Geometrická optika

- popisuje šíření světla pomocí paprsků
- je to limitní případ vlnové optiky

Světelné pole $\vec{E}(\vec{r},t)$ ... popsáno vektorem elektrické intenzity

$\vec{k}\cdot\vec{r} = k\,\vec{s}_0\cdot\vec{r} =$ $\vec{s}_0$ ... jednotkový vektor ve směru šíření

$$= \frac{2\pi}{\lambda}\vec{s}_0\cdot\vec{r} = \frac{2\pi}{vT}\vec{s}_0\cdot\vec{r} = \frac{\omega}{v}\vec{s}_0\cdot\vec{r} = \frac{\omega}{c}n\,\vec{s}_0\cdot\vec{r} = k_0 n\,\vec{s}_0\cdot\vec{r} = k_0\cdot d$$

d ... optická dráha světla

Dále budeme uvažovat šíření světla v isotropním, opticky nehomogenním prostředí!

$$n = n(\vec{r}) \qquad \varepsilon = \varepsilon(\vec{r})$$

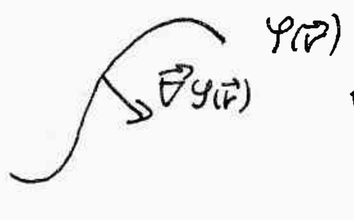
Řešení budeme hledat pomocí vln s obecnějším prostorovým charakterem než je např. rovinná vlna.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\,e^{ik_0\varphi(\vec{r})}\,e^{-i\omega t}$$

$\vec{E}_0(\vec{r})$ je amplituda, která se mění málo na vzdálenosti vlnové délky λ

$\varphi(\vec{r})$ ... skalární fce souřadnic - eikonál, má rozměr délky

Pokud $\varphi(\vec{r})$ reálné - znamená to, že není žádný přenos energie mezi vlnou a prostředím (absorpce, zesílení)



$\nabla\varphi(\vec{r}) = \operatorname{grad}\varphi(\vec{r})$ udává směr šíření vlny

V případě rovinné vlny je $\varphi(\vec{r}) = n\vec{s}_0\vec{r}$ (viz výše)

Analogicky předpokládáme, že

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0(\vec{r})\, e^{ik_0\varphi(\vec{r})} e^{-i\omega t}$$

Dále z Maxwellových rovnic

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{A} \quad \text{a}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\, e^{i(k_0\varphi - \omega t)}$$

Dále s použitím vzorce

$$\mathrm{rot}\, a\vec{A} = a\, \mathrm{rot}\,\vec{A} + \mathrm{grad}\, a \times \vec{A}$$

dostaneme

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}(\vec{r},t) = \mathrm{rot}\,\vec{E}_0(\vec{r})\, e^{i(k_0\varphi - \omega t)} + \mathrm{grad}\left(e^{i(k_0\varphi - \omega t)}\right) \times \vec{E}_0(\vec{r}) -$$

$$- i\omega\mu_0 \vec{H}_0(\vec{r})\, e^{i(k_0\varphi - \omega t)} = 0$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}_0(\vec{r}) + ik_0\, \mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r}) - i\omega\mu_0 \vec{H}_0(\vec{r}) = 0 \quad / \cdot \frac{1}{k_0}$$

$$\underbrace{\frac{1}{k_0}}_{\frac{\lambda_0}{2\pi}} \underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{E}_0(\vec{r})}_{\substack{\text{změny } \vec{E}_0 \\ \text{v prostoru}}} + i\, \mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r}) \times \vec{E}_0(\vec{r}) - i\frac{\omega}{k_0}\mu_0 \vec{H}_0(\vec{r}) = 0$$

Pokud 1. člen zanedbatelný $\Rightarrow$ limit geometrické optiky

$$\Rightarrow \vec{H}_0(\vec{r}) = \frac{k_0}{\mu_0\omega}\, \mathrm{grad}\,\varphi \times \vec{E}_0(\vec{r})$$

