínku pro korekci sférické vady odvodil Abbe. Je to tzv. sinusová podmínka a váže navzájem boč-

ní rozměr korigovaného obrazu s aperturou. Sinová podmínka se dá jednoduše odvodit pro jedinou sférickou lámavou plochu. Podle obr. 6.18 se zobrazuje bod P ve vzdálenosti y_1 od osy jako bod P' ve vzdálenosti y_1' . Použitím sinové věty na trojúhelníky PAS a P'SA dostaneme

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(\pi - \varepsilon)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon} = \frac{r}{PS}$$

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \varepsilon'} = \frac{r}{P'S}$$

Zde α je aperturní úhel, který můžeme pokládat pro všechny body blízké k ose ($y \leq y_1$) za stejný. Jsou-li indexy lomu N a N', plyne ze Snelliova zákona

$$\frac{N}{N'} = \frac{\sin \varepsilon'}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha} \cdot \frac{P'S}{PS}$$

a použitím podobnosti trojúhelníků APS, A'P'S, čili $\frac{P'S}{PS} = \frac{y_1'}{y_1}$, můžeme napsat sinovou podmínku

$$N y \sin \alpha = N' y' \sin \alpha' = \text{konst.} \quad (6.17)$$

Tato podmínka musí být splněna i pro libovolný systém lámavých ploch a udává tak kritérium stigmatického zobrazení ve dvou sdružených rovinách při zobrazení konečným aperturním úhlem. Splnění této podmínky je např. důležité u mikroskopických objektivů, u nichž jde o zobrazení jen malých plošek,

avšak co největší aperturou. Systémy splňující sinovou podmínku se nazývají aplanatické.

Sférická vada zrcadel působí rušivě při jejich použití v astronomických dalekohledech, zejména u zrcadel s velkým relativním otvorem (poměr průměru k ohniskové vzdálenosti). U těchto zrcadel se zobrazují astronomické objekty v nekonečnu paraxiálním svazkem paprsků. Jak je známo z geometrie, normála k parabole pólí úhel průvodičů, takže paprsek rovnoběžný s osou rotačního paraboloidu se na vnitřní straně odráží do ohniska. Proto se velká zrcadla pro dalekohledy brousí nejdříve na tvar sférický, což je výrobně jednoduché a pak se korigují na tvar parabolický, což lze provádět jen postupně za neustálé kontroly mechanickými i optickými metodami.

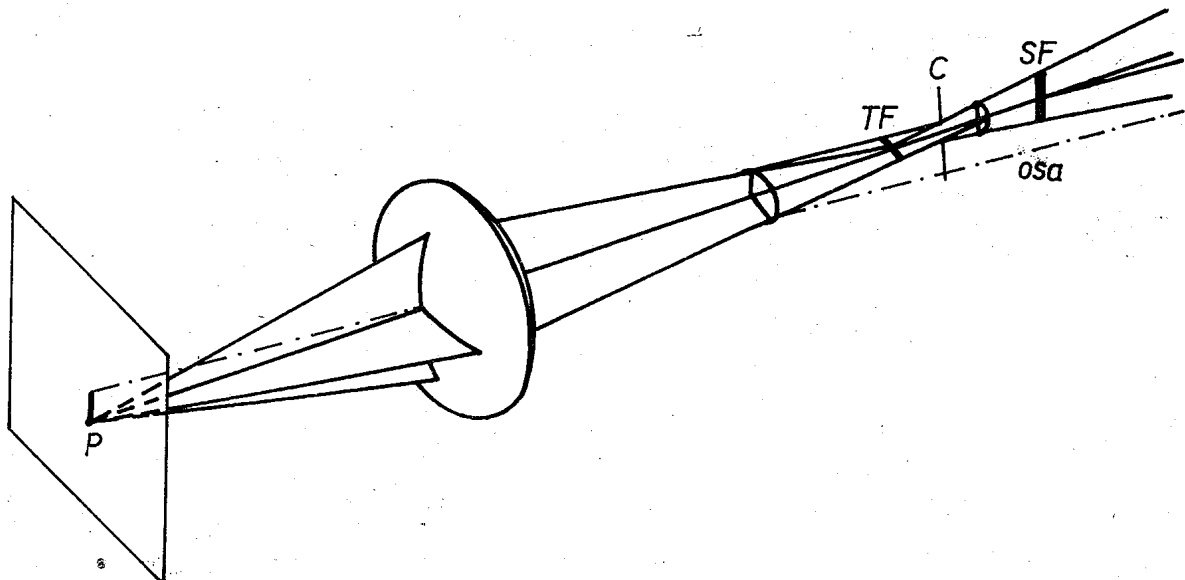
Jiný způsob korekce sférické vady zrcadel záleží v použití korekčních skleněných desek, vlastně jakýchsi čoček umístěných do jisté vzdálenosti od zrcadla, a to buď asférického tvaru (Schmidt) nebo sférického (Maksutov). Tyto korekční desky vnášejí jistou chromatickou vadu do zrcadlových systémů, avšak ta není tak závažná, aby zatlačila výhody vysoce světelných zrcadlových astrografů.

(b) Koma

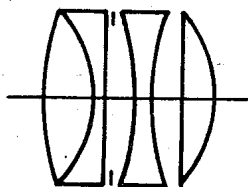
se projevuje při zobrazení mimoosových bodů širokým svazkem paprsků. U nekorigovaného systému místo bodového obrazu vzniká klínovitě se rozbíhající světlá skvrna na širší straně oválně ohraničená. Jméno vady souvisí s její podobností s kometou. Ukazuje se, že v systémech splňujících sinovou podmínku Abbeovu se dá současně se sférickou vadou odstranit i koma.

(c) Astigmatismus a zklenutí obrazu

Astigmatismus se projevuje při zobrazení mimoosového bodu tím, že zobrazovací svazek namísto aby byl homocentrický má eliptický průřez (obr. 6.19), přičemž na dvou prostorově oddělených místech se zužuje téměř do úseček kolmých k ose,



Obr. 6.19. Astigmatismus



Obr.6.20.
Anastigmat
Tessar

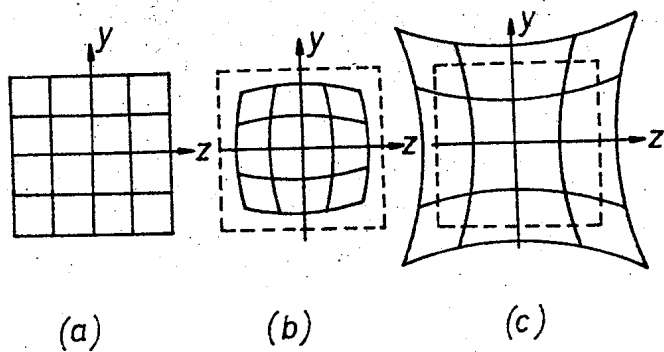
z nichž jedna leží v rovině proložené osou a předmětovým bodem (sagitální fokála SF) a druhá leží kolmo k této rovině (tangenciální fokála TF). Jejich vzdálenost měřená ve směru paprsků je astigmatický rozdíl. Tato vada by značně rušila u fotografických a projekčních přístrojů.

Systémy korigované na astigmatismus se nazývají anastigmaty (obr. 6.20). Korekce se provádí kombinací dvou složitých čočkových systémů, které mají stejně velký astigmatický rozdíl, avšak opačného znamení, tj. fokály zaměněny.

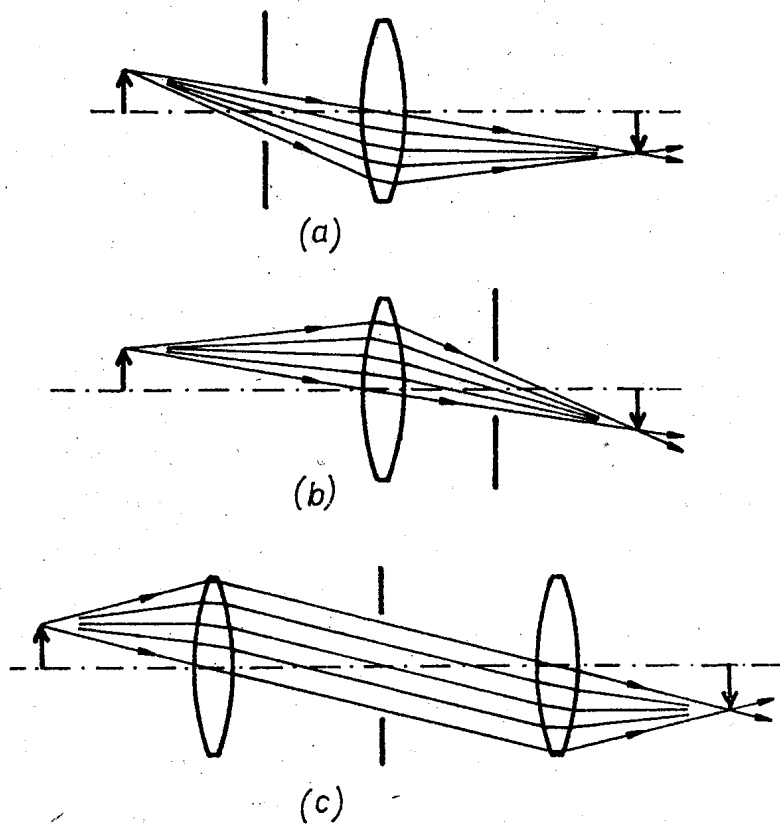
Jestliže považujeme za obraz mimoosového bodu kroužek nejmenšího rozptylu, pak u nekorigovaného (astigmatického) systému obrazy bodů roviny kolmé k ose neleží v rovině, nýbrž na křivé rotační ploše. Této vadě říkáme zklenutí obrazu. Je nasnadě, že když v anastigmaticky korigovaném systému splynou roviny obou fokál, zmizí i zklenutí obrazu. Petzwal odvodil podmínku, jíž jsou vázány ohniskové dálky a indexy lomu čoček N_i složeného systému korigovaného na zklenutí:

$$\sum_i \frac{1}{N_i f_i} = 0$$

(d) Zkreslení obrazu



Obr.6.21. Zkreslení obrazu



Obr.6.22. Zkreslení a poloha clony

zobrazení paprsky dopadající méně šikmo a zkreslení je poduškové (obr. 6.22). Použijeme-li symetrického systému s clonou uprostřed, zkreslení obou částí se kompensují. Tak byly konstruovány nejjednodušší projekční objektivy.

