Poznámky k přednášce 29.11.2017

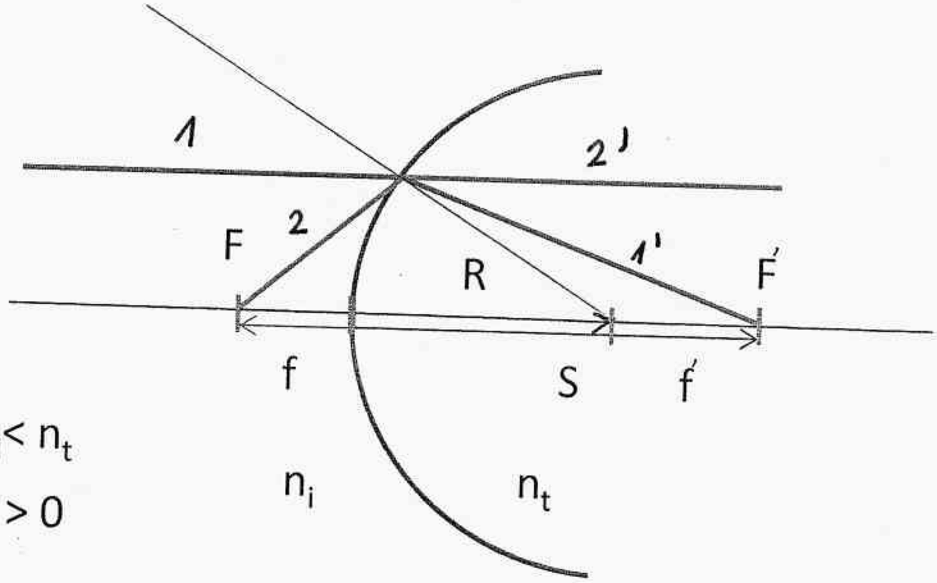
Adresy pro spusteni animaci

https://phet.colorado.edu/sims/geometric-optics/geometric-optics_cs.html

http://www.surendranath.org/GPA/Optics/CurvSurf/CurvSurf.html

2 prostředí oddělená kulovou lámavou plochou

$$\frac{1}{f'} = \left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)\cdot\frac{1}{R} \qquad \frac{1}{f} = \left(1 - \frac{n_t}{n_i}\right)\cdot\frac{1}{R} \qquad \frac{f}{f'} = -\frac{n_i}{n_t}$$