Podobně

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = -\frac{k_0}{\varepsilon_0\omega n^2}\, \mathrm{grad}\,\varphi \times \vec{H}_0$$

$$\vec{H}_0(\vec{r}) = \frac{k_0}{\mu_0 \omega} \operatorname{grad}\varphi \times \vec{E}_0(\vec{r})$$

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = -\frac{k_0}{\varepsilon_0 \omega n^2} \operatorname{grad}\varphi \times \vec{H}_0(\vec{r})$$

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = -\frac{k_0}{\varepsilon_0 \omega n^2} \operatorname{grad}\varphi \times \left\{ \frac{k_0}{\mu_0 \omega} \operatorname{grad}\varphi \times \vec{E}_0 \right\}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$$

$$\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi \quad \vec{b} = \operatorname{grad}\varphi \quad \vec{c} = \vec{E}_0$$

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = \overbrace{-\frac{k_0^2}{\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 n^2}}^{-\frac{1}{n^2}} \operatorname{grad}\varphi \times \left\{ \operatorname{grad}\varphi \times \vec{E}_0 \right\} =$$

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \qquad \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2$$

$$= -\frac{1}{n^2} \left\{ \operatorname{grad}\varphi (\operatorname{grad}\varphi \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 (\operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{grad}\varphi) \right\}$$

$$\operatorname{grad}\varphi \cdot \vec{E}_0 = \operatorname{grad}\varphi \cdot (\operatorname{grad}\varphi \times \vec{H}_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n^2 \vec{E}_0(\vec{r}) = \vec{E}_0 (\operatorname{grad}\varphi)^2$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{grad}\varphi = n(\vec{r}) \cdot \vec{s}_0$$

Označme směr $\operatorname{grad}\varphi = \vec{s}_0$

Eikonálová rovnice

Fyzikální význam eikonalu – jeho gradient udává rozložení indexu lomu grad φ udává směr šíření energie vlny

$$\vec{H}_0(\vec{r}) \sim \operatorname{grad}\varphi \times \vec{E}_0(\vec{r})$$
$$\vec{E}(\vec{r}) \sim \operatorname{grad}\varphi \times \vec{H}_0(\vec{r})$$

$$\vec{S} \sim \vec{E}_0 \times \vec{H}_0 \sim (\operatorname{grad}\varphi \times \vec{H}_0) \times (\operatorname{grad}\varphi \times \vec{E}_0)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi \times \vec{H}_0 \qquad \vec{b} = \operatorname{grad}\varphi \qquad \vec{c} = \vec{E}_0$$

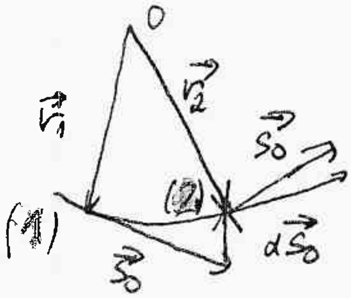
$$\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 = \operatorname{grad}\varphi \, \underbrace{\{(\operatorname{grad}\varphi \times \vec{H}_0)\cdot\vec{E}_0\}}_{\text{číslo (skalár)}} - \vec{E}_0 \, \underbrace{\{(\operatorname{grad}\varphi \times \vec{H}_0)\cdot\operatorname{grad}\varphi\}}_{=0}$$

$\Rightarrow$ Směr šíření energie (Poyntingův vektor $\vec{S}$) má směr <u>grad φ</u>.