se projevuje tím, že přímky mimoběžné s osou se zobrazují jako křivky. Podle tvaru zakřivení mluvíme o soudkovém a poduškovém zkreslení (obr. 6.21). Příčina tohoto zkreslení je v tom, že boční zvětšení závisí na vzdálenosti od osy, a sice u soudkového se zmenšuje a u poduškového zvětšuje s rostoucím y . U jednoduché čočky můžeme ovlivnit tuto vadu polohou clonky. Jestliže vložíme kruhovou clonu s malým otvorem mezi předmět a čočku, dopadají paprsky z mimoosových bodů na čočku značně šikmo a vzniká soudkové zkreslení. Jestliže vložíme clonku mezi čočku a projekční stínítko, zúčastní se

6.10. Aberační funkce a její význam

Kvantitativní popis vad zobrazení se provádí dvojím způsobem:

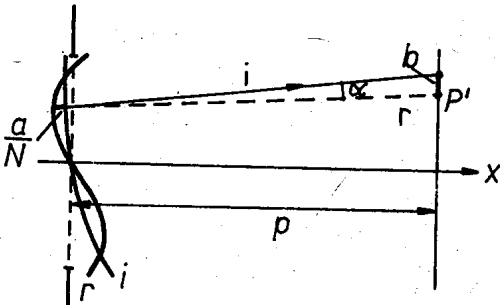
- (a) pomocí boční odchylky paprsků od ideálního obrazu; mluvíme pak o aberaci paprskové
- (b) pomocí odchylky skutečné vlnoplochy od ideální kulové, tj. od plochy kulové opsané z bodu ideálního obrazu; mluvíme pak o aberaci vlnové.

Mějme mimosový předmětový bod $P(x,y)$ a jeho ideální (paraxiální) obraz $P'(x',z)$. V rovině (ξ, η) výstupní pupily zavedeme polární souřadnice

$$\begin{aligned}\xi &= \varrho \sin \theta \\ \eta &= \varrho \cos \theta\end{aligned}$$

kde θ počítáme od průsečnice roviny proložené body P, P' a osou s rovinou výstupní pupily. Uvažme nyní skutečný paprsek jdoucí bodem (ξ, η) v rovině výstupní pupily. V důsledku

aberací neprochází bodem P' , nýbrž jej míjí ve vzdálenosti b . (obr.6.23). Reálný paprsek r je odchýlen od ideálního i o úhel α . O stejný úhel jsou vůči sobě skloněny elementy dr a di vlnoploch reálné a ideální. Vzdálenost elementů vlnoplochy je $\frac{1}{N} a$. Je-li vzdálenost ideálního obrazu P' od výstupní pupily p , platí pro malé úhly a v rovině xy



Obr.6.23. Paprsková a vlnová aberace

$$b = \alpha p$$

a pro úhel

$$\alpha = \frac{1}{N} \frac{da}{d\varrho} = \frac{b}{p}$$

Tento vztah váže paprskovou aberaci b s vlnovou aberací a .

Při obecné orientaci paprsku je nutno respektovat vektorový charakter \vec{b} .

V prvním přiblížení se dá odvodit, že vlnová aberace pro pevnou dvojici bodů P, P' se dá vyjádřit funkcí čtvrtého stupně v ρ , která obsahuje explicitě jako parametry souřadnici y bodu P a úhel θ . Vady, které tato funkce popisuje, se nazývají primární. Přesnější teorie uvažují ještě vyšší členy v ρ .

Po převedení primární vlnové aberace na paprskovou se sníží stupeň funkce o jednu, neboť jde o derivaci. Paprsková aberace b se pak dá vyjádřit ve složkách pomocí aberační funkce Seidelovy

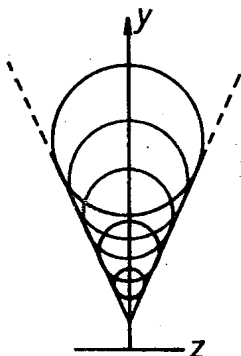
$$b_x = B \rho^3 \sin \theta - F y \rho^2 \sin 2 \theta + D y^2 \rho \sin \theta \quad (6.18a)$$

$$b_y = B \rho^3 \cos \theta - F y \rho^2 (1 + 2 \cos^2 \theta) + (2C + D) y^2 \rho \cos \theta + E y^3 \quad (6.18b)$$

Každý z členů charakterizovaný koeficienty B až F (6.18a,b) má význam jedné z aberací, o kterých jsme mluvili. Tak např.:

B představuje sférickou aberaci. Je vidět, že nezávisí na vzdálenosti y od osy, vzrůstá s 3. mocninou poloměru zony zobrazujících paprsků. Každá zona vytváří kroužek o poloměru $B \rho^3$.

F představuje komu. Dá se ukázat, že každé zóně ρ , $\rho + d\rho$ odpovídá v obrazové rovině kroužek, avšak středy kroužků se posouvají tak, že jejich obálkou jsou dvě přímky (obr. 6.24).



Obr. 6.24. Koma

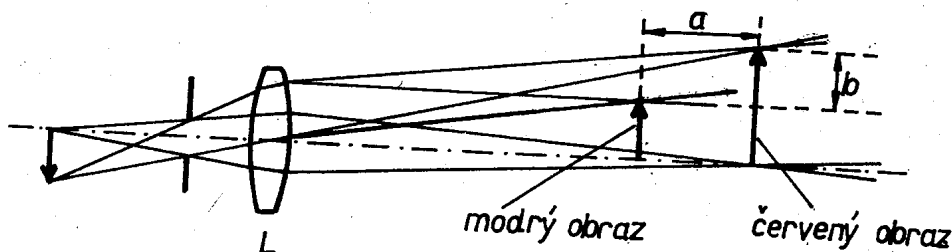
C a D představují astigmatismus a zklenutí obrazu

E je zkreslení obrazu; zřejmě vyjadřuje závislost zvětšení na y a může být buď kladné nebo záporné.

Výpočet korigovaných optických soustav spočívá v numerickém výpočtu velikosti koeficientů B až F v závislosti na poloměrech křivosti, indexech lomu a vzájemné poloze jednotlivých členů (čoček) systému a v minimalizaci vad variací zmíněných parametrů podle požadavků na kvalitu zobrazení. Je zřejmé, že čím více je členů systému, tím více variabilních parametrů máme k dispozici a tím více se podaří odstranit několik vad současně. Celý výpočet se ještě komplikuje tím, že je nutno současně odstraňovat také vady chromatické.

6.11. Vada chromatická

Pro optické materiály s normální dispersí ($dn/d\lambda < 0$) plyne, že ohnisková délka čočky podle (6.16) vzrůstá s rostoucí vlnovou délkou, je tedy větší pro červené paprsky než pro modré. V důsledku toho je i obraz nestejně velký. Vznikají tak chromatické vady ohnisková a zvětšení (podélná a příčná) (obr. 6.25). Pro subjektivní pozorování stačí k od-



Obr.6.25. Chromatická vada

stranění chromatických vad, když se nechají splývat ohniskové vzdálenosti pro 2 vlnové délky. Obvykle se volí vlnové délky čar C ($\lambda = 656,3$ nm) a F ($\lambda = 486,1$ nm) odpovídající červené a modré části spektra. Pak je prakticky odstraněna chromatická vada ohnisková pro tu část spektra, pro niž je oko nejcitlivější ($\lambda \approx 550$ nm).

Běžný způsob korekce chromatické vady je kombinace dvou čoček z různého materiálu stmelěných dohromady k sobě kon-

vexní a konkávní plochou stejné absolutní křivosti (achromatický dublet). Jsou-li N_{C1} , N_{F1} a N_{C2} , N_{F2} indexy lomu jednotlivých čoček, pak podmínka achromatizace se dá vyjádřit rovností optických mohutností dubletu pro příslušné barvy, $D_C = D_F$ čili

$$\frac{1}{f_{C1}} + \frac{1}{f_{C2}} = \frac{1}{f_{F1}} + \frac{1}{f_{F2}}$$

Použijeme-li výrazů (6.16) pro optické mohutnosti a zavedeme pro zkrácení celkové křivosti jednotlivých čoček φ_1 a φ_2

$$\varphi_1 = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_2}$$

dostaneme podmínku

$$(N_{C1} - 1) \varphi_1 + (N_{C2} - 1) \varphi_2 = (N_{F1} - 1) \varphi_1 + (N_{F2} - 1) \varphi_2$$

Optické materiály se často specifikují tzv. relativní disperzí ω

$$\omega = \frac{N_F - N_C}{(N_D - 1)},$$

kde N_D je index lomu pro žlutozelenou čáru D ($\lambda = 589,3$ nm).
Podmínku achromasie

$$\frac{N_{F1} - N_{C1}}{N_{F2} - N_{C2}} = - \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$$

můžeme pomocí relativní disperse ω_1 a ω_2 obou materiálů čoček uvést na tvar

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = - \frac{(N_{D2} - 1) \varphi_2}{(N_{D1} - 1) \varphi_1} = - \frac{D_2}{D_1} \quad (6.19)$$

D_1 a D_2 jsou střední optické mohutnosti členů achromatického dubletu pro čáru D. Z této podmínky vyplývá, že členy musí mít opačná znaménka optických mohutností, že tedy jedna z čoček je spojka a druhá rozptylka.