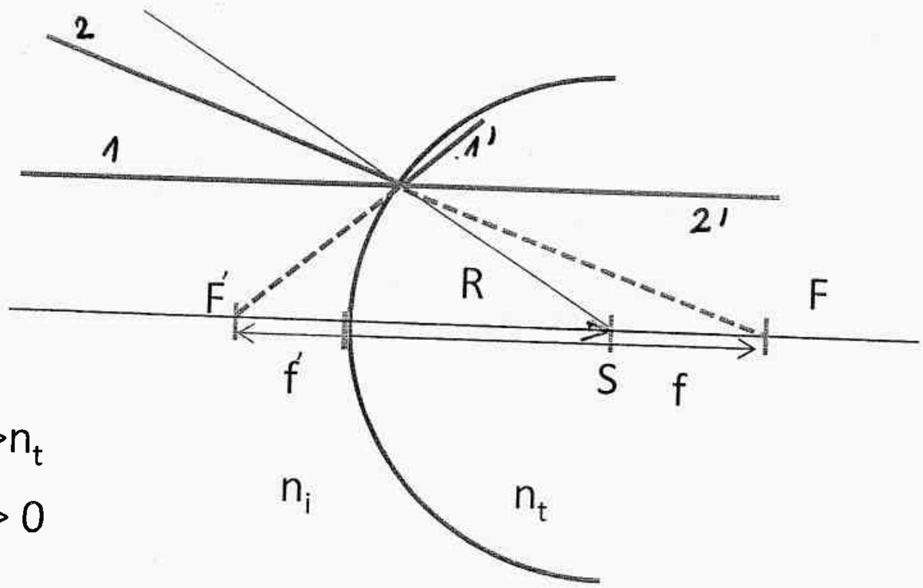


$f' > 0$

$f < 0$

$n_i < n_t$

$R > 0$

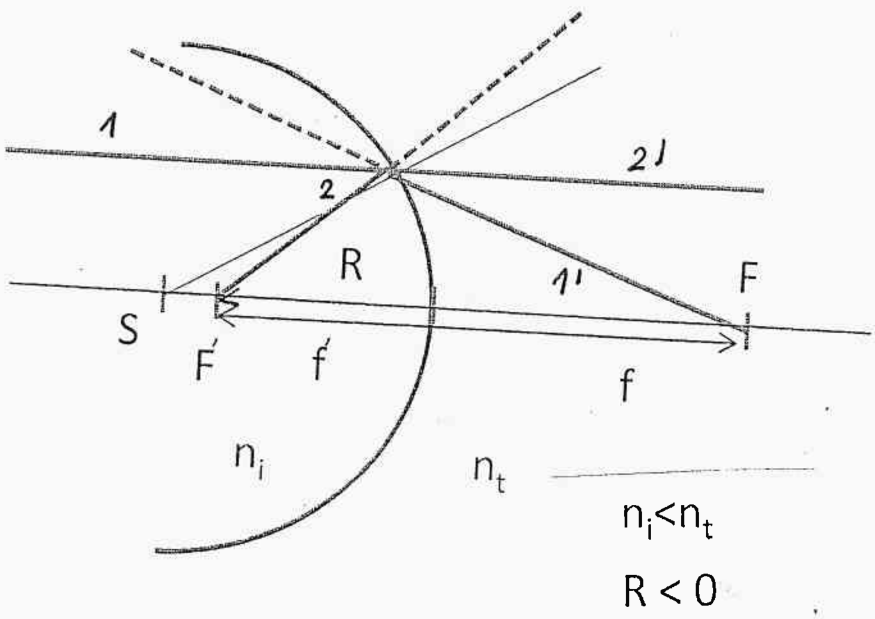


$f' < 0$

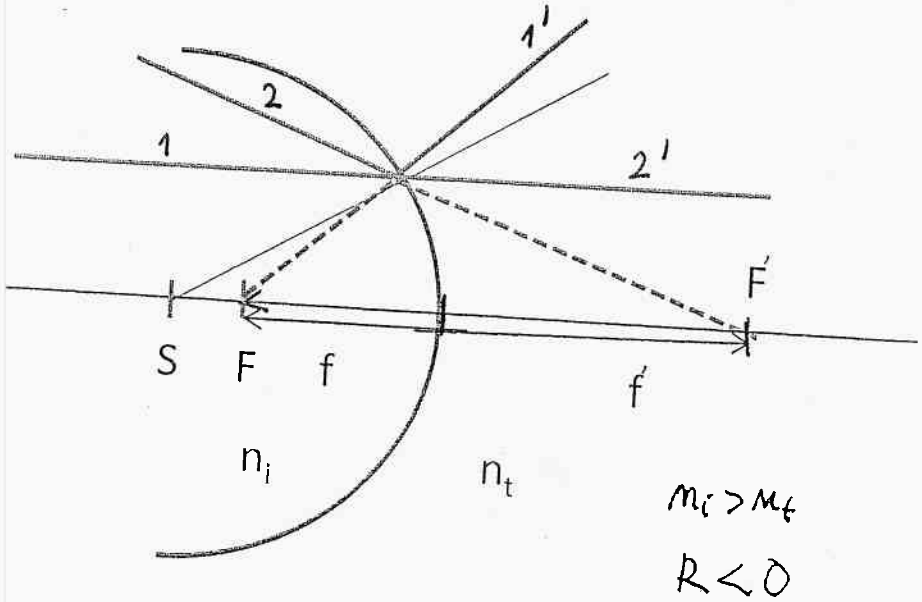
$f > 0$

$n_i > n_t$

$R > 0$



1
2
2'
R
1'
F
S
F'
f'
f
n_i
n_t
$n_i < n_t$
R < 0

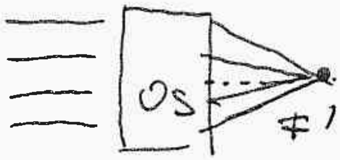


1'
2
1
2'
F'
S
F
f
f'
n_i
n_t
$n_i > n_t$
R < 0

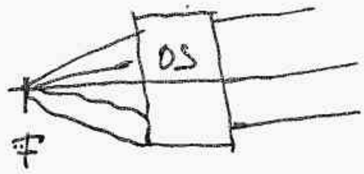
Kardinální body optické soustavy

1. Ohniska – Obrazové ohnisko je paraxiální obraz nekonečně vzdáleného bodu ležícího na optické ose.

Předmětové ohnisko je předmětový bod na optické ose, jehož paraxiální obraz leží v ∞



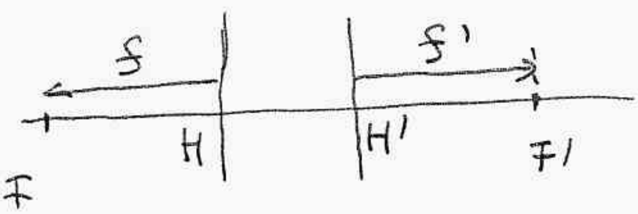
obrazové ohnisko



předmětové ohnisko

2. Hlavní body

Hlavní předmětový a hlavní obrazový bod je dvojice opticky sdružených bodů, které určují hlavní předmětovou a hlavní obrazovou rovinu. Leží-li předmět v hlavní předmětové rovině, leží jeho obraz v hlavní obrazové rovině, je stejně velký a stejně orientovaný, tj. příčné zvětšení je rovno jedné!



Předmětová ohnisková vzdálenost f je vzdálenost předmětového ohniska F od předmětového hlavního bodu H.

Obrazová ohnisková vzdálenost f' je vzdálenost obrazového ohniska F' od obrazového hlavního bodu H'.

3. Uzlové body

Uzlový předmětový a uzlový obrazový bod je dvojice opticky sdružených bodů. Dopadá-li paprsek do předmětového uzlového bodu N, postupuje dále z obrazového uzlového bodu N' tak, že nemění směr, tj. úhlové zvětšení je rovno jedné!

Uzlové body splývají s hlavními, jestliže je optická soustava z obou stran obklopena stejným prostředím.

Ohniskové body leží v ohniskových rovinách (předmětové a obrazové). Ohniskové body a ohniskové roviny nejsou navzájem opticky sdružené. Hlavní body leží v hlavních rovinách, uzlové body leží v uzlových rovinách. Hlavní předmětová a hlavní obrazová rovina jsou navzájem opticky sdružené! To samé platí pro uzlové body a uzlové roviny

Zvětšení při optickém zobrazení

Obraz vytvořený optickou soustavou má obecně jinou velikost než předmět, změnu velikosti popisujeme zvětšením. Zvětšení je charakterizováno změnou rozměrů kolmých k optické ose (příčné zvětšení), změnou úhlu sdružených paprsků (úhlové zvětšení) a změnou vzdálenosti ve směru optické osy (osové zvětšení).

$$M_T = \frac{y_2}{y_1}$$ .. příčné zvětšení

$$M_\theta = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$ .. úhlové zvětšení

Obecné optické soustavy lze popsat pomocí součinu matic pro lom, odraz a šíření!

$\det|T_0| = 1 \qquad \det|T_R| = -1 \qquad \det|T_L| = \frac{n_i}{n_f}$

n_i .. index lomu prostředí na vstupu do optické soustavy

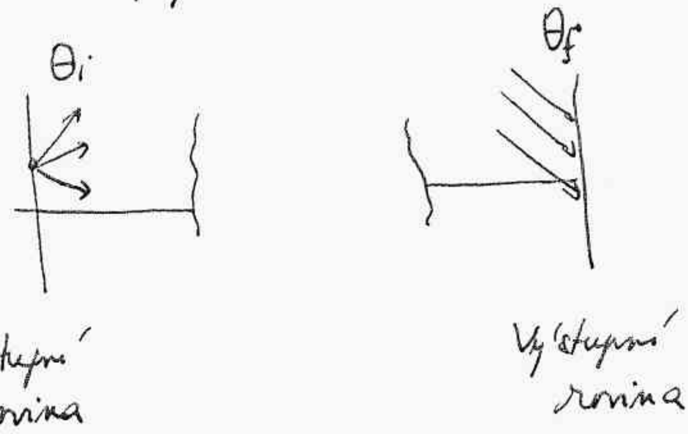
n_f .. index lomu prostředí na výstupu optické soustavy

Nyní rozebereme obecné vlastnosti přenosových (ABCD matic

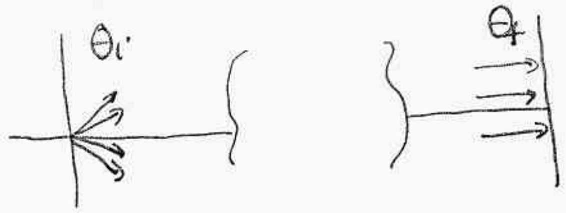
$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

1. $D = 0 \qquad \theta_2 = C y_1$

$\Rightarrow$ úhel vystupujících paprsků nezávisí na úhlu paprsků vstupujících



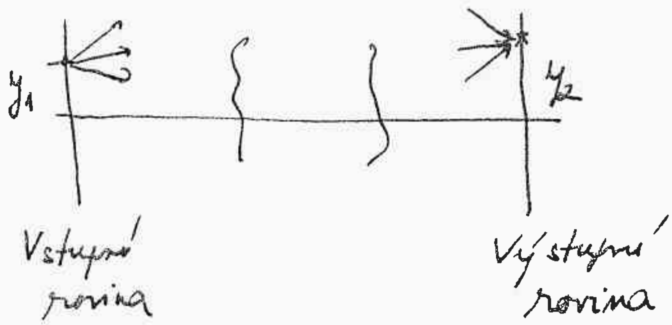
Speciálně pro $y_1 = 0 \qquad \theta_2 = 0$