Dále definujme

$\operatorname{grad}\varphi =$ konst. .. vlnoplochy

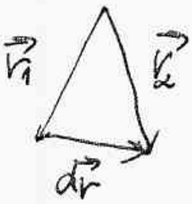
Paprsek ... křivka, k níž je $\vec{s}_0(\vec{r})$ tečnou



s ... parametr křivky

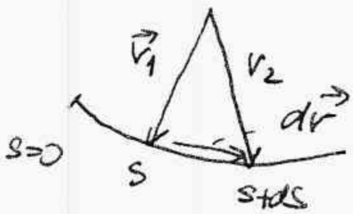
V bodě 1 ... má parametr křivky hodnotu s

V bodě 2 $s+ds$



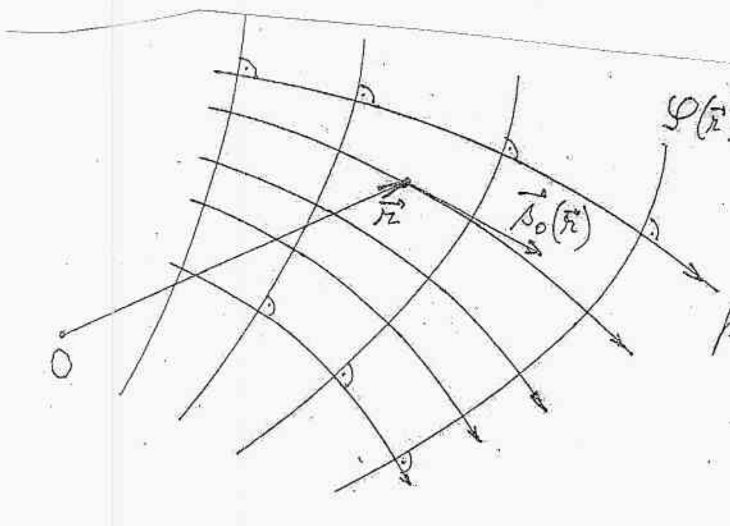
$$\vec{s}_0(s+ds) = \vec{s}_0(s) + d\vec{s}_0$$

$$\vec{s}_0 = \frac{\operatorname{grad}\varphi}{n} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|}$$



$$\vec{s}_0 = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|} = \frac{d\vec{r}}{ds}\Big|_{\vec{r}}$$ „Definice tečného vektoru, pokud je parametrem křivky oblouk s"

$$\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) = n(\vec{r})\cdot\vec{s}_0(\vec{r}) = n(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}\Big|_{\vec{r}}$$



$\varphi(\vec{r}) =$ KONST

„geometrické vlnoplochy" nepohybují se

paprsky, $\vec{s}_0(\vec{r})$ tečny k paprskům

Odvození paprskové rovnice

Provedeme derivaci $\dfrac{d(\operatorname{grad}\varphi)}{ds}$ ve složkách

$$\frac{d}{ds}\left(\operatorname{grad}\varphi(x,y,z)\right)_x = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$S_{0x} = \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$ (z Eikonálové rovnice)

$$\vec{S}_0 = \frac{d\vec{r}}{ds} \Rightarrow S_{0x} = \frac{\partial x}{\partial s}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{n}\frac{\partial\varphi}{\partial x} =$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

Pomocný výpočet

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 2\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}(\operatorname{grad}\varphi)_x = \frac{1}{2n}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x}\Bigg[\underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}_{(\operatorname{grad}\varphi)^2 = n^2}\Bigg]$$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2n}\frac{\partial}{\partial x}(n^2) = \frac{2n}{2n}\cdot\frac{\partial n}{\partial x}, \quad \text{tj. } \frac{d}{ds}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = n(\vec{S}_0)_x = n\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x}$$

Všechny složky dohromady $\dfrac{d}{ds}\left(n(\vec{r})\cdot\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right) = \operatorname{grad} n(\vec{r})$

Paprsková rovnice

$$\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = n(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\Big|_{\vec{r}}$$

$$\frac{d\,(\operatorname{grad} \varphi)}{ds} = \operatorname{grad} n(\vec{r}) = \frac{d}{ds}\left(n(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\right)$$ Paprsková rovnice

(po delším výpočtu)

V homogenním prostředí je $\operatorname{grad} n(\vec{r}) = 0$
$n \neq f(\vec{r})$

$$\Rightarrow n \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0 \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = 0$$

Řešení rovnice ve tvaru $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} s$