Jiný způsob achromasie, kterého se užívá u okulárů, je méně přesný, avšak velmi jednoduchý. Máme-li dvě čočky ze stejného materiálu o indexu lomu N ve vzdálenosti v od sebe, s ohniskovými vzdálenostmi f_1, f_2 , platí pro výslednou optickou mohutnost

$$D = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{v}{f_1 f_2}$$

Užijeme-li označení jako v předcházejícím odstavci, je

$$D = (N - 1)(\rho_1 + \rho_2) - v(N - 1)^2 \rho_1 \rho_2$$

Podmínku achromasie nyní formulujeme tak, že ve střední části spektra, pro níž mají čočky index lomu N , má mít optická mohutnost extrém. Pak se totiž jen málo mění směrem k modré a červené části spektra.

To znamená, že derivace D podle vlnové délky má být nulová

$$\frac{dD}{d\lambda} = (\rho_1 + \rho_2) \frac{dN}{d\lambda} - 2v(N - 1) \rho_1 \rho_2 \frac{dN}{d\lambda} = 0$$

Poněadž u optických materiálů je $dN/d\lambda \neq 0$, je možno tímto faktorem krátit a podmínku monochromasie uvést na tvar

$$v = \frac{1}{2} \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2 (N - 1)}$$

Vrátíme-li se nazpět k ohniskovým dálkám, lze tuto podmínku upravit takto

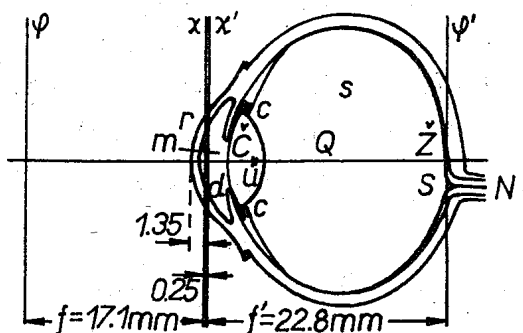
$$v = \frac{1}{2} (f_1 + f_2) \quad (6.20)$$

Jestliže tedy máme dvě tenké spojky ze stejného materiálu, ve vzdálenosti, která je rovna aritmetickému průměru jejich ohniskových vzdáleností, je tato soustava přibližně monochromatizována.

7. OPTICKÉ PŘÍSTROJE

7.1. Oko

Lidské oko je příkladem složeného optického systému. Poznání jeho funkce jakožto zobrazovací soustavy je důležité také pro pochopení funkce optických přístrojů užívaných pro subjektivní pozorování, tj. lupy, dalekohledu a mikroskopu.



Obr.7.1. Optická soustava oka

Průřez oční bulvou je na obr. 7.1. Vypuklá přední část oka je kryta průhlednou vrstvou, rohovkou r . Prostor mezi rohovkou a čočkou je vyplněn očním mokem, jehož index lomu se málo liší od indexu vody, je asi 1,336. Stejný index lomu má též rosolovitý sklivce s , jenž vyplňuje ostatní prostor mezi čočkou a sítnicí. Čočka má tvar dvojbypuklý,

s větší křivostí směrem dovnitř oka. Pomocí ciliárního svalu c je možno měnit křivost čočky a tím zaostřovat na sítnici obrazy různě vzdálených předmětů. Tomu říkáme akomodace. Index lomu čočky není všude stejný, stoupá od stěn směrem ke středu a činí průměrně 1,437. Je vidět, že se neliší příliš od indexů lomu očního moku a sklivce, takže větší část lomu paprsků se odehrává při vstupu do oka na rohovce. Před čočkou se nachází kruhový sval, duhovka d , která slouží jako aperturní clona optického systému oka. Průměr zřítelnice se podle intenzity osvětlení mění v mezích asi od 2 do 8 mm. Tomu odpovídá asi šestnáctinásobná změna plochy zornice a stejná změna v osvětlení sítnice. Poněvadž je oko schopno vnímat světlo v rozsahu osvětlení na sítnici mezi 10^{-2} do 10^3 Lx, tj. rozmezí pěti řádů, je vidět, že přizpůsobení otvoru zornice zdaleka nestačí kompenzovat tak veliké změny v osvětlení. Hlavní roli hraje přizpůsobivost samých světločivných orgánů sítnice.

Větší část vnitřní stěny bulvy je pokryta sítnicí. Při mikroskopickém zkoumání zjistíme, že sítnice je složena z několika vrstev, z nichž ta, která přiléhá ke stěně bulvy, obsahuje vlastní na světlo citlivé elementy. Jsou to tyčinky a čípky, jež tvoří zakončení vláken očního nervu. Tyčinky a čípky spolu s namodralou kapalinou, zvanou zrakový purpur, jež cirkuluje mezi nimi, zachycují optický obraz a předávají jej prostřednictvím optického nervu do mozku. Tyčinky jsou citlivější ke světlu a uplatňují se hlavně při velmi slabém osvětlení, nemají však schopnost rozeznávat barvy. Čípky jsou citlivé na barvy a vnímáme jimi při silném a středním osvětlení. V ose oka je na sítnici malý důlek asi 0,25 mm v průměru obsahující jen čípky, jemuž říkáme žlutá skvrna. Tu část předmětu, jejíž obraz padá na žlutou skvrnu, vidíme nejostřeji. Ostatní části sítnice obsahují čípky i tyčinky, pouze v tom místě, kde oční nerv vstupuje do oka, nejsou ani čípky ani tyčinky. Toto místo se nazývá slepá skvrna.

Abychom viděli ostře, musí na sítnici vzniknout ostrý obrázek, ať je vzdálenost předmětu jakákoliv. K tomu slouží akomodace čočky. Jestliže je ciliární sval úplně uvolněn, je normální oko zaostřeno na nekonečno, tj. ohnisková rovina spadá do sítnice. Akomodační schopnost je omezená, takže můžeme zaostřit jen na určitou minimální vzdálenost, zvanou blízký bod. Se vzrůstajícím stářím akomodační schopnost klesá a blízký bod se vzdaluje. Jako střední hodnota vzdálenosti blízkého bodu se bere 0,25 m a nazývá se konvenční zrakovou vzdáleností.

Vady zobrazení, o nichž jsme se v předchozích odstavcích zmiňovali, se u oka prakticky neprojevuji. Zornice omezuje paprsky jen na úzký svazek, nejcitlivější část sítnice, žlutá skvrna, leží v ose celého systému a je tak malá, že se na ní tvoří obraz jen paraxiálními paprsky, kdežto obrazu na ostatní části sítnice nevěnujeme takovou pozornost, aby vady rušily. Vady chromatické se neuplatňují díky tomu, že sítnice je citlivá jen poměrně na úzký obor spektrální kolem vlnové délky 5.550 \AA .

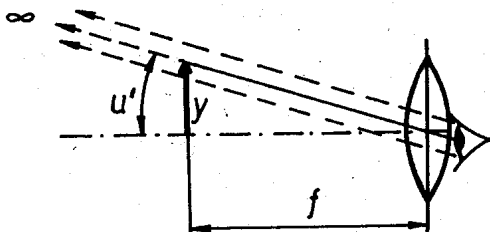
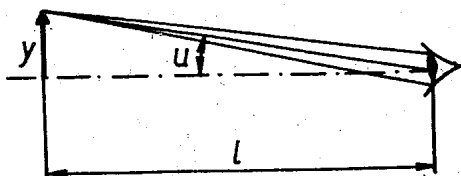
Hledíme-li oběma očima na určitý bod nepříliš vzdálený, stočíme bezděky oči tak, že jejich osy se v onom bodě protínají, čili jeho obrazy padají na žluté skvrny v očích. Úhel mezi osami nazýváme konvergenčním. Vzhledem k tomu, že zornice jsou asi o 65 mm od sebe vzdáleny, vytvoří se na sítnicích poněkud různé obrázky. Zkušeností jsme vedeni k tomu soudit z růzností obrázků na prostorové rozložení tělesa, mluvíme o prostorovém vidění. Při konvergenčním úhlu menším než $1/2$ minuty, tj. při vzdálenosti předmětu větší než asi 450 m, prostorové vidění přestává.

Vzhledem k tomu, že sítnice se skládá z jednotlivých elementů, můžeme rozeznati dva body jakožto různé jen tehdy, když jejich obrazy padnou na dva různé čípky nebo tyčinky. O tom rozhoduje zorný úhel, pod nímž ony dva body spatřujeme. Vzhledem k tomu, že průměrná vzdálenost čípků ve žluté skvrně je asi $0,5 \mu$, vzdálenost sítnice od optického středu lámavých ploch asi 15 mm, vychází pro nejmenší zorný úhel, pod nímž můžeme dva body od sebe rozlišiti, asi 1 minuta. Tento úhel nazýváme fyziologický mezní úhel. Ve skutečnosti závisí fyziologický mezní úhel na osvětlení a může při velmi slabém osvětlení dosáhnout až 1° .

7.2. Lupa

Umístíme-li spojnu čočku před oko, je to tolik, jako bychom zvětšili akomodaci, takže můžeme pozorovat předmět z větší blízkosti než je konvenční zraková délka a vidíme jej pod větším zorným úhlem. Čočku pak nazýváme lupou. Ve funkci lupy užíváme čočky o ohniskových dálkách 10 až 1 cm.

