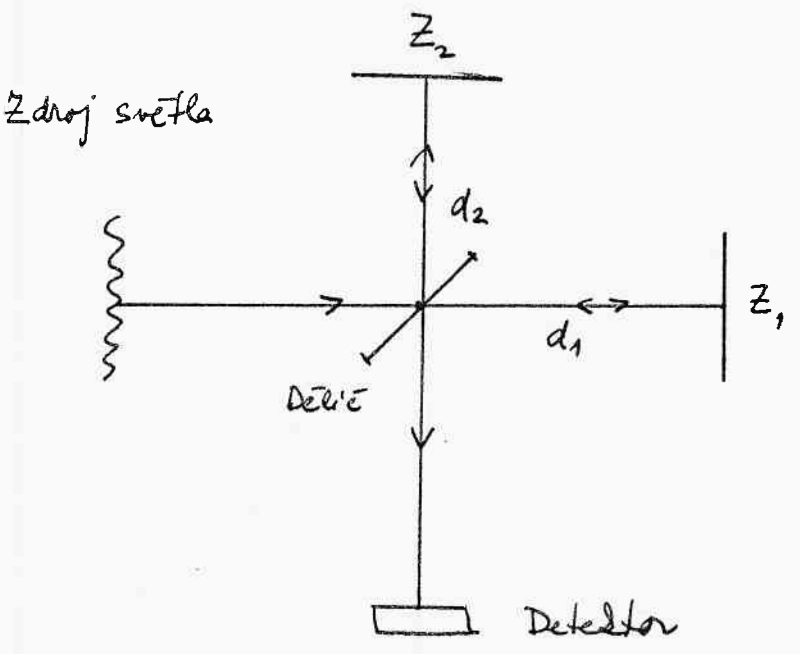
Interferometry

Z dosavadních odvození je zřejmé, že interferenční obrazce jsou silně závislé na řadě parametrů, které určují podmínky pro vznik interferenčních maxim a minim. (vlnová délka světla, úhel dopadu světelné vlny na optický prvek, tloušťka optického prvku)
Zařízení, které studuje vlastnosti světla na základě jeho interference se nazývá interferometrem.

Jeden z nejznámějších interferometrů je IF Michelsonův. V interferometru se vlna rozdělí na děliči na 2 svazky stejné intenzity, které postupují ve 2 navzájem kolmých ramenech s různou délkou. Po odrazu na zrcadlech a opětném průchodu děličem interferují v detektorovém prostoru.

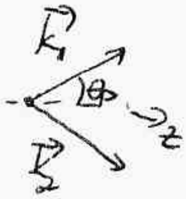


Z_1, Z_2 zrcadla

Michelsonův interferometr

Při průchodu interferometrem vzniká dráhový rozdíl $2(d_1-d_2)$. Ten je řídícím parametrem pro vznik interference. V prostoru detektoru vzniká při IF vlna s intenzitou $I = 4I_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$. To vyplývá z již odvozených vztahů pro IF 2 rovinných vln s $\parallel$ vlnovými vektory postupujícími stejným směrem $\left(I = 4I_0 \cos^2 (\underbrace{k_x x + \tfrac{\varphi}{2}}_{\delta}) \right)$ $k_x = k \sin \theta_p$

$$I \sim (1 + \cos(2k_x x + \varphi))$$



$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| \;, \; \theta = 0 \Rightarrow k_x = 0$$

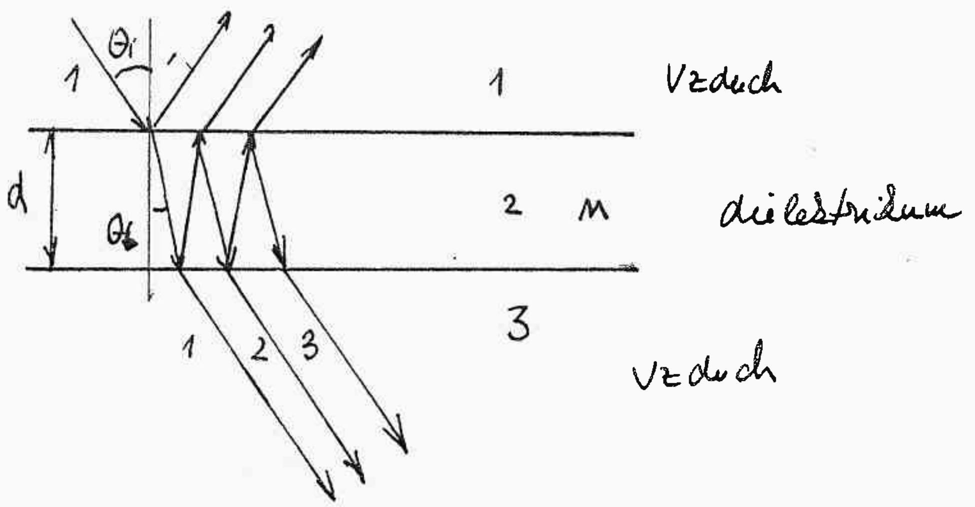
$$\varphi \; \delta = 2k(d_1 - d_2)$$

Tj. v celém prostoru detektoru je při daném nastavení délky ramen konstantní intenzita záření závislá na dráhovém rozdílu. Nejsou vidět žádné interferenční obrazce.