$\vec{a}, \vec{b}$ .. konstantní vektory dané okrajovými podmínkami

Rovnice přímky

Eikonálová rovnice

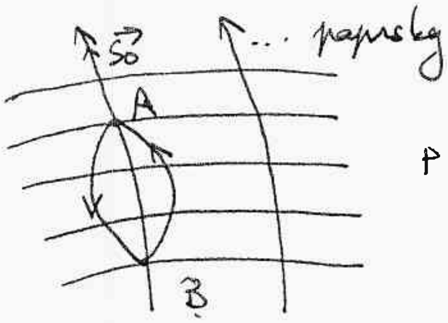
$$n(\vec{r})\, s_0(\vec{r}) = \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) \quad / \operatorname{rot}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = \operatorname{rot}\,[n(\vec{r})\, s_0(\vec{r})] = 0$$

Stokesova věta

$$\iint_A \operatorname{rot} n \vec{s_0}(\vec{r})\, dA = \oint_l n \vec{s_0} \cdot d\vec{l} = 0$$ A je plocha ohraničená křivkou

$$\vec{s_0} = \frac{\operatorname{grad} \varphi}{n}$$ .. jednotkový vektor ve směru šíření



Plochy konstantního eikonálu
$\operatorname{grad} \varphi = $ konst.

Pro uzavřenou dráhu mezi A a B platí

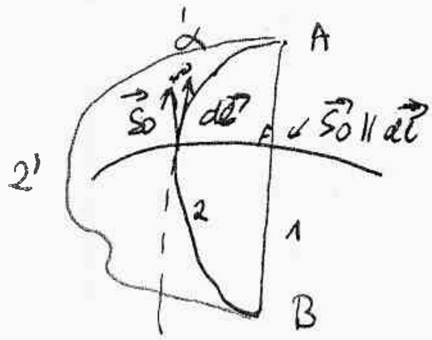
$$\oint_l n \vec{s_0} \cdot d\vec{l} = 0$$ Lagrangeův invariant

8

$$\int_B^A + \int_A^B = 0 \Rightarrow \int_A^B = -\int_B^A$$

Mezi A a B existuje mnoho drah – jedna z nich je výjimečná – taková, kdy $\vec{s}_0 \parallel \vec{dl}$ podél celé dráhy

$\vec{s}_0 \parallel \vec{dl}$ .. definice paprsku



V případě, že $\vec{s}_0 \parallel \vec{dl}$ platí

$$\vec{s}_0 \cdot \vec{dl} = s_0\, dl \cos\alpha = s_0\, dl = dl$$

$$|\vec{s}_0| = 1$$

Všechny ostatní dráhy se vyznačují tím, že $dl \cos\alpha < dl$

$$\Rightarrow \int_A^B n\, \vec{s}_0 \cdot \vec{dl} = \int_A^B n \cos\alpha\, dl$$

$$n\, dl \cos\alpha < n\, dl$$

$$\int_A^B = -\int_B^A$$

Je-li jedna z cest fixní (např. $\int_B^A$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{A\,(2,2',\dots)}^B$ přes všechny možné dráhy je vždy stejný

protože $dl \cos\alpha < dl$

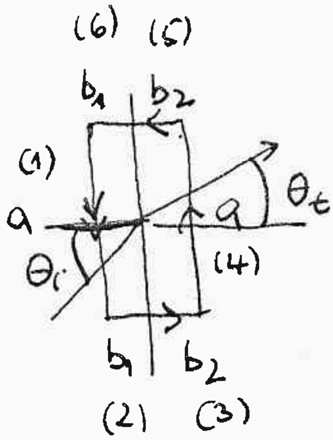
aby platilo $\displaystyle\int_A^B n\, dl \cos\alpha \overset{!}{=} \int_A^B n\, dl$ (tj. pro případ $\vec{s}_0 \parallel \vec{dl}$)

$\Rightarrow$ dráha je delší pokud je $\cos\alpha < 1$

$\Rightarrow$ dráha je minimální, pokud $\cos\alpha = 1$

tj. je-li $\vec{s}_0 \parallel \vec{dl}$ (paprsek)