Zvětšením lupy rozumíme poměr tangenty zorného úhlu, pod kterým vidíme předmět s lupou k tangentě zorného úhlu, pod kterým vidíme předmět z konvenční zrakové délky. Jestliže přiložíme lupu k oku akomodovanému na nekonečno, je třeba, aby lupa vytvořila virtuální obraz v nekonečnu, aby tedy předmět



Obr.7.2. Lupa

ležel v ohniskové rovině lupy.
Pro zorné úhly plyne z obr. 7.2

$$\operatorname{tg} u' = \frac{y}{f} \quad \operatorname{tg} u = \frac{y}{0,25}$$

Odtud zvětšení lupy

$$z = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{0,25}{f} = \frac{D}{4} \quad (7.1)$$

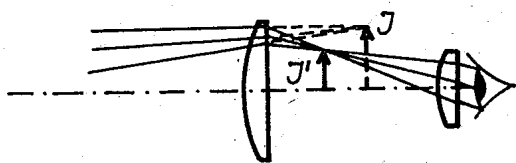
měříme-li f v metrech a optickou mohutnost v dioptriích. Zdálo by se, že zvětšení je možno libovolně stupňovat. V praxi ome-

zují vady čoček zvětšení jednoduché lupy na hodnotu asi 3x. Použije-li se lupy složené, korigované na sférickou, chromatickou vadu a astigmatismus, je možno dojít k zvětšení 20x.

7.3. Okuláry

Okuláry tvoří součást všech přístrojů, které slouží k vizuálnímu pozorování. Okulářem hledíme na obraz vytvořený předcházející částí přístroje jako lupou.

Nejobvyklejší typ okuláru je Huygensův okulár, který se skládá ze dvou oddělených ploskovypuklých čoček, postavených vypuklou stranou směrem k přicházejícím paprskům (obr.



Obr.7.3.Huygensův okulár

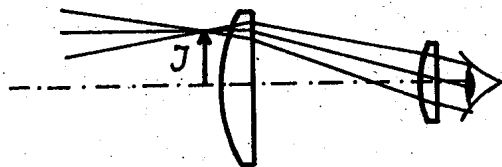
7.3). Poměr ohniskových délek bývá od 1,5:1 do 3:1. Vzdálenost čoček je aritmetickým průměrem jejich vzdálenosti, takže okulár je achromatizován (viz rov. 6.20). Paprsky, které přicházejí z první části

přístroje, by tvořily reálný obrázek v místě J. Před obrázkem však stojí první čočka okuláru zvaná polní nebo kolektiv. Tím se stává obrázek J virtuálním předmětem pro kolektiv, který vytvoří reálný obrázek v místě J' proti původnímu poněkud

zmenšený. Obraz J' leží v ohniskové rovině druhé čočky zvané oční, takže tato čočka jej zobrazí do nekonečna. V místě J' může být umístěn vláknový kříž nebo mikrometrická stupnice, jež se zobrazuje ostře současně s pozorovaným předmětem.

Úloha polní čočky je v tom, že sbírá široký svazek paprsků a zvětšuje tím světlost obrázku. Bez použití polní čočky by musela mít oční čočka mnohem větší průměr, aby zachytila všechny paprsky tvořící obraz. Někdy je na záведу, že u Huygensova okuláru je třeba umístit vláknový kříž mezi čočky. To vadí zvláště u spektroskopů, kde jej potřebujeme osvětlovat.

Ramsdenův okulár, znázorněný na obr. 7.4, má reálný obrázek J před kolektivem a tím je závada Huygensova okuláru odstraněna. Tento okulár je



Obr.7.4. Ramsdenův okulár

tvořen dvěma ploskovypuklými čočkami o stejných ohniskových délkách. Kdyby byla dodržena podmínka achromasie (6.20), ležely by čočky vzájemně v ohniskových rovinách. Aby se ohnisková rovina

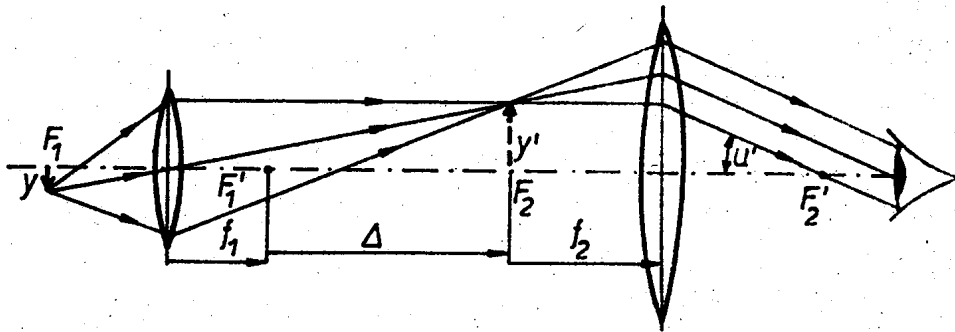
oční dostala vně, je vzdálenost čoček zkrácena na $\frac{2}{3} f$. Tím je podmínka achromasie poněkud porušena.

Jinak se odstraňují vady okulárů kombinací většího počtu čoček z různých materiálů. To platí např. pro okuláry v triedrech, nebo v mikroskopech s velkým zvětšením.

7.4. Mikroskop

Jak jsme se zmínili, prakticky dosažitelné zvětšení lupy je asi dvacetinásobné. Chceme-li dosáhnout silnějšího zvětšení, je třeba užít složitějšího systému, mikroskopu. U mikroskopu se dosahuje zvětšení ve dvou stupních. Objektivem se zobrazí předmět umístěný před prvním ohniskem, takže vznikne zvětšený skutečný obraz, který pozorujeme okulárem jako lu-

pou. Chod paprsků je schematicky znázorněn na obr. 7.5. Objektiv i okulár jsou spojné čočky a optický interval Δ je kladný. Mikroskop se nastaví do takové vzdálenosti od předmětu, aby jeho obraz padl do ohniskové roviny okuláru. Konvenč-



Obr.7.5. Mikroskop

ním zvětšením mikroskopu rozumíme opět poměr tangentezorných úhlů předmětu s použitím mikroskopu a bez něj při pozorování na konvenční zrakovou délku l .

$$z = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} \quad ; \quad \operatorname{tg} u = \frac{y}{l}$$

Jestliže ohnisková délka objektivu je f_1 a okuláru f_2 , plyne nejprve z rov. (6.7b) pro boční zvětšení objektivem:

$$z_1 = \frac{y'}{y} = \frac{\Delta}{f_1'} = - \frac{\Delta}{f_1}$$

Pro zorný úhel u' platí podle obr. 7.5

$$\operatorname{tg} u' = \frac{y'}{f_2} \quad ,$$

takže celkové zvětšení (nehledíme-li na znaménko) je

$$z = \frac{\operatorname{tg} u'}{\operatorname{tg} u} = \frac{y'}{f_2} \cdot \frac{\Delta}{y}$$

$$z = \frac{\Delta}{f_1} \cdot \frac{l}{f_2} = z_1 \cdot z_2 \quad (7.2)$$

Celkové zvětšení je součinem bočního zvětšení objektivu a úhlového zvětšení okuláru. Optický interval Δ bývá obyčejně 16 cm, takže ohniskovou délkou objektivu je jeho zvětšení jednoznačně určeno. Zvětšení objektivu i okuláru bývají přímo vyryta na jejich objímkách.

Moderní objektivy mají korigovanou vadu chromatickou a jsou aplanatické (achromáty). Nejdokonalejší objektivy jsou apochromáty, jež se skládají až z 10 čoček a mají opravenou vadu chromatickou pro tři barvy, vadu sférickou pro dvě barvy. Mikroskop bývá obyčejně opatřen revolverovým měničem objektivů, který umožňuje jejich rychlou záměnu a tím změnu zvětšení. Tubus je opatřen jemným a hrubým vertikálním posunem, jímž se zaostřuje. K osvětlení je zapotřebí soustředit světlo do preparátu. K tomu slouží osvětlovací zařízení skládající se ze zrcadla a kondensoru.

Paprsky, které vycházejí z preparátu s aperturním úhlem větším než 42° , by se odrazily na horní stěně krycího sklíčka podle zákona o úplném odrazu a byly by pro zobrazení ztraceny. U objektivů, které využívají velkých aperturních úhlů, se vyplní prostor mezi sklíčkem a čelní čočkou objektivu buď vodou (vodní imerse) nebo olejem o stejném indexu lomu jako má sklíčko a čočka (homogenní imerse), takže totální odraz nenastává. Tím se podstatně zvýší světelnost obrazu a zároveň numerická apertura objektivu.

7.5. Rozlišovací schopnost mikroskopu

Podle vzorce (6.22) pro zvětšení mikroskopu by se zdálo, že zmenšováním ohniskových vzdáleností f_1 , f_2 by bylo možno libovolně stupňovat zvětšení mikroskopu. Tomu tak není. Zjistili bychom totiž, že když s objektivem jisté apertury přestoupíme jisté mezní zvětšení, obraz se sice co do geometrických rozměrů zvětšuje, ale stává se jakoby neostrým, další detaily už nejsou rozeznatelné. Příčina tohoto jevu je ohyb světla, neboli též konečná vlnová délka světla. Dostáváme se

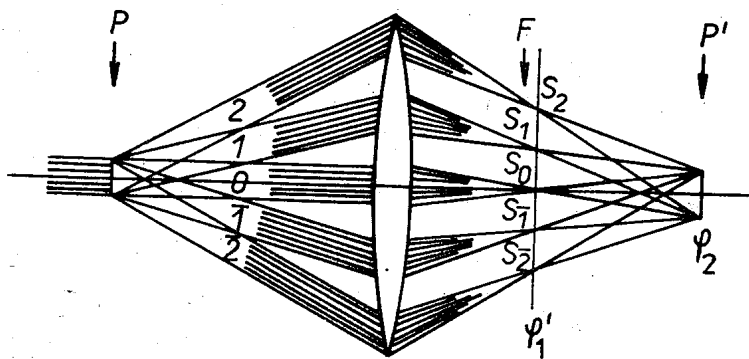
tak k mezím platnosti geometrické optiky, kde už nic nepomáhá geometrická dokonalost optického systému.