Pokud se jedno ze zrcadel skloní, objeví se na stínítku soustava $\parallel$ světlých a tmavých proužků (interference na virtuálním klínu – proužky stejné tloušťky)

Mnohosvazková interference

Předpoklad – interference mnoha rovinných vln se stejnými $\vec{k}_i$, fázové rozdíly $\varphi_{i+1} - \varphi_i$ jsou konstantní



1) $\tilde{E}_t^{(1)} = t_{12} t_{23} \tilde{E}_i e^{i\delta_0}$ $\quad \tilde{E}_i = E_{0i} e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t \cancel{+ \delta_0})}$

2) $\tilde{E}_t^{(2)} = t_{12} r_{23} \cdot r_{21} \cdot t_{23} \tilde{E}_i e^{i\delta_0} e^{i\delta}$

3) $\tilde{E}_t^{(3)} = t_{12} (r_{23} \cdot r_{21})^2 t_{23} \tilde{E}_i e^{i\delta_0} e^{i2\delta}$

$$\delta_0 = k \cdot \frac{d}{\cos\theta_t} \qquad \delta = k \cdot 2d\cos\theta_t = k_0 n 2d \cos\theta_t$$

atd

$r_{12} = -r_{21}$ $\qquad r_{23} = r_{21} = r \rightarrow r_{12} = -r$

(platí pro $\perp$ i $\parallel$ polarizaci) $\qquad$ (vzduch / dielektrikum)

$$t_{12}^{\perp} = r_{12}^{\perp} + 1 = 1 - r \qquad t_{23}^{\perp} = 1 + r_{23}^{\perp} = 1 + r$$

$$t_{12}^{\parallel} = (r_{12}^{\parallel} + 1) \cdot \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t} = (1 - r) \cdot \frac{\cos\theta_i}{\cos\theta_t}$$

$$t_{23}^{\parallel} = (1 + r_{23}^{\parallel}) \cdot \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} = (1 + r) \cdot \frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

$$\Rightarrow \quad r_{21} \cdot r_{23} = r^2$$

$$t_{12}^{\perp} \cdot t_{23}^{\perp} = (1-r)(1+r) = 1-r^2$$

$$t_{12}^{\parallel} \cdot t_{23}^{\parallel} = (1-r)\cdot(1+r) = 1-r^2$$

Fázový rozdíl $E^{(1)}$ a $E^{(2)}$, $E^{(2)}$ a $E^{(3)}$ atd. je

$$\delta = 2n k_0 d \cos\theta_t$$

celková prošlá vlna je pak

$$\tilde{E}_t = t_{12} \cdot t_{23} E_0 e^{i\delta_0} \left[1 + r^2 e^{i\delta} + r^4 e^{i2\delta} + \dots\right] e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

v hranaté závorce je součet geometrické řady
s kvocientem $\quad q = r^2 e^{i\delta}$

$$\sum q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\tilde{E}_t = \underbrace{\frac{t_{12} \cdot t_{23} E_0 e^{i\delta_0}}{1 - r^2 e^{i\delta}}}_{\tilde{E}_{t0}} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$I_t \sim \tilde{E}_{t0} \cdot \tilde{E}_{t0}^* = \frac{(t_{12} t_{23})^2 E_0^2}{1 + r^4 - r^2 \underbrace{(e^{i\delta} + e^{-i\delta})}_{2\cos\delta}}$$

(Přičtěme | $\frac{1}{2Z} = 1$)

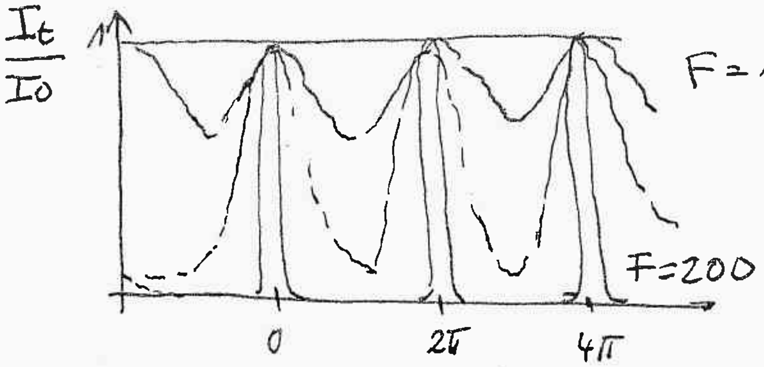
$$I_t = \frac{(1-r^2)^2 \cdot I_0}{(1-r^2)^2 + 2r^2(1-\cos\delta)} = \frac{(1-r^2)^2 \cdot I_0}{(1-r^2)^2 + 4r^2 \sin^2\frac{\delta}{2}} =$$

$$= \frac{I_0}{1 + \frac{4r^2}{(1-r^2)^2} \sin^2\frac{\delta}{2}}$$

Označme $F = \dfrac{4r^2}{(1-r^2)^2}$ · parameter jemnosti

$$I_t = \frac{I_0}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}} \qquad I_0 = I_t + I_R$$