Odvození zákona lomu z Lagrangeova invariantu



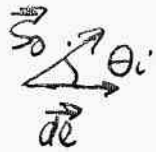
$$\oint_l n \vec{S}_0 \cdot \vec{dl} = 0$$

(1)

$$\vec{S}_0 \cdot \vec{dl} = \underbrace{|\vec{S}_0|}_{=1} \cdot dl \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_i\right) = -dl \sin\theta_i$$

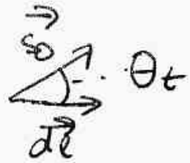
$$\int_{(1)} n \vec{S}_0 \cdot \vec{dl} = -n_1 a \sin\theta_i$$

(2)



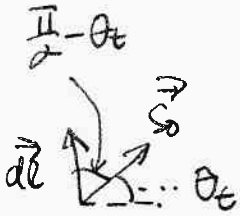
$$\int_{(2)} n \vec{S}_0 \cdot \vec{dl} = n_1 \int_{(2)} dl \cos\theta_i = n_1 b_1 \cos\theta_i$$

(3)



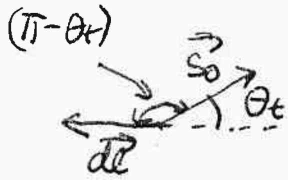
$$\int_{(3)} n \vec{S}_0 \cdot \vec{dl} = n_2 \int_{2} dl \cos\theta_t = n_2 b_2 \cos\theta_t$$

(4)



$$\int_{(4)} n \vec{S}_0 \cdot \vec{dl} = n_2 \int_{(4)} dl \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_t\right) = n_2 a \sin\theta_t$$

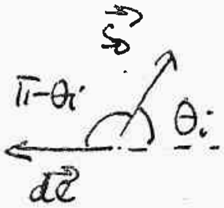
(5)



$$\int_{(5)} n\vec{S_0}\cdot d\vec{l} = \int_{(5)} n_2\, dl \cos(\pi-\theta_t) =$$

$$= -n_2 b_2 \cos\theta_t$$

(6)



$$\int_{6} n\vec{S_0}\cdot d\vec{l} = \int_{6} n_1\, dl \cos(\pi-\theta_i) =$$

$$= -n_1 b_1 \cos\theta_i$$

$$\oint_{L} n\vec{S_0}\cdot d\vec{l} = -n_1 a \sin\theta_i + n_1 b_1 \cos\theta_i + n_2 b_2 \cos\theta_t + n_2 a \sin\theta_t -$$

$$- n_2 b_2 \cos\theta_t - n_1 b_1 \cos\theta_i =$$

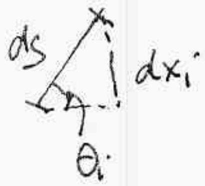
$$= -n_1 a \sin\theta_i + n_2 a \sin\theta_t = 0 \Rightarrow n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

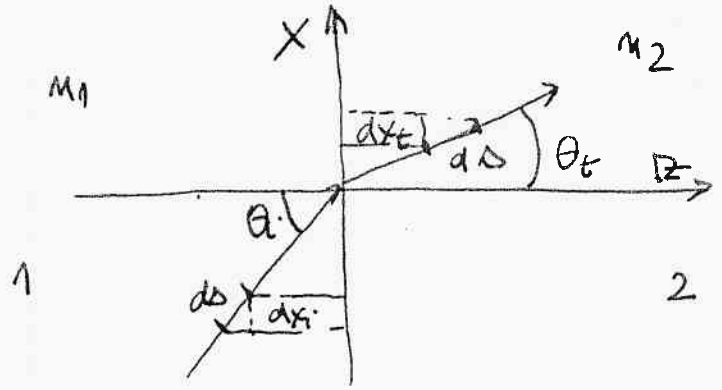
zákon lomu

Výsledek lze získati jednodušeji s uvážením limity $b = b_1 + b_2 \to 0$, potom k integrálu přispějí jen úsečky (1) a (4)