V tomto případě představuje vstupní rovina předmětovou ohniskovou rovinu

2) $B = 0$ $y_2 = A y_1$ $A = \frac{y_2}{y_1}$

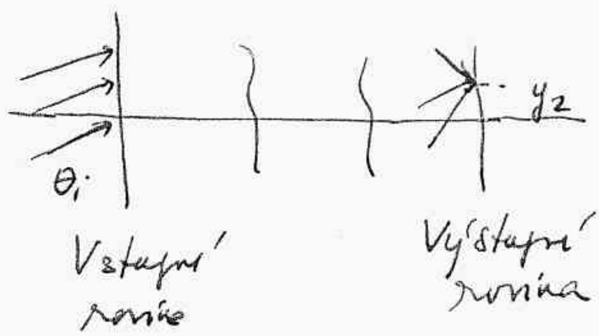
Příčné zvětšení



Vstupní a výstupní roviny jsou navzájem konjugované, jsou tedy předmětovou a obrazovou rovinou.

3) $A = 0$ $y_2 = B \theta_1$

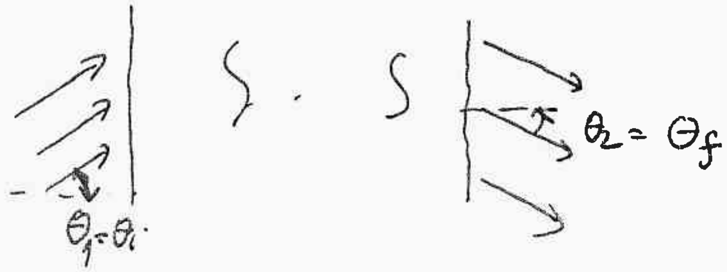
Všechny paprsky které jsou ve vstupní rovině rovnoběžné (mají stejné θ_i) se protnou v jednom bodě výstupní roviny



Výstupní rovina je obrazovou ohniskovou rovinou

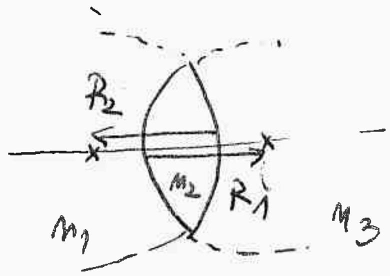
Je-li $\ell = 0$, $\theta_2 = \Delta\theta_1$

Vstupní $\parallel$ paprsky vychází opět jako $\parallel$ (teleskopická soustava)



ABCD matice pro čočky

– získáme násobením matic pro lom na kulovém rozhraní



$R_1 > 0$ spojná čočka

$R_2 < 0$

Znaménková konvence

1. událost .. lom na kulovém rozhraní s poloměrem R_1 $(n_1 \rightarrow n_2)$, 2. událost – lom na R_2 $(n_2 \rightarrow n_3)$

$$T_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_2'} & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_1'} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_2'} + \frac{n_2}{n_3 f_1'} & \frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{f_1'} = \frac{1}{R_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \qquad \frac{1}{f_2'} = \frac{1}{R_2}\left(1 - \frac{n_2}{n_3}\right)$$

$$\frac{1}{f'} = C = \frac{1}{R_2}\left(1 - \frac{n_2}{n_3}\right) + \frac{n_2}{n_3} \cdot \frac{1}{R_1}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

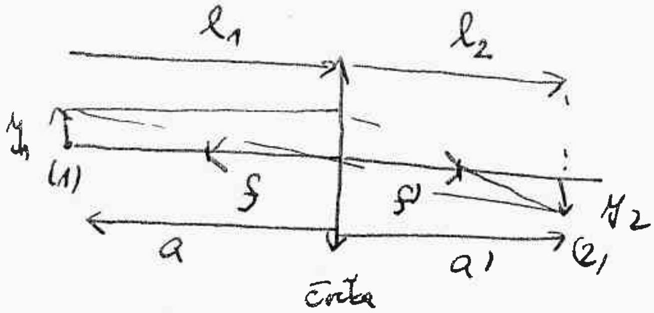
Pro častý případ čočky ve vzduchu

$n_1 = n_3 = 1$ [illegible]

$$\frac{1}{f'} = C = \frac{1}{R_1}(1 - n_2) + \frac{1}{R_2}(n_2 - 1) = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)(n_2 - 1)$$

n_2 .. index lomu čočky

Odvození zobrazovací rovnice



K odvození zobrazovací rovnice využijeme maticový přístup. Z předchozího víme, že při zobrazení je člen matice

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \qquad B = 0$$

Najdeme celkovou přenosovou matici optické soustavy

1. událost šíření z bodu (1) k čočce na vzdálenost l_1 $(l_1 > 0)$
2) lom na čočce s ohniskovou vzdáleností $f = -f'$
3) šíření na vzdálenost l_2 $(l_2 > 0)$

index lomu na vstupu $n_1 = 1 = n_i$
index lomu na výstupu $n_3 = 1 = n_f$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ \frac{1}{f'} & -\frac{l_1}{f'} + 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_2}{f'} & -l_1 + \frac{l_1 l_2}{f'} - l_2 \\ \frac{1}{f'} & -\frac{l_1}{f'} + 1 \end{pmatrix}$$

$B = 0$ $$\frac{l_1 l_2}{f'} = l_1 + l_2$$

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2}$$ $l_2 = a'$, $l_1 = -a$

$$1 = \frac{f'}{l_1} + \frac{f'}{l_2}$$ $$\frac{f}{f'} = -\frac{n_i}{n_f} = -1$$

$$1 = \frac{-f}{-a} + \frac{f'}{a'}$$ $a' > 0$, $a < 0$

$$1 = \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'}$$ Pro $f' = -f$ $$1 = \frac{f}{a} - \frac{f}{a'}$$

Gaussova zobrazovací rovnice $$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'}$$

$(f < 0,\ a < 0,\ a' > 0)$

Pozor – při zobrazování mezi různými prostředími (např. fotografování ve vodě)

je $$\frac{f}{f'} = -\frac{n_i}{n_f}$$ ($n_i = 1.33$ voda, $n_f = 1$ vzduch)

$$f' = -\frac{n_f}{n_i} f$$

$$1 = \frac{\frac{n_f}{n_i} f}{a} + \frac{f'}{a'}$$

$$1 = \frac{n_f}{n_i} \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'}$$

Výpočet příčného zvětšení při zobrazení

Z mezivinného zobrazení

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \quad (1)$$ (Gaussova zobrazovací rovnice pro $n_i = n_e$)