Analysu vlivu ohybu světla na zobrazení v mikroskopu můžeme vést dvojím způsobem:

(1) Uvažujeme vznik obrazu předmětu s jemnou strukturou při použití koherentního osvětlení.

(2) Považujeme předmět za souhrn bodových nekoherentních zdrojů a analyzujeme ohybový jev, který nastává na obrubě čelní čočky objektivu.

Začneme přístupem (1), který je podstatou Abbeovy teorie zobrazení. Mějme jako předmět ke zobrazení mikroskopem optickou mřížku o mřížkové konstantě d osvětlenou kolmo na rovinu mřížky koherentním svazkem o vlnové délce λ . Na mřížce P vzniká známý ohybový jev, který má za následek, že světlo se



Obr.7.6. K Abbeově teorii zobrazení v mikroskopu

šíří za mřížkou prakticky jen v určitých směrech, které jsou dány podmínkou hlavních maxim

$$d \sin \theta = K \lambda, \text{ kde } K \text{ je celé číslo } 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Každému svazku rovnoběžných paprsků odpovídá v ohniskové rovině φ'_1 objektivu úzká čára rovnoběžná se štěr-

binami mřížky (obr. 7.6). Počet difrakčních maxim v ohniskové rovině φ'_1 ovšem závisí na aperturním úhlu α . Objektivem projdou jen ta maxima, pro něž platí $\theta_K \leq \alpha$. Světelné pole v rovině φ'_1 nazýváme primárním obrazem, i když se nijak neřídí zákony geometrické optiky, není kolineárním obrazem předmětu.

Primární obraz slouží jako "aperturní stínítko" pro druhý stupeň ohybu. Abbe ukázal, že právě v rovině vzdálené o Δ

od φ'_1 , tj. v rovině, kde by vznikl obraz předmětu podle geometrické optiky, dává Fraunhoferův ohyb primárního obrazu obrazec v podobě tmavých a světlých ekvidistantních pruhů se vzájemnou vzdáleností $z \cdot d$, kde z je boční zvětšení podle zákonů geometrické optiky. K tomu, aby vůbec mohl probíhat druhý stupeň ohybu, je nutné, aby v rovině φ'_1 byla nejméně maxima řádu 0 a ± 1 . Čím větší počet maxim je přítomný v primárním obrazu, tím věrnější je sekundární obraz v rovině φ_2 . Má-li tedy sekundární obraz (který pak pozorujeme okulárem) mít vůbec nějakou strukturu podobnou mřížce, je nutné, aby $d \sin \alpha \geq \lambda$. Jestliže mezi mřížkou a čelní stěnou objektivu je prostředí o indexu lomu N , modifikuje se podmínka rozlišitelnosti struktury na $N d \sin \alpha \geq \lambda$. Jakožto rozlišovací schopnost definujeme $1/d$ a je tedy

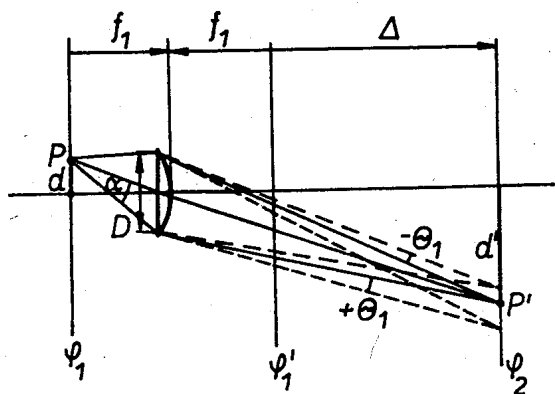
$$\frac{1}{d} \leq \frac{N \sin \alpha}{\lambda} = \frac{N.A.}{\lambda} \quad (7.3)$$

tj. rozlišovací schopnost je úměrná numerické apertuře objektivu a nepřímo úměrná vlnové délce. Bez dalších důkazů můžeme odhadnout, že veličina d v rov. (7.3) představuje i u jiného objektu než mřížka mezní charakteristický rozměr, který je možno mikroskopem rozlišit.

U předmětu obecné struktury, kterou je možno popsat aperturní funkcí $f(x,y)$, je tedy primární obraz dán Fourierovým obrazem této funkce. Ovšem následkem konečné hodnoty aperturního úhlu se z tohoto obrazu objeví v rovině φ'_1 jen omezená část. V rovině sekundárního obrazu φ_2 pak dostáváme druhou Fourierovou transformaci v jistém měřítku, daném bočním zvětšením podle geometrické optiky, rekonstrukci původní funkce, která je tím věrnější, čím úplnější je primární obraz, tj. čím větší je apertura.

(2) Nekoherentní osvětlení

Mějme v předmětové rovině objektivu, která prakticky splývá s ohniskovou φ_1 , dva body, jeden na ose a jeden ve vzdálenosti d od osy (obr. 7.7). Oba body, které můžeme po-



Obr.7.7.K rozlišovací schopnosti mikroskopu při nekoherentním osvětlení

má první tmavý ohybový kroužek poloměr

$$r \approx (f_1 + \Delta) \cdot \theta_1$$

$$= 1,22 \frac{f_1 + \Delta}{D} \lambda$$

Každý z bodů předmětu O, P vytváří svůj ohybový obrazec a tyto jsou v obrazové rovině navzájem posunuty o vzdálenost d' , která je podle obr. 7.7

$$d' = d \frac{f_1 + \Delta}{f_1}$$

Oba ohybové obrazce se překládají přes sebe jakožto nekoherentní světelná pole.

Podle Rayleighova kritéria jsou obrazy obou bodů rozlišitelné, jestliže střed jednoho ohybového obrazce padá do prvního minima obrazce druhého, tedy když

$$d' \geq r$$

$$d \frac{f_1 + \Delta}{f_1} \geq 1,22 \frac{f_1 + \Delta}{D} \lambda$$

Po úpravě

važovat za nekoherentní bodové zdroje, vytvářejí na obrubě objektivu o průměru D ohybový zjev, pro nějž jsme odvodili, že první minimum leží na kuželi kolem středního paprsku vrcholovým úhlem $2\theta_1$, kde úhel θ_1 je dán

$$\theta_1 = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

V rovině obrazové, tj. ve vzdálenosti $f_1 + \Delta$ od objektivu

$$d \geq 1,22 \frac{\lambda}{D/f_1}$$

Poměr D/f_1 však můžeme přibližně považovat za dvojnásobnou tangentu aperturního úhlu α , takže podmínka rozlišitelnosti je

$$d \geq 1,22 \frac{\lambda}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

Přesnější odvození však vede k závislosti

$$d \geq \frac{1,22 \lambda}{2 \sin \alpha}$$

Je-li před objektivem prostředí o indexu lomu N , dostáváme pro rozlišovací schopnost výraz

$$\frac{1}{d} = \frac{2N \sin \alpha}{1,22 \lambda} \quad (7.4)$$

Srovnáním s (7.3) přicházíme k závěru, že při nekoherentním osvětlení je rozlišovací schopnost přibližně dvojnásobná ve srovnání s koherentním. Poněvadž numerická apertura dosahuje velikosti přibližně rovné jedné, je nejmenší vzdálenost dvou bodů optickým mikroskopem rozlišitelná rovna přibližně vlnové délce. Při účelném využití optiky mikroskopu pro vizuální pozorování odpovídá výstupní zorný úhel fyziologickému meznímu úhlu. Tím je dána horní mez zvětšení mikroskopu asi na 1500x.

Zvětšení rozlišovací schopnosti můžeme docílit

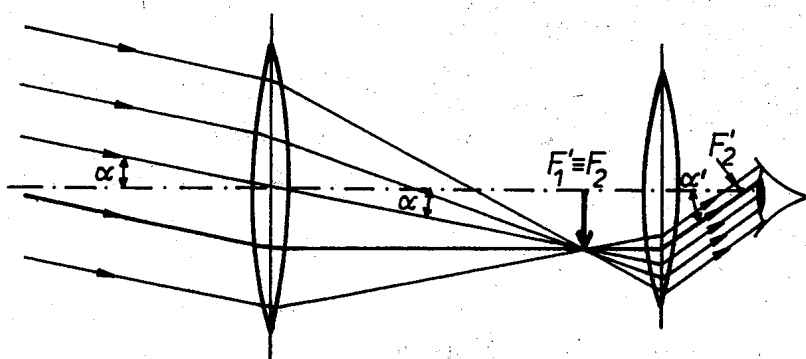
- (a) použitím krátkých vlnových délek, tedy např. ultrafialového světla a fotografického záznamu. Podstatné zvýšení ovšem přináší užití elektronového mikroskopu, u nějž leží oblasti použitých vlnových délek u 10^{-10} - 10^{-11} m, tedy asi o tři až čtyři řády níže než u viditelného světla;
- (b) užitím imerse, tj. zvětšením indexu lomu N , o níž jsme se již zmínili. Praktická mez je $N \approx 1,5$;
- (c) použitím šikmého osvětlení, při němž se do objektivu dostává jen nultý a řády jen jednoho znaménka, minimálně te-

dy řády 0,+1. To vede ke zvýšení rozlišovací schopnosti přibližně o faktor 2 .

7.6. Dalekohledy

Dalekohledy dělíme podle typu hlavního zobrazovacího členu na čočkové (refraktory) a zrcadlové (reflektory).