Odvození zákona lomu z paprskové rovnice

$$\frac{d}{ds}\left(n(\vec{r})\cdot\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \operatorname{grad} n(\vec{r})$$





Paprsek je měřen parametricky

$\vec{r} = \vec{b}s$ s ... parametr křivky (v řešeném případě přímka)

$\vec{r}_1 = (\sin\theta_i, \cos\theta_i)$

$\vec{r}_2 = (\sin\theta_t, \cos\theta_t)$

$x_i = s\sin\theta_i$ $x_t = s\cdot\sin\theta_t$

$z_i = s\cdot\cos\theta_i$ $z_t = s\cdot\cos\theta_t$

Parametrické rovnice přímek

$$\frac{dx_i}{ds} = \sin\theta_i \qquad \frac{dx_t}{ds} = \sin\theta_t$$

$n = f(z)$ .. $n = n_1$ v prostředí 1

$n = n_2$ v prostředí 2

$$\left[\frac{d}{ds} \left(n(\vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \right]_x = \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$ (n je jen funkcí z,

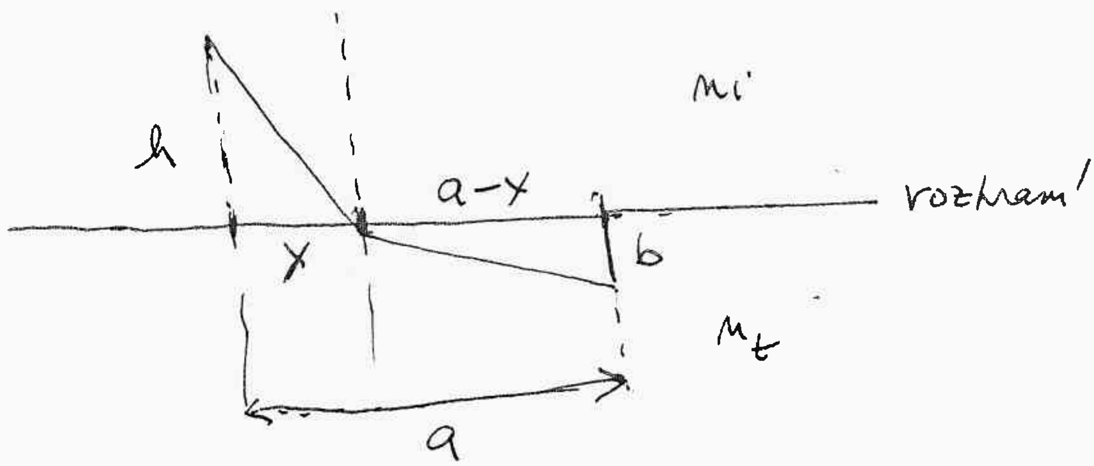
$$\Rightarrow \quad n(\vec{r}) \cdot \frac{dx}{ds} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \quad n_1 \cdot \frac{dx_i}{ds} = n_2 \cdot \frac{dx_t}{ds}$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

zákon lomu

Odvození zákona lomu z Fermatova principu



Optická dráha v prostředí (1)

$$OD1 = n_i \sqrt{h^2+x^2}$$

Optická dráha v prostředí 2

$$OD2 = n_t \cdot \sqrt{b^2+(a-x)^2}$$

Celková optická dráha

$$OD = OD1 + OD2$$

Podle Fermatova principu hledáme minimální optickou dráhu

$$\frac{d(OD)}{dx} = 0$$

$$\frac{n_i\, x}{\sqrt{h^2+x^2}} + \frac{n_t\,(-2a+2x)}{2\sqrt{b^2+(a-x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}} = \sin\theta_i \qquad \frac{a-x}{\sqrt{b^2+(a-x)^2}} = \sin\theta_t$$

$$\Rightarrow \quad n_i \cdot \sin\theta_i - n_t \sin\theta_t = 0$$

$$n_i \sin\theta_i = n_t \sin\theta_t$$

Zákon lomu

→ optická dráha paprsku

$$\int_{\text{paprsek}} n\,dl = \min \left\{ \int_A^B n\,dl \right\} \Leftarrow$$