$(B=0)$ $\quad f' = -f$

Pokud $B=0$ je $A = \frac{y_2}{y_1}$ .. příčné zvětšení

$A = 1 - \frac{l_2}{f'} \qquad l_2 = a'$

$A = 1 - \frac{a'}{f'} \qquad f' = -f$

$\Rightarrow A = 1 + \frac{a'}{f} \qquad$ z rovnice (1)

$$\frac{a'}{f} = \frac{a'}{a} - 1$$

$\Rightarrow A = 1 + \frac{a'}{a} - 1 = \frac{a'}{a}$ .. příčné zvětšení

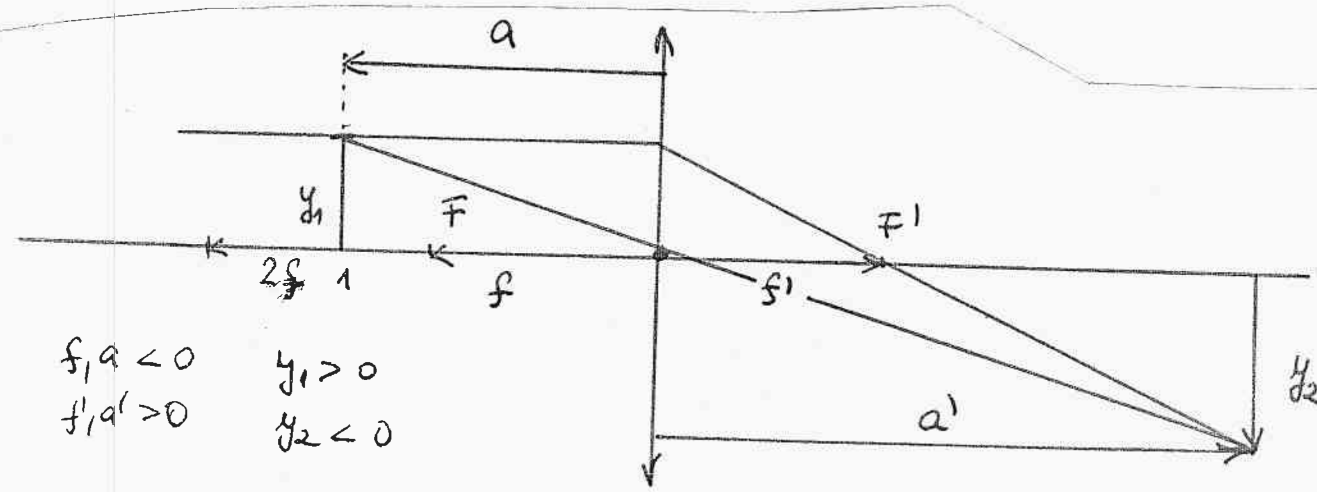
Výpočet úhlového zvětšení

$C = 0 \quad \Rightarrow D = \frac{\Theta_2}{\Theta_1} = M_\Theta$ úhlové zvětšení

$\frac{1}{f'} = 0 \quad \Rightarrow f' = \pm\infty \quad \Rightarrow \quad -\frac{l_1}{f'} + 1 = 1 = M_\Theta$

Úhlové zvětšení je rovno jedné!

Zobrazení pomocí čoček - geometrické konstrukce. V této je jednoduché podat platí pro tenké optické prvky ($H = H'$) a pro případ, kdy je index lomu před optickou soustavou a za ní stejný tj. $n_1 = n_3$.



$f, a < 0$ $\quad y_1 > 0$

$f', a' > 0$ $\quad y_2 < 0$

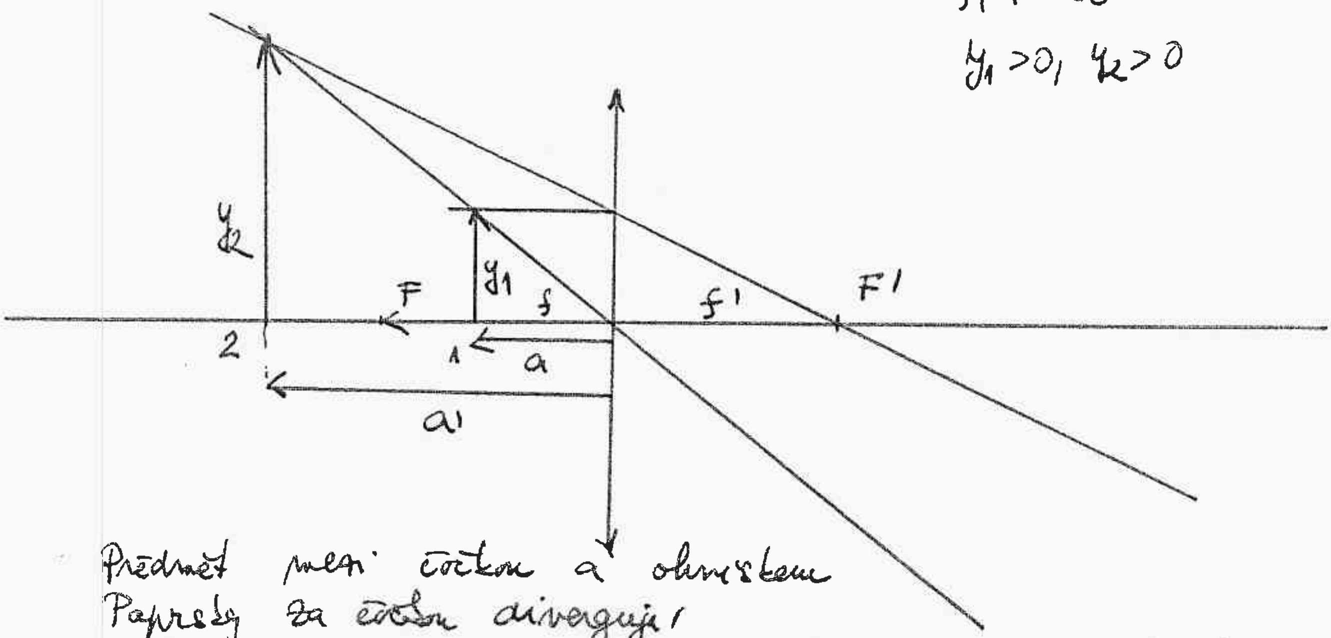
Předmět ve vzdálenosti $2f > a > f$

Obraz vzniká v prostoru za čočkou, je reálný (paprsky konvergují), invertovaný a zvětšený. Lze ověřit dosazením do Gaussovy zobrazovací rovnice při dodržení znaménkové konvence