Čočkový dalekohled hvězdářský (Keplerův) se po optické stránce skládá z objektivu, tj. spojné čočky s dlouhým ohniskem a okuláru některého dříve uvedeného typu. Poněvadž dale-



Obr.7.8. Astronomický (Keplerův) dalekohled

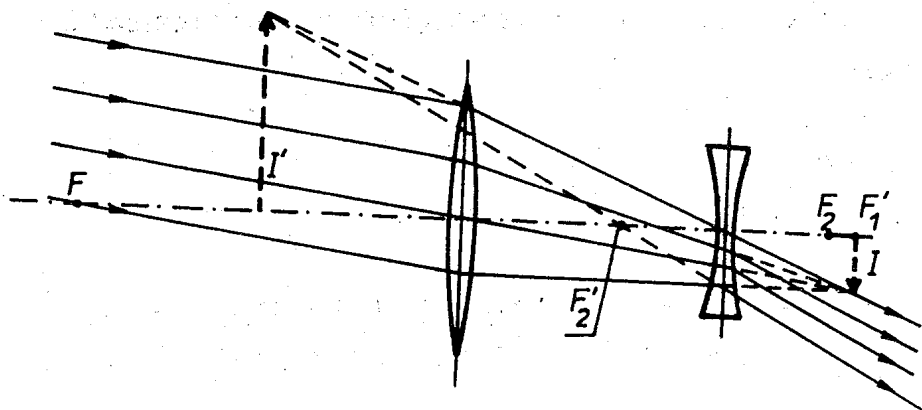
kohledem pozorujeme obyčejně vzdálené předměty, budeme předpokládat, že paprsky vstupující do objektivu jsou rovnoběžné a protínají se v ohniskové rovině.

Geometrická konstrukce chodu paprsků je na obr. 7.8. Z bo-

du v nekonečnu, který se jeví prostému oku v úhlové vzdálenosti od osy α odpovídá v ohniskové rovině reálný obraz ve vzdálenosti y' od osy. Tento obraz promítá okulár do nekonečna, takže pozorovací zorný úhel měřený od osy je α' . Celkové úhlové zvětšení je

$$z = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} \right| = \frac{y'/f_2}{y'/f_1} = \frac{f_1}{f_2} \quad (7.5)$$

Protože v tomto typu dalekohledu je obraz obrácený, užívá se pro pozemské pozorování buď triedru, kde se obraz obrací pomocí dvou 45° -hranolů (viz odst.6.2), nebo Galileova dalekohledu. U tohoto typu dalekohledu slouží jako okulár rozptylka postavená tak, aby její předmětové ohnisko spadalo v jed-



no s obrazovým ohniskem objektivu (obr. 7.9). Je zřejmé, že absolutní hodnota úhlového zvětšení je stejná jako u Keplerova typu, jenže

Obr.7.9. Pozemní (Galileův) dalekohled

obraz je přímý. Tento typ dalekohledu se hodí pro malá zvětšení a užívá se v divadelních kukátkách.

Po stránce geometrické optiky jsou soustavy obou typů dalekohledu zvláštní tím, že mají optický interval nulový a v důsledku toho obě ohniskové délky nekonečné. Říkáme takové soustavě teleskopická.

Probereme nyní dvě otázky spojené s dalekohledem: průchod světelného toku a rozlišovací schopnost.

Dalekohled slouží k vyzbrojení oka a proto je účelné, aby výstupní pupila nebyla větší než zřítelnice, neboť jinak by část paprsků prošlých dalekohledem nebyla okem využita.

Počítá se, že při denním pozorování je průměr zřítelnice 2-3

mm, při nočním 6-8 mm. Z toho

vyplývají vztahy mezi

zvětšením a účelným průměrem

objektivu. Má-li být

objektivu plně využito, tvoří

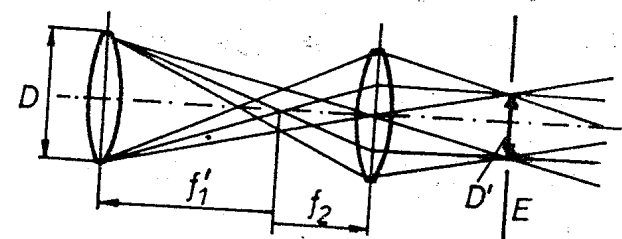
jeho obruba aperturní

clonu. Výstupní pupilu tedy

najdeme, když zobrazíme

okulárem obvod objektivu.

Na obr. 7.10 je vidět, že



Obr.7.10. Průchod světelného toku dalekohledem

výstupní pupila leží v místě E, kde svazek paprsků má nejmenší průměr. Do toho místa klademe oko a říkáme mu oční bod dalekohledu. Objektiv leží ve vzdálenosti $x = -f_1$ od ohniska

okuláru. Podle rovnice (6.7b) je boční zvětšení

$$Z = \frac{f_2}{x} = - \frac{f_2}{f_1}$$

Je-li průměr objektivu D a průměr výstupní pupily D' , je jejich poměr (nehledíme-li na znaménko)

$$\frac{D}{D'} = \frac{f_1}{f_2}$$

tedy, právě roven úhlovému zvětšení dalekohledu. Pro denní pozorování může být průměr výstupní pupily 3 mm, tedy užitečný průměr dalekohledu

$$D = \frac{f_1}{f_2} D' = 3 \cdot z \text{ (mm)}$$

Pro noční pozorování

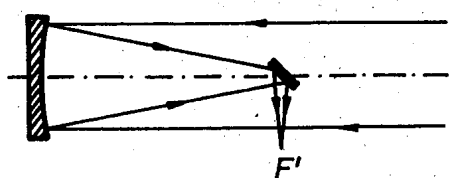
$$D = 8 \cdot z \text{ (mm)}$$

Tak např. triedr pro denní pozorování se zvětšením 8x má vhodný průměr objektivu 24 mm, pro noční pozorování 64 mm. Je-li průměr objektivu větší, není plně využit. Je-li menší, má obrázek sníženou světlost, jak si dále ukážeme.

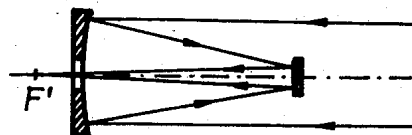
Dejme tomu, že dalekohledem o průměru objektivu 60 mm a zvětšení desetinásobném pozorujeme nějaký plošný objekt nacházející se ve směru osy a že průměr zřítelnice je 6 mm. Plocha objektivu je tedy 100krát tak velká jako plocha zřítelnice. Zvětšení a průměr objektivu vyhovují prve odvozeným podmínkám, takže celý světelný tok vstupující do objektivu se dostane do oka a je stokrát větší než při pozorování pouhým okem. Obrázek na sítnici je však s použitím dalekohledu desetkrát větších rozměrů a jeho plocha rovněž stokrát větší. Stokrát větší tok je rozložen na stokrát větší ploše, čili osvětlení sítnice je v obou případech stejné. Zdánlivý jas plošného zdroje se nedá pomocí dalekohledu zvětšit. Kdybychom při stejném zvětšení užili třeba objektivu o průměru 30 mm, zvětší se světelný tok jen 25krát, zatímco plocha obrázku stokrát. Tím klesne zdánlivý jas na 1/4 hodnoty bez použití dalekohledu.

Jestliže pozorujeme bodový předmět (např. stálici), pak předcházející úvaha neplatí. Následkem ohybu je v každém optickém systému obrazem bodu ploška konečných rozměrů (obklopená dalšími světlymi kroužky). Velikost plošky stoupá pomaleji než se čtvercem zvětšení a proto její zdánlivá svítivost se dá použitím dalekohledu zvětšit. Proto dalekohledem vidíme slabší hvězdy než pouhým okem.

Objektivy čočkových dalekohledů bývají korigovány především na vadu chromatickou, při větší světelnosti též na vadu sférickou. Technologické obtíže a cena objektivu rostou velmi rychle s průměrem, takže dnes dalekohledy s průměrem větším než 20 cm se konstruují jako zrcadlové.



Obr.7.11. Newtonův zrcadlový dalekohled



Obr.7.12. Cassegrainův zrcadlový dalekohled

Běžný typ zrcadlového dalekohledu je Newtonova konstrukce (obr. 7.11). V tomto uspořádání je před ohniskem dutého sférického zrcadla umístěno malé rovinné diagonální zrcátko, které vrhá svazek paprsků v pravém úhlu k ose do okuláru nebo fotografické komory. Jiné uspořádání je Cassegrainovo, u nějž se před ohnisko hlavního zrcadla vkládá malé vypuklé zrcátko (obr. 7.12), které prodlužuje ohniskovou délku. Hlavní zrcadlo je provrtáno, takže konvergentní svazek vytvoří obrázek v ohniskové rovině za zrcadlem. Výhodou je, že pozorovatel hledí směrem osy dalekohledu, jako u refraktoru.

Velkou předností reflektorů před refraktory je to, že je zde jen jedna velká broušená plocha. Chromatické vady neexistují, sférické se odstraňuje u větších zrcadel parabolizací. Největší zrcadla dnes užívaná dosahují rozměru 5 m a v SSSR je v konstrukci zrcadlo o průměru 6 m (broušení takového zrcadla trvá několik let).

Rozlišovací schopnost dalekohledu je omezena zcela analogicky, jako jsme to viděli u mikroskopu. Jestliže např. pozorujeme dvojhvězdy v těsné blízkosti, pak jejich minimální úhlová vzdálenost, na níž je možno je rozeznat jako dvě hvězdy různé, je určena Rayleighovým kriteriem. "Obrázek" stálíce vytvořený sebedokonalejším objektivem v rovině ohniskové je dán ohybovým jevem na kruhovém otvoru - obrubě objektivu. Za průměr "obrazu" můžeme považovat průměr prvního tmavého kroužku podle Airyho vzorce (5.21).

Ohybové jevy pocházející od dvou úhlově blízkých stálic se překrývají jakožto nekoherentní světelná pole. Rozeznatelné jsou tehdy, když padá nulové maximum jednoho systému do prvního minima druhého systému, tj. minimální úhlová vzdálenost dvojhvězdy je

$$\alpha_0 = 1,22 \frac{\lambda}{D_1}$$

kde D_1 je průměr objektivu nebo zrcadla.