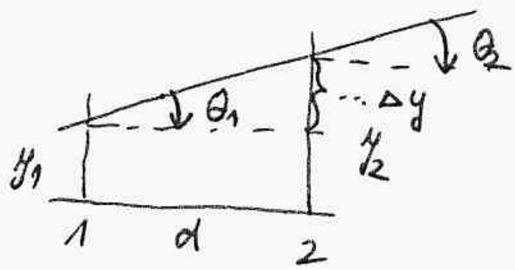
zde libovolné dráhy mezi body A a B!

tj. světlo se šíří po minimální optické dráze – Fermatův princip.

Paraxiální paprsky a ABCD matice

Paraxiální aproximace – omezíme se na paprsky téměř paralelní s optickou osou (úhel θ pod kterým dopadají paprsky na optické prvky (vůči normále k ploše) je malý). $\sin\theta \doteq tg\,\theta \doteq \theta$

Tato aproximace umožňuje linearizaci nelineární fce $\sin x$



Zde

$\theta_1 = \theta_2$

$\theta_1, \theta_2 < 0$

podle znaménkové konvence

$y_2 = y_1 + \Delta y$ $\quad y_2 < 0$

$\Delta y = -d \cdot tg\,\theta_1 \approx -d\cdot\theta_1$ $\qquad y_2 = y_1 - d\,\theta_1$

$\theta_1 < 0 \Rightarrow -d\cdot\theta_1 > 0$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

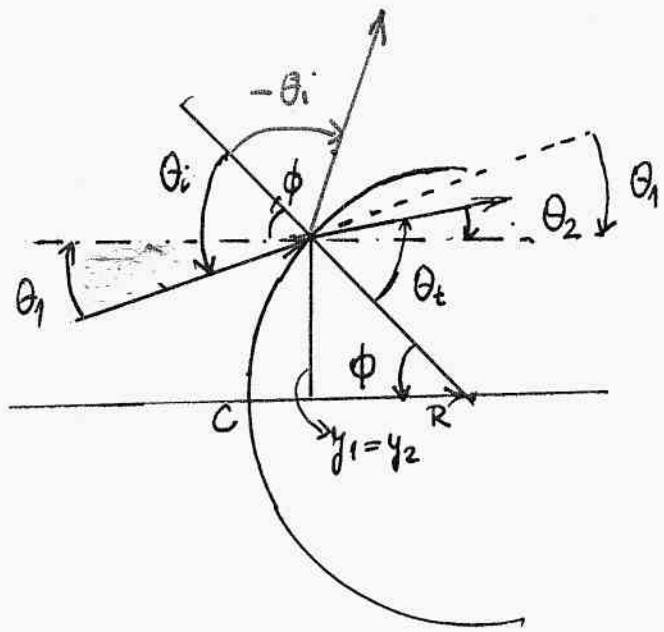
$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$y_2 = A y_1 + B\theta_1$

$\theta_2 = C y_1 + D\theta_1$

T = překosová matice

$M_T = \frac{y_2}{y_1}$ .. příčné zvětšení $\qquad M_\theta = \frac{\theta_2}{\theta_1}$ .. úhlové zvětšení