$f' > 0, a' < 0$

$f, a < 0$

$y_1 > 0, y_2 > 0$



Předmět mezi čočkou a ohniskem

Paprsky za čočkou divergují

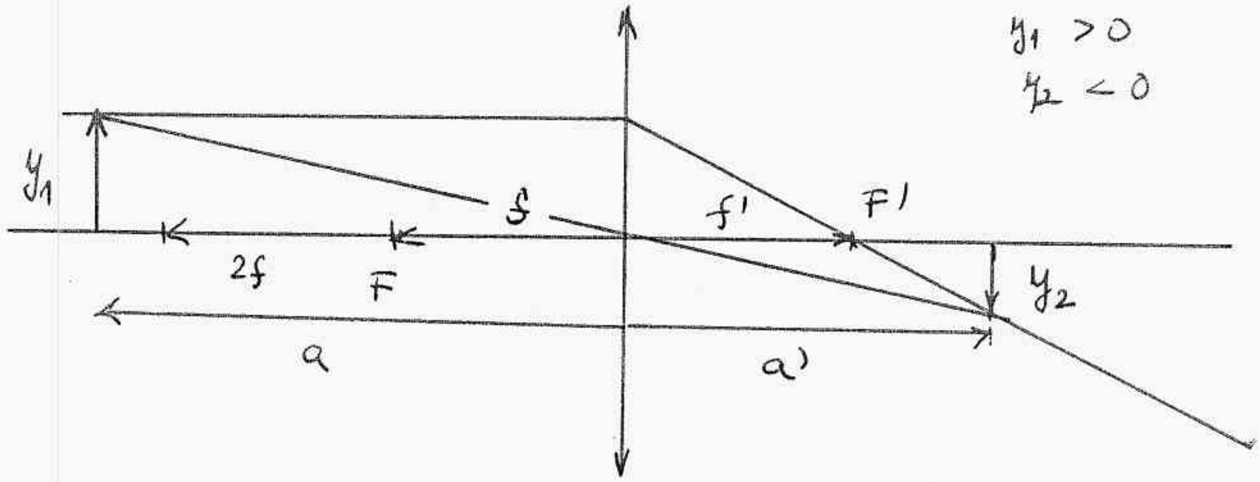
Obraz vzniká prodloužením paprsků do předmětového prostoru, je virtuální, přímý a zvětšený

$f', a' > 0$

$f, a < 0$

$y_1 > 0$

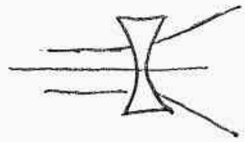
$y_2 < 0$



$a > 2f$

Obraz vzniká v obrazovém prostoru za čočkou, je reálný (paprsky konvergují), invertovaný a zmenšený