Tak např. pro astronomický dalekohled o průměru zrcadla $D=2$ m a ohniskové délce 10 m, s použitou vlnovou délkou 500 nm je

$$\alpha_0 = 1,22 \cdot 5 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1}{2} \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \approx 0,06''$$

Této úhlové vzdálenosti odpovídá v ohniskové rovině vzdálenost $3 \cdot 10^{-7} \cdot 10 \text{ m} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 3 \mu\text{m}$. Při použití fotografického záznamu máme rozlišovací schopnost citlivé emulze asi $1 \mu\text{m}$, takže omezujícím faktorem zde je rozlišovací schopnost objektivu. Na mez rozlišovací schopnosti emulze bychom se dostali teprve s průměrem objektivu 6 m.

7.7. Fotografický přístroj

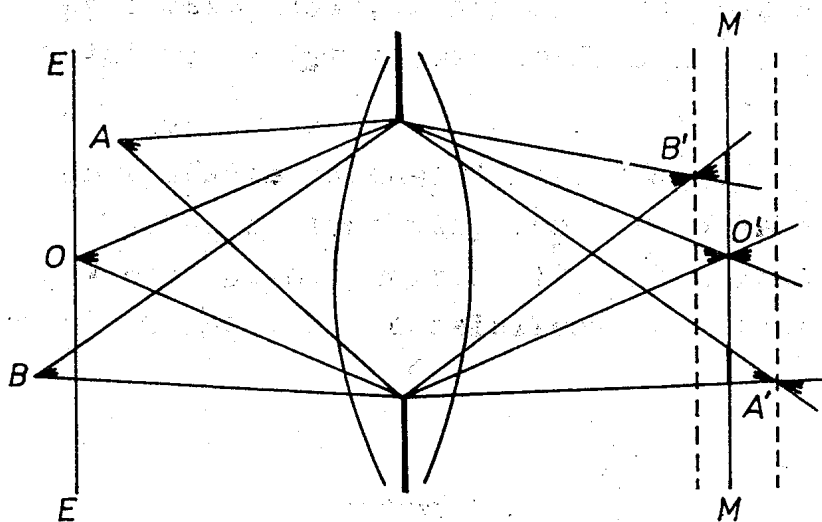
Podstatné části fotografického přístroje jsou objektiv s irisovou clonou a zaostřovacím zařízením, uzávěrka centrální nebo šterbinová, světlotěsná komora a zařízení pro ukládání matnice a kaset s deskami nebo zařízení pro posun filmu.

Velmi běžné je dnes zaostřování pomocí diagonálního zrcadla, matnice, převracejícího hranolu a lupy. Diagonální zrcadlo se v okamžiku expozice sklápí a uzavírá světlotěsně komoru. Expozice se měří elektronickým fotometrem, který dostává část světla přímo prošlého objektivem. U nejnovějších typů se nastavuje clona a čas expozice zcela automaticky pomocí složité mikroelektroniky.

Objektivy fotografických komor jsou vysoce korigované astigmatické systémy o počtu čoček 5-7. Všechny volné plochy čoček jsou opatřeny protiodrazovými vrstvami pro snížení ztrát a zvýšení kontrastu. Objektivy se charakterizují relativním otvorem a ohniskovou délkou. Běžná hodnota relativních otvorů je 1:3,5 až 1:2, výjimečně až 1:0,9. Normální ohnisková délka má být přibližně rovna diagonále formátu filmu nebo desky. Pro fotografování vzdálených předmětů se užívá teleobjektivů, pro širokoúhlé záběry krátkofokálních objektivů. Pro filmové a televizní komory se konstruují objektivy s proměnlivou ohniskovou vzdáleností, tzv. transfokátory (angl. termín zoom). Toho se docílí tím, že objektiv je konstruován z několika částí od sebe poměrně dost vzdálených a axiálním posuvem střední části je možno měnit ohniskovou vzdálenost např. v poměru 1:5, aniž by se změnilo zaostření. Tím se docílí efektu zdánlivého přibližování nebo vzdalování předmětu.

Úloha clony je dvojitá. Za prvé se jí řídí osvětlení za účelem expozice. Za tím účelem bývá clona opatřena stupnicí pro převratné relativní otvory v geometrické řadě o kvocientu 2. Poněvadž světelný tok je úměrný čtverci relativního otvoru, každá změna clony o jeden díl stupnice znamená změnu osvětlení o faktor 2.

Druhá funkce clony se týká hloubky ostrosti. I kdybychom měli sebe dokonalejší objektiv, nemůžeme žádat, aby zobrazoval trojrozměrný předmět ostře do zaostřovací roviny citlivé vrstvy. Dejme tomu, že podle obr. 7.13 se do roviny vrstvy M-M zobrazuje přesně bodově rovina E-E. Body A a B



Obr.7.13. K pojmu hloubka ostrosti

kteře jsou před a za rovinou E-E, se zobrazí v zaostřovací rovině M jako kotoučky, jejichž velikost přímo závisí na relativním otvoru. Podle velikosti negativu a požadavku na ostrost pokládáme za ostré ještě ty bo-

dy, které vytvoří rozptylové kroužky o velikosti 1/10 až 1/30 mm. Z této podmínky nám vyplyne, jaký největší otvor můžeme užít při požadované hloubce ostrosti, tj. chceme-li mít dostatečně ostré obrazy bodů v určitém intervalu vzdáleností od objektivu. Čím větší je žádaná hloubka ostrosti, tím menší musí být otvor clony.

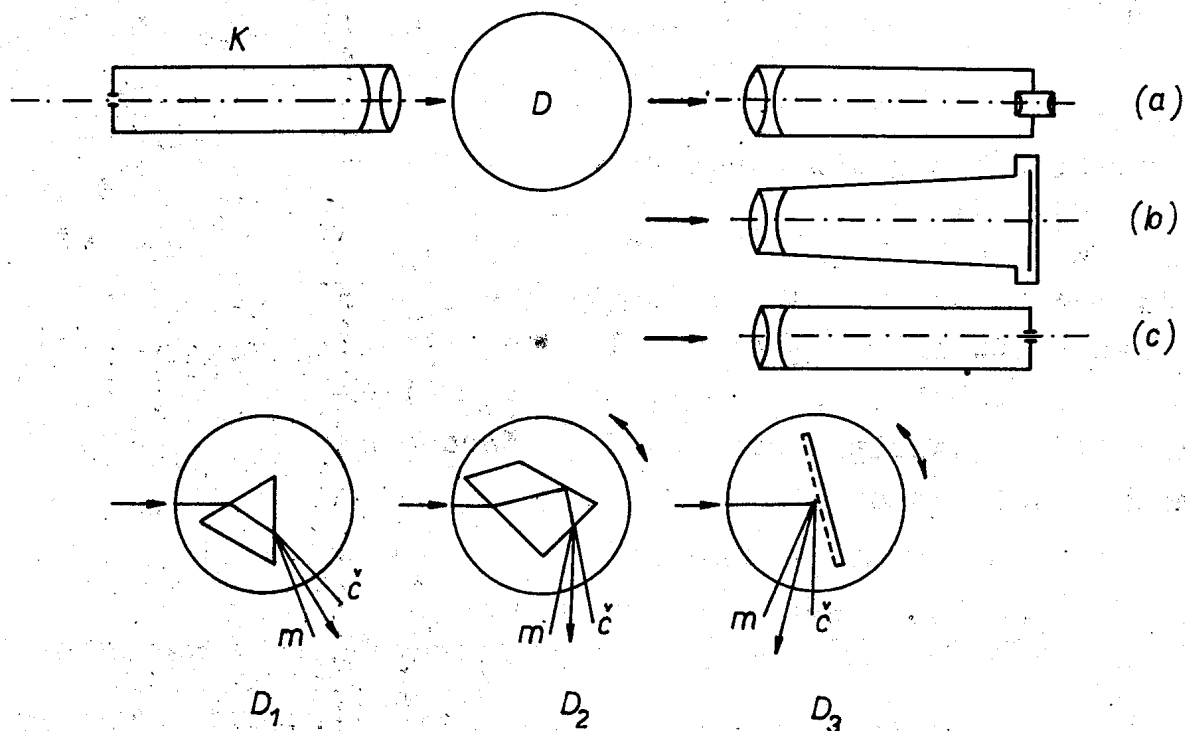
7.8. Spektrální přístroje

V předcházející části této kapitoly jsme projednávali přístroje, jejichž primární funkcí je vytvoření obrazu. V tomto odstavci jde o přístroje, u nichž je zobrazení jen pomocnou funkcí, kdežto hlavní je rozklad světla na jeho složky podle vlnových délek - spektrum. Zmíníme se zde o dvou typech spektrálních přístrojů: hranolových a mřížkových.

Podle účelu, ke kterému se těchto přístrojů používá, rozdělujeme je v hlavních rysech na:

- (a) spektroskopy a spektrometry - přístroje k visuelnímu pozorování a měření spekter, příp. k přesnému měření úhlů optickou metodou;
- (b) spektrografy - přístroje k fotografickému snímání spekter;

- (c) monochromátory - k získání monochromatického světla ze světla složeného příp. k izolaci jednotlivých čar emisních spekter;
- (d) spektrofotometry - k proměření intenzity světla v definovaných spektrálních oborech, jako např. k měření spektrálního rozložení intenzity zdrojů světla nebo k měření spektrální závislosti koeficientů absorpce, reflexe apod.