úhly kladné od vztažného ramene proti směru hodinových ručiček

Vztažné rameno - - pro lom a odraz kolmice dopadu

Pro paprsky - paprsek

$\theta_i > 0,\ \theta_t > 0,\quad \theta_1 < 0,\ \theta_2 < 0,\quad \phi > 0$

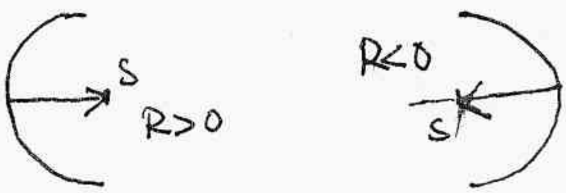
$$\theta_i + \theta_1 = \phi$$
$$\theta_t + \theta_2 = \phi$$
$$\phi = \frac{y_1}{R}$$
$$n_i \theta_i = n_t \theta_t$$

$$\theta_2 = \phi - \theta_t = \phi - \frac{n_i}{n_t}\theta_i =$$
$$= \phi - \frac{n_i}{n_t}(\phi - \theta_1) =$$
$$= \phi\left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right) + \frac{n_i}{n_t}\theta_1 =$$
$$= \left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)\cdot\frac{y_1}{R} - \frac{n_i}{n_t}\theta_1$$
$$y_1 = y_2$$

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)\frac{1}{R} & \frac{n_i}{n_t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

↗ ABCD matice pro zakřivený povrch (lom)

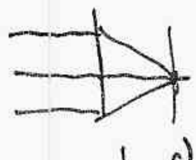
Znaménková konvence



Obrazová ohnisková vzdálenost

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(1-\frac{n_i}{n_t}\right)\cdot\frac{1}{R} & \frac{n_i}{n_t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{b}{R}\left(1-\frac{n_i}{n_t}\right) & -\frac{b\,n_i}{n_t} \\ \left(1-\frac{n_i}{n_t}\right)\cdot\frac{1}{R} & \frac{n_i}{n_t} \end{pmatrix}$$



$b = f'$

$\theta_1 = 0 \qquad y_2 = 0$

$$\underbrace{y_2}_{=0} = \left(1 - \frac{b}{R}\left(1-\frac{n_i}{n_t}\right)\right) y_1 - \frac{b\cdot n_i}{n_t}\,\overbrace{\theta_1}^{=0}$$

$\theta_1 = 0$

$$\Rightarrow \quad 1 - \frac{f_1'}{R}\left(1-\frac{n_i}{n_t}\right) = 0$$

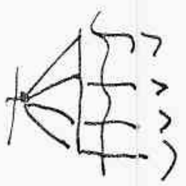
$$\frac{1}{f_1'} = \frac{1}{R}\left(1-\frac{n_i}{n_t}\right)$$

Pokud $n_i < n_t$ (např. rozhraní vzduch – sklo)

$$\Rightarrow \quad f_1' > 0$$

Předmětová ohnisková vzdálenost

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \left(1-\frac{n_i}{n_t}\right)\cdot\frac{1}{R} & \frac{n_i}{n_t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$



$y_1 = 0 \quad \theta_2 = 0$

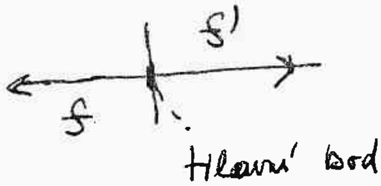
$c = -f$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -c \\ \left(1-\frac{n_i}{n_t}\right)\cdot\frac{1}{R} & -\frac{c}{R}\left(1-\frac{n_i}{n_t}\right)+\frac{n_i}{n_t} \end{pmatrix}$$

$$\theta_2 = \left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)\cdot\frac{1}{R}\,y_1 - \frac{c}{R}\left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)\theta_1 + \frac{n_i}{n_t}\,\theta_1$$

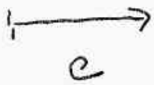
$$c = -f$$

$$(f<0 \Rightarrow c>0)$$



$f'>0$

$f<0$



$$y_1 = 0\,, \quad \theta_2 = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{f}{R}\left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right) = \frac{n_i}{n_t} \quad ; \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right)$$

$$-\frac{1}{R}\cdot\frac{n_t}{n_i}\left(1 - \frac{n_i}{n_t}\right) = \frac{1}{f} \qquad \Rightarrow \frac{f}{f'} = -\frac{n_i}{n_t}$$

$$\frac{1}{R}\left(1 - \frac{n_t}{n_i}\right) = \frac{1}{f}$$