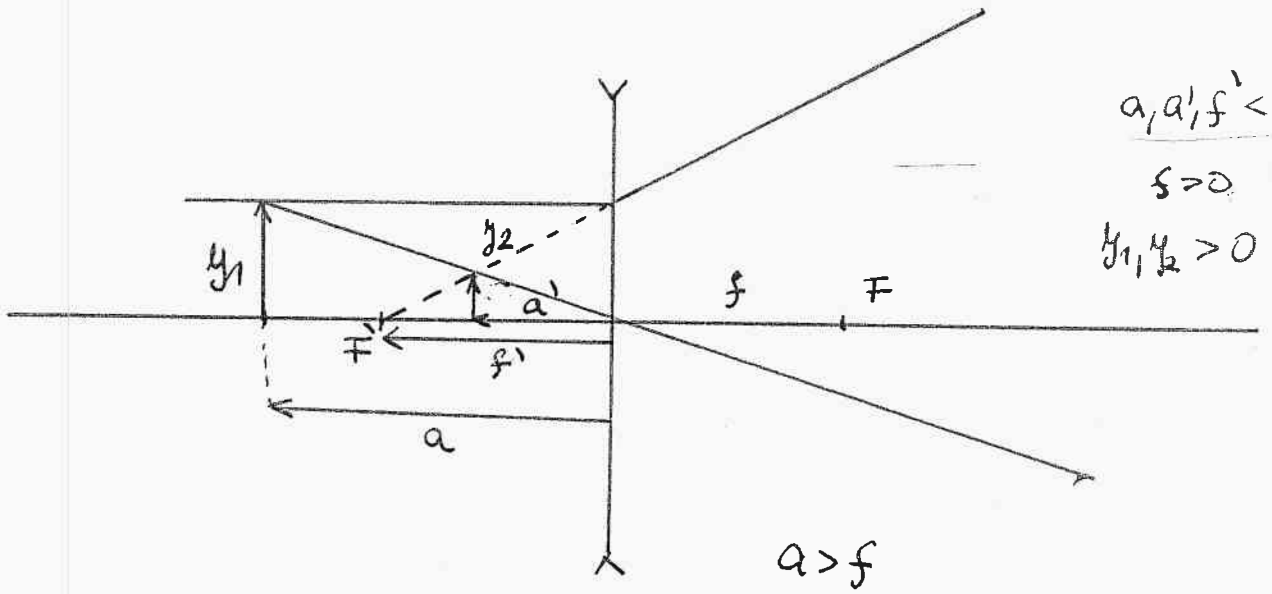
Rozptylná čočka



$a, a', f' < 0$

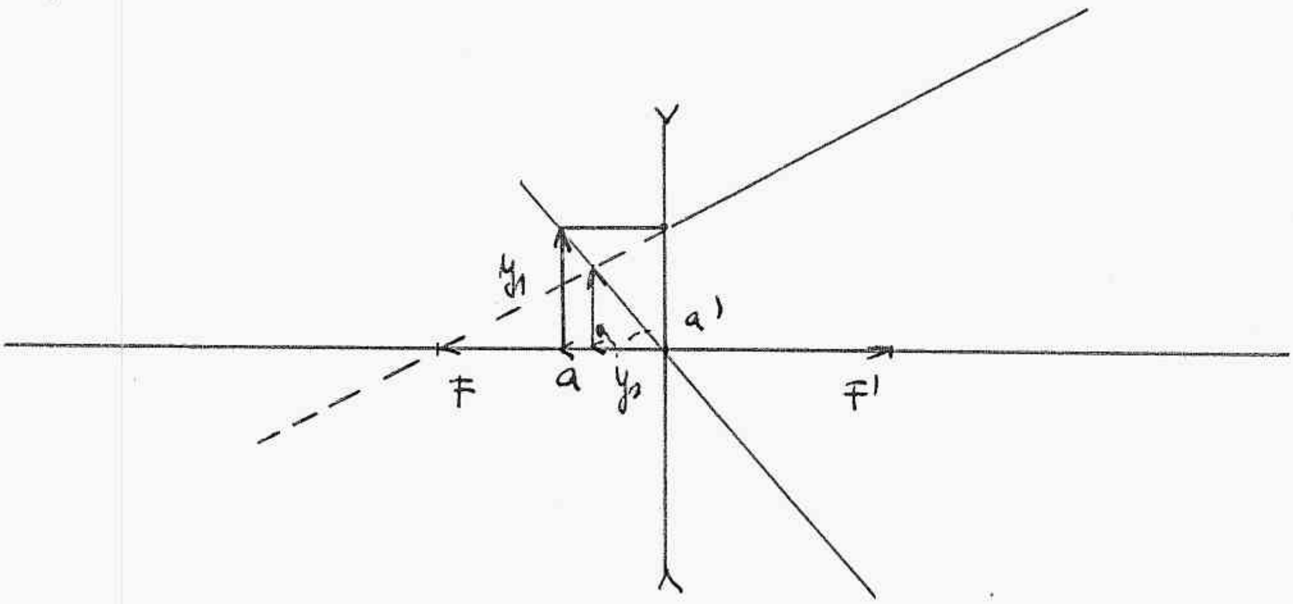
$f > 0$

$y_1, y_2 > 0$



$a > f$

Obraz je virtuální, vzpřímený a zmenšený



$a < f$

Obraz je opět virtuální, vzpřímený a zmenšený

Vybrané zobrazovací přístroje

Lupa

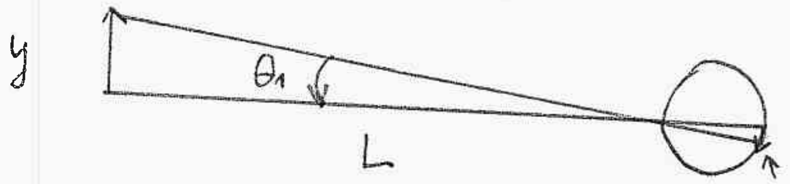
Spojná soustava v nejjednodušším případě jedna vypuklá čočka.

Rozhodujícím parametrem je úhlové zvětšení M_θ

$$M_\theta = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

θ_2 ... úhel pod kterým vidí pozorovatel při zobrazení lupou

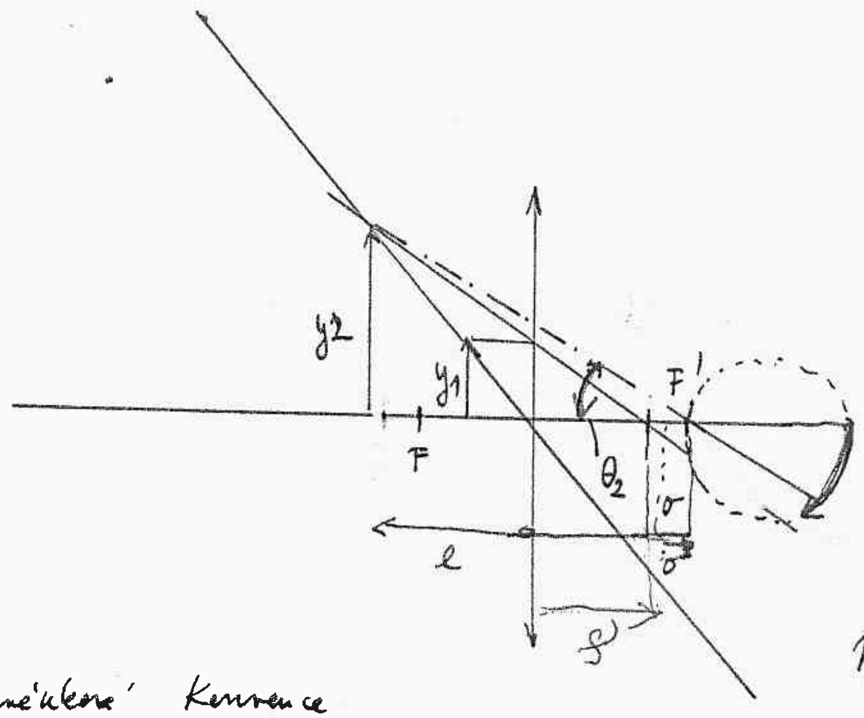
θ_1 ... úhel pod kterým vidí pozorovatel předmět bez lupy



L .. konvenční zraková vzdálenost

obraz předmětu bez použití lupy

Cílem lupy je zvětšit obraz na sítnici oka, tj. zvětšit θ ($\theta_2 > \theta_1$)



Obraz v oku při použití lupy. Lom paprsků optickou soustavou oka není zobrazen

Znaménková konvence

- vzdálenost od vztažného bodu vlevo < 0

$$\theta_1 = -\frac{y_1}{L} \qquad (y > 0,\ L < 0,\ \theta_1 > 0)$$

$$\theta_2 = -\frac{y_2}{l} \qquad M_\theta = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{y_2}{y_1} \cdot \frac{L}{l}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = -\frac{(l+\sigma)}{f'}$$

($\sigma > 0$ na obrázku, ale může být i < 0 → ako se přibližuje čočka na vzdálenost menší než f')

$l < 0$

$$M_\theta = -\frac{l+\sigma}{f'} \cdot \frac{L}{l} = -\frac{L}{f'}\left(1 + \frac{\sigma}{l}\right)$$

Zvětšení (úhlové) je závislé na vzájemné poloze oka, lupy a předmětu

Obvykle se uvádí zvětšení pro jeden ze dvou případů

1) $l = -\infty$, do oka vstupují $\parallel$ paprsky

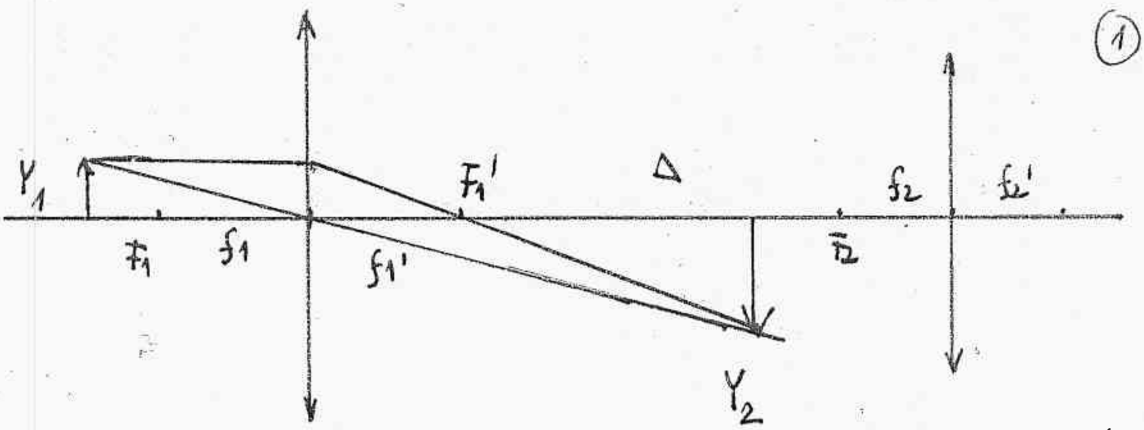
$$M_{\theta\infty} = -\frac{L}{f'} = \frac{-0{,}25\,\mathrm{m}}{f'}$$

2) Lupa je bezprostředně před okem $\sigma = -f'$ a předmět umístíme tak, aby virtuální obraz vznikl v konvenční zrakové vzdálenosti $L = 25\,\mathrm{cm} = 0.25\,\mathrm{m} = l$