Obr.7.14. Princip spektrálních přístrojů. (a) spektroskop, (b) spektrograf, (c) monochromátor. K - kolimátor, D - dispersní člen: D_1 - hranol 60° , D_2 - hranol s deviací 90° , D_3 - mřížka na odraz

Principiální uspořádání spektrálních přístrojů pro viditelné světlo je na obr. 7.14. Vstupní částí je kolimátor K, který obsahuje přesnou štěrbinu s říditelnou šířkou od několika μm do několika mm a achromatizovaný objektiv. Štěrbinu se nachází v ohniskové rovině objektivu, takže z kolimátoru vychází rovnoběžný svazek paprsků. Světlo pak prochází dispersním členem D, kde se rozkládá podle vlnových délek. Skutečné směry vstupních a výstupních svazků paprsků pro některé

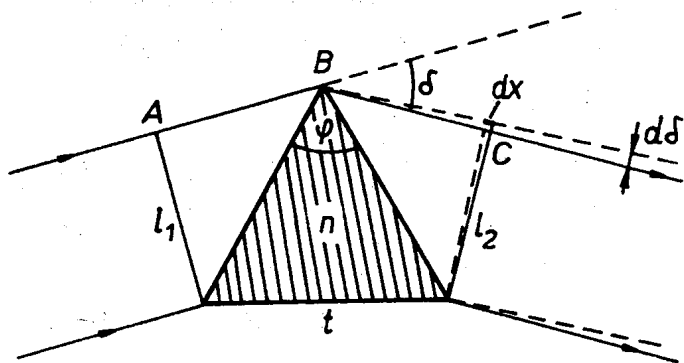
příklady disperzních členů (60° hranol, hranol s konstantní deviací 90° , mřížka na odraz) jsou na obr. 7.14. Rozklad světla je naznačen písmeny m (modrá) a č (červená).

Rozložený svazek vstupuje do výstupního členu přístroje, kterým může být buď dalekohled (a) nebo fotografická komora (b), nebo obrácený kolimátor (c). V ohniskové rovině objektivu výstupního členu se vytváří řada monochromatických obrazů vstupní štěrbinu. Ve spektroskopech (a) pozorujeme tento obraz subjektivně okulárem. Ve spektrografech (b) se zachycuje na fotografickou desku nebo film a v monochromátorech (c) se z něj pomocí regulovatelné výstupní štěrbinu vybírá libovolně úzká část spektra. Umístíme-li za výstupní štěrbinu monochromátoru vhodný detektor světla připojený na měřící aparaturu, dostáváme tak spektrofotometr.

Pro obor spektra asi od 360 do 2000 nm lze užít skleněné optiky. Pro blízký ultrafialový obor je sice možno užít křemenné optiky, avšak častěji se přechází k zrcadlové optice. V infračerveném oboru jsme odkázáni jen na zrcadlovou optiku. Hranolů se užívá pro viditelné světlo (sklo), pro blízký u.f.obor (křemen, LiF) a i.č.obor (NaCl, KBr aj.). Universální však jsou mřížky na odraz, které dnes ve spojení se zrcadlovou optikou zatlačují jiné systémy. Mřížky s různou mřížkovou konstantou jsou snadno zaměnitelné, takže jedna universální konstrukce přístroje se hodí pro široký obor spektra, od u.f. až do dalekého i.č. Počet vrypů na mm bývá od několika set (pro i.č.) do 2000/mm. Obvykle se užívá výměnných mřížek s odleskem určených vždy jen pro určitý obor.

Výrazy pro dispersi a rozlišovací schopnost hranolu můžeme odvodit jednoduchým obratem. Na obr. 7.14 je naznačen chod paprsků při lomu hranolem za podmínek blízkých k minimální deviaci. Necht' při vlnové délce λ je odchylka σ . Odpovídající chod paprsků je na obr. 7.14 nakreslen plnými čarami. Kolmice na paprsky naznačují vlnoplochy rovnoběžných svazků. Pro optické dráhy krajních paprsků tedy musí platit

$$\overline{AB} + \overline{BC} = t n$$



Obr.7.15. K dispersi hranolu

jsou paprsky a vlnoplocha zakresleny čárkovaně. Zřejmě přibližně platí

$$d\sigma = \frac{dx}{l_2}$$

Změna optické dráhy o dx musí být kompensována změnou optické dráhy v hranolu, která je opět přibližně $t \, dn$.^{x)}

Je tedy

$$d\sigma = \frac{t \, dn}{l_2} = \frac{t}{l_2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \cdot d\lambda$$

a úhlová disperse

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{t}{l_2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (7.6)$$

Lineární disperse je odpovídající délková diference dL v ohniskové rovině dalekohledu, dělená diferencí vlnových délek $d\lambda$

$$\frac{dL}{d\lambda} = f \cdot \frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{f \, t}{l_2} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$$

Rozlišovací schopností ve spektrální analýze rozumíme poměr $\Delta / \Delta\lambda$, kde $\Delta\lambda$ znamená nejmenší rozdíl vlnových délek dvou blízkých spektrálních čar o střední vlnové délce λ , které přístroj ještě rozezná jako dvě čáry různé. Rozlišovací schop-

x) Obrázek odpovídá reálné situaci, kdy $\frac{dn}{d\lambda} < 0$, takže při $d\lambda > 0$ je $dn < 0$, $dx < 0$

kde t je základna hranolu a n jeho index lomu pro vlnovou délku λ .

Pro blízkou vlnovou délku $\lambda + d\lambda$ se změní index lomu na $n = \frac{dn}{d\lambda} d\lambda$ a tím též úhel deviace na $\sigma + d\sigma$. Pro tuto vlnovou délku

nost hranolu je omezena ohybovým jevem ve výstupním svazku, který vzniká na lámavé stěně hranolu. Tato stěna v tom případě omezuje vlnoplochu stejně jako štěrbinu. Můžeme tedy užít výsledků pro Fraunhoferův ohyb (jde o rovnoběžné svazky) na štěrbině, jejíž efektivní šířka je dána šířkou svazku l_2 . Ohybové obrazce příslušející vlnovým délkám λ , $\lambda + \Delta\lambda$ se superponují nekoherentním způsobem. Podle Rayleighova kritéria je podmínkou rozlišitelnosti, aby střed nulového maxima druhého ohybového obrazce padl nejméně do vzdálenosti prvního minima prvního systému proužků. Použijeme podobného obratu jako prve, totiž úvahy o optických drahách v hranolu podle obr. 7.14. Střed maxima příslušejícího vlnové délce λ leží ve směru určeném úhlem odchylky σ . První minimum tohoto systému je podle podmínek ohybu na štěrbině odchýleno od tohoto směru o úhel $\Delta\sigma_1 \approx \lambda/l_2$ (klademe zde úhel místo sinu). V tomto směru však má ležet maximum ohybového jevu pro vlnovou délku $\lambda + \Delta\lambda$, kde $\Delta\lambda$ je určeno dispersí hranolu

$$\Delta\lambda = \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)^{-1} \cdot \Delta\sigma = \frac{l_2}{t} \cdot \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)^{-1}$$

V mezním případě jsou odchylky $\Delta\sigma_1$ a $\Delta\sigma$ stejné, tj. pomocí (7.6)

$$\frac{\lambda}{l_2} = \frac{t}{l_2} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \Delta\lambda$$

Odtud dostáváme výraz pro rozlišovací schopnost hranolu

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = t \frac{dn}{d\lambda} \quad (7.7)$$

Z tohoto vzorce je vidět, že je účelné volit základnu hranolu t co největší. Má-li však (7.7) platit, musí celá šířka svazku l_1 , l_2 (při minimální deviaci $l_1 = l_2 = l$) projít objektivu kolimátoru a dalekohledu. Při daných průměrech objektivů znamená zvětšování t zvětšování lámavého úhlu φ . To však má své meze, neboť s rostoucím lámavým úhlem rychle vzrůstají ztráty odrazem na lámavých stěnách a konečně i absor-

pci v hranolu. Existuje proto pro daný materiál hranolu optimální lámavý úhel. U skleněných hranolů se obvykle užívá $\varphi = 60^\circ$.

U mřížkových spektrálních přístrojů lze úhlovou disperzi odvodit z rovnice mřížky (4.18) pro kolmý dopad, derivací podle vlnové délky

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{N}{d \cos \theta}$$

Až na faktor nepřevyšující 2 v praktických případech ($1 < \cos \theta < 1/2$) je tedy disperse rovna poměru řádu difrakce k mřížkové konstantě.

Rozlišovací schopnost mřížky jsme již odvodili v kap.5. Je dána součinem řádu N a počtu štěrbin mřížky m . Dosadíme-li sem za $N = d \sin \theta / \lambda$,

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m N = \frac{m d \sin \theta}{\lambda},$$

vidíme, že tato podmínka se dá formulovat také takto: Rozlišovací schopnost mřížky je rovna počtu vlnových délek připadajících na rozdíl optických drah krajních paprsků difraktovaných na mřížce šířky $md = L$.

Porovnejme nyní rozlišovací schopnosti hranolu a mřížky. Mějme vlnovou délku 550 nm a hranol o základně 5 cm s disperzí indexu lomu $dn/d\lambda = 10^3 \text{ cm}^{-1}$ (odpovídá přibl. flintovému sklu). Rozlišovací schopnost je tedy $5 \cdot 10^3$, to znamená, že můžeme rozlišit vlnové délky o rozdílu $\Delta\lambda = 5,5 \cdot 10^{-5} \times 1/5 \cdot 10^{-3} = 1,1 \cdot 10^{-8} = 0,11 \text{ nm}$.

Optická mřížka o celkové šířce ryté plochy 5 cm s hustotou 1100 čar/mm, tedy s celkovým počtem čar 55000, má v prvním řádu rozlišovací schopnost $5,5 \cdot 10^4$, v druhém $1,1 \cdot 10^5$. To znamená, že v prvním řádu můžeme teoreticky rozlišit diferenci vlnových délek $\Delta\lambda = 5,5 \cdot 10^{-5} / (5,5 \cdot 10^4) = 10^{-9} \text{ cm}$ a v druhém $5 \cdot 10^{-10} \text{ cm}$. To je desetkrát resp. dvacetkrát lepší rozlišovací schopnost nežli u hranolu srovnatelných rozměrů.