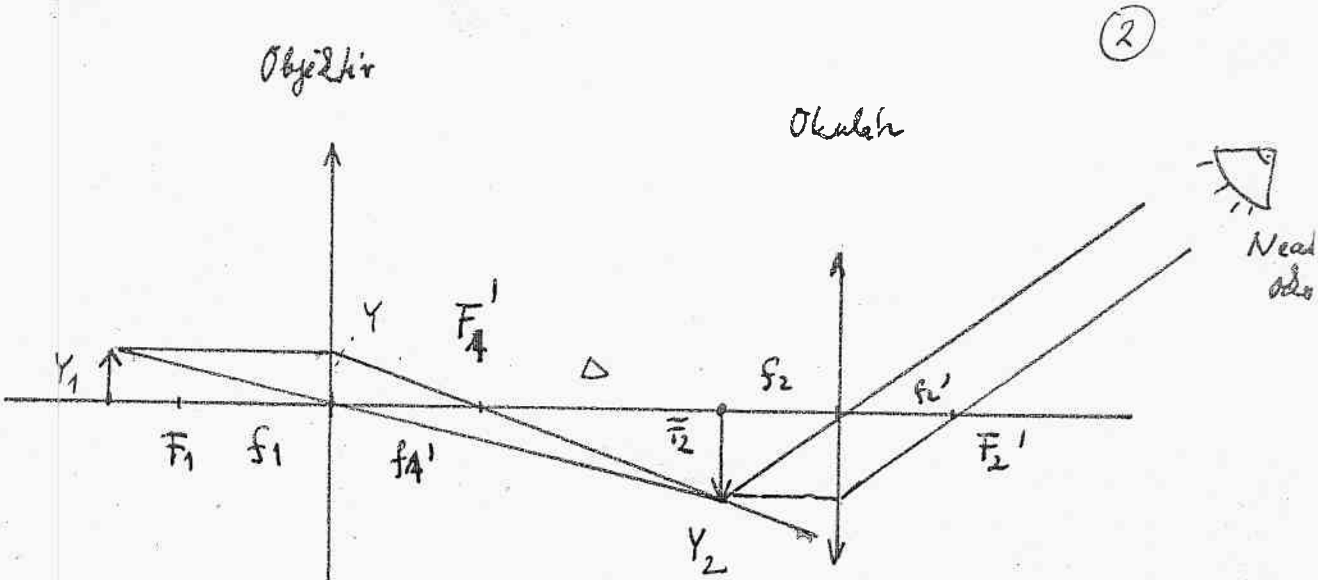
$$M_{\theta L} = -\frac{L}{f'}\left(1 - \frac{f'}{L}\right) = -\frac{L}{f'} + 1 = M_{\theta\infty} + 1$$

Mikroskop

V případě velmi malých objektů lze zvětšení lupy zvýšit přidáním další spojné čočky
Narozdíl od dalekohledu má objektiv v mikroskopu malou ohniskovou vzdálenost



Nezaostřený mikroskop. zaostření = posun Y_2 do F_2
(tj. zkrácení Δ)



$$\left|\frac{Y_1}{f_1'}\right| = \left|\frac{Y_2}{\Delta}\right|$$

Δ .. optický interval

V případě, že z okuláru (lupy) vycházejí rovnoběžné paprsky, je předmět v ohnisku a virtuální obraz v $-\infty$, pro úhlové zvětšení lupy platí vztah $M_{\theta\infty} = -\frac{L}{f'}$

zvětšení objektivu $\left|\frac{y_2}{y_1}\right| = \frac{\Delta}{f_1'}$

Celkové zvětšení mikroskopu je součinem obou zvětšení

$$\Gamma = \frac{\Delta}{f_1'} \cdot \frac{(-L)}{f_2'}$$

Co největší zvětšení mikroskopu - zvětšení optického intervalu Δ, malý součin $f_1' f_2'$, tj. malé ohniskové vzdálenosti jak objektivu tak okuláru

Brýle

1) akomodace oka - funkce kterou čočka oka mění svůj poloměr R

Ideální oko - při úplné relaxaci svalů dopadají paprsky z ∞ na sítnici!

Při přiblížení objektu k oku se svaly napnou, fokální vzdálenost se zmenší.

Nejbližší schopno bod. bod objektu, pro který je oko změnit křivost se nazývá blízký

7 cm teenager

12 cm mladý člověk

28-40 střední věk

100 cm nad 60 let

Brýle .. vynalezeny pravděpodobně ve 13. století

Spojná čočka $f' > 0$ $f' = 1\,m$ $D = 1\,D$

Rozptylná čočka $f' < 0$ $f' = -2\,m$ $D = -\frac{1}{2}\,D$

$f' = 10\,cm$ $D = \quad = 10\,D = \frac{1}{0.1}$

D .. ⌀ čočky

$\mathcal{D}$ ... optická mohutnost ($\frac{1}{f}$ ... jednotka dioptrie)

Rovnice tenké čočky na vzduchu

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \mathcal{D}$$

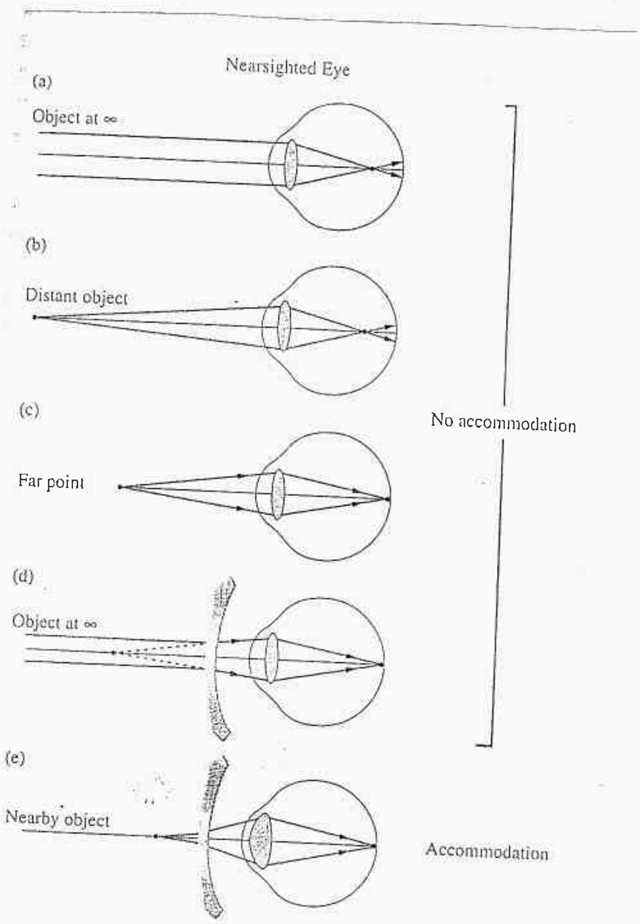
Spojná čočka, která silně láme paprsky na krátkou vzdálenost ... $\mathcal{D}$ je velká

ohnisková vzdálenost 2 spojných čoček v kontaktu

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad \mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

Krátkozrakost

Paprsky přicházející z $-\infty$ na nezakomodované oko se lámou tak, že vytvářejí obraz před sítnicí! Oko je příliš dlouhé. Vzdálený bod, který by v ideálním případě měl být v $(-\infty)$, se nachází blíže.



Cílem korekce pomocí brýlí je posunout objekt z $(-\infty)$ do vzdáleného bodu (tj. jeho obraz) a tím získat obraz na sítnici.

Předpokládejme, že vzdálený bod je např. ve vzdálenosti 2 m.

Pak

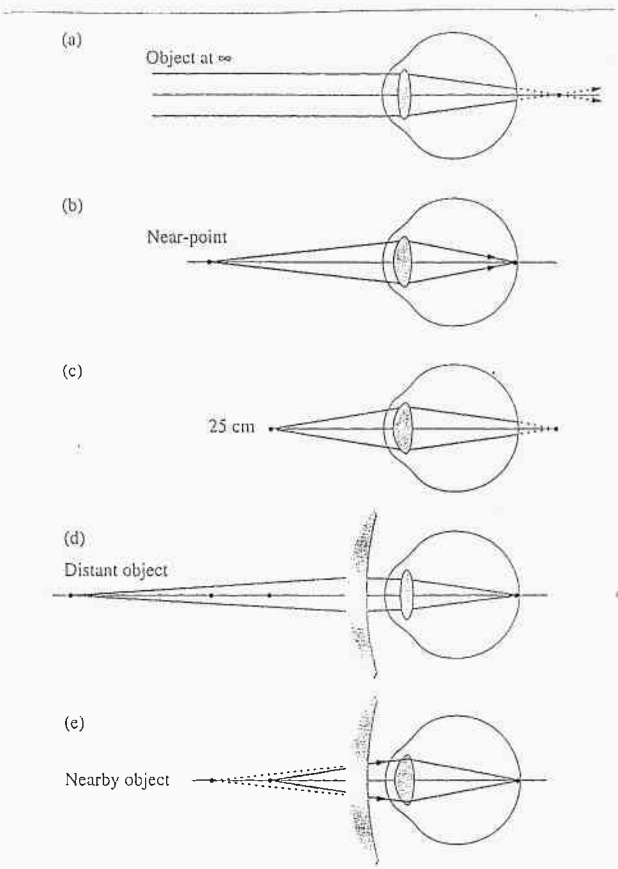
$$\frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} =$$

$$= -\frac{1}{(-\infty)} + \frac{1}{(-2m)} = -\frac{1}{2}$$

Dalekozrakost

Vada způsobuje, že ∥ paprsky přicházející z $-\infty$ vytvářejí obraz za sítnicí. - oko je příliš krátké!

Blízký bod ... bod, na který je oko schopno zaostřit



Cílem korekce pomocí brýlí je přenesení obrazu předmětu, který je před okem do blízkého bodu a tím dostat obraz na sítnici.

Díky spojné čočce brýlí dopadnou na čočku oko tak, že paprsky se zalomí pod menším úhlem a dopadnou na sítnici.

Standardní blízký bod $L = -25\,cm$

$$1 = \frac{f}{a} + \frac{f'}{a'} = -\frac{f'}{a} + \frac{f'}{a'} \qquad \frac{1}{f'} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$

V našem případě je $a = -0.25\,m$. Nechť náš blízký bod je ve vzdálenosti $2\,m$, tj. $a' = -2\,m$

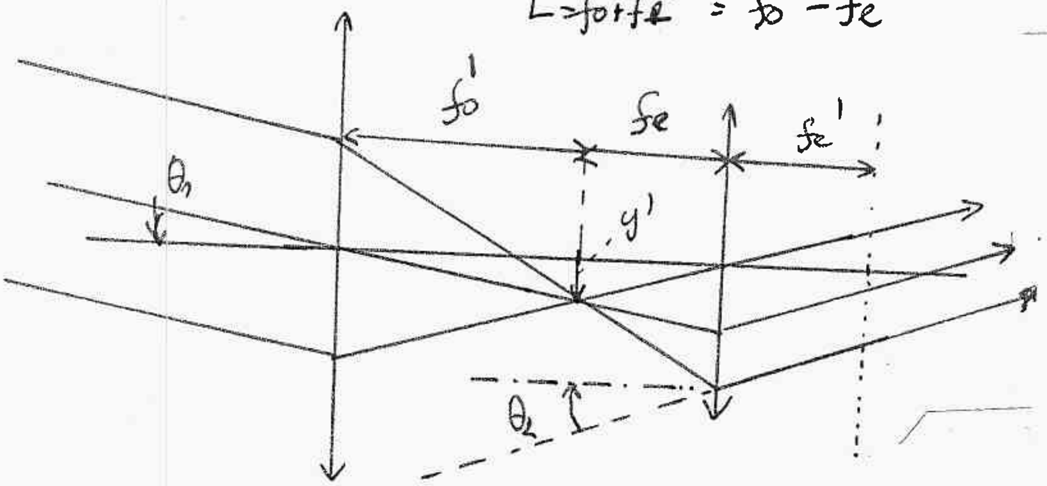
Pak $$\frac{1}{f'} = \frac{1}{0.25} - \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2} = 3.5$$

$\Rightarrow D = 3{,}5$ dioptrií

Úhlové zvětšení dalekohledu – maticově

Dalekohled – 2 čočky, objektiv (f_o), okulár (f_e)

$L = f_o' + f_e' = f_o' - f_e$ $\quad (f_e < 0,\ -f_e > 0)$



$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

V případě dalekohledu ... paprsky vstupující do objektivu (// – z $-\infty$) a paprsky vystupující z okuláru (// do $+\infty$) ... dopadají do neakomodovaného oka

Jedná se tedy o případ, kdy v přenosové matici je $C = 0$ tedy $\theta_2 = D\,\theta_1$

(Zvolením úhlu θ_f – směr vystupujících paprsků tedy odpovídá jednomu θ_i .. směr vstupujících paprsků) vstupující // paprsky tedy vystupují rovněž jako //)

Přenosová matice

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_e'} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_o'} & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_e'} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f_o'} & -L \\ \frac{1}{f_o'} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{L}{f_o'} & -L \\ \frac{1}{f_e'}\left(1 - \frac{L}{f_o'}\right) + \frac{1}{f_o'} & 1 - \frac{L}{f_e'} \end{pmatrix}$$

$$C = 0$$

$$\frac{1}{f_e'} + \frac{1}{f_o'} = \frac{L}{f_o' f_e'} \quad \Rightarrow \quad L = f_o' + f_e'$$

(Výsledek v souladu s nákresem)

úhlové zvětšení ... prvek D matice

$$M_\theta = 1 - \frac{L}{f_e'} = \frac{f_e' - f_o' - f_e'}{f_e'} = -\frac{f_o'}{f_e'}$$