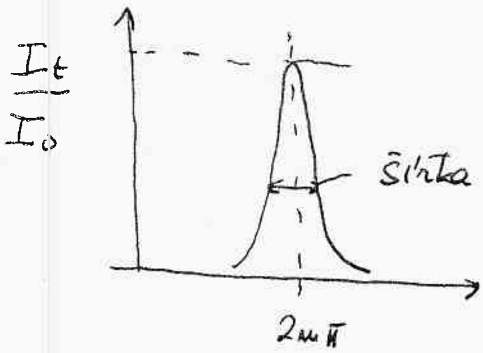
$$\Rightarrow \quad I_R = \frac{F\sin^2\frac{\delta}{2}}{1 + F\sin^2\frac{\delta}{2}}$$



Svetlé krúžky na tmavom pozadí

Na odraz.. tmavé krúžky na svetlom pozadí

Jemnost Fabry-Perotova interferometru



Fázový rozdíl, kde nastává maximum $\delta = 2m\pi$

Fázový rozdíl, kde nastává minimum $\delta = (2m+1)\pi$

Fázový rozdíl, kde intensita propuštěného světla klesne na 1/2 maximální hodnoty

$$\delta_{1/2} = 2m\pi \pm \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\frac{1}{1 + F\sin^2\frac{\varepsilon}{4}} = \frac{1}{2}$$

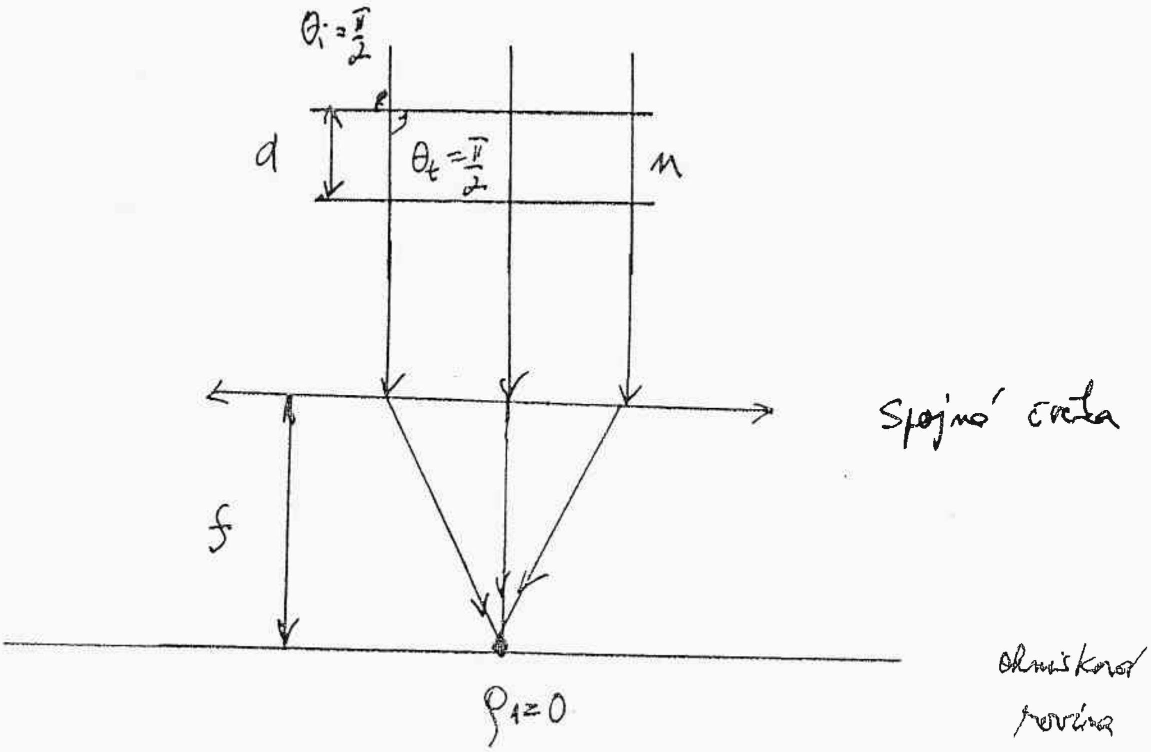
Pro velká F je ε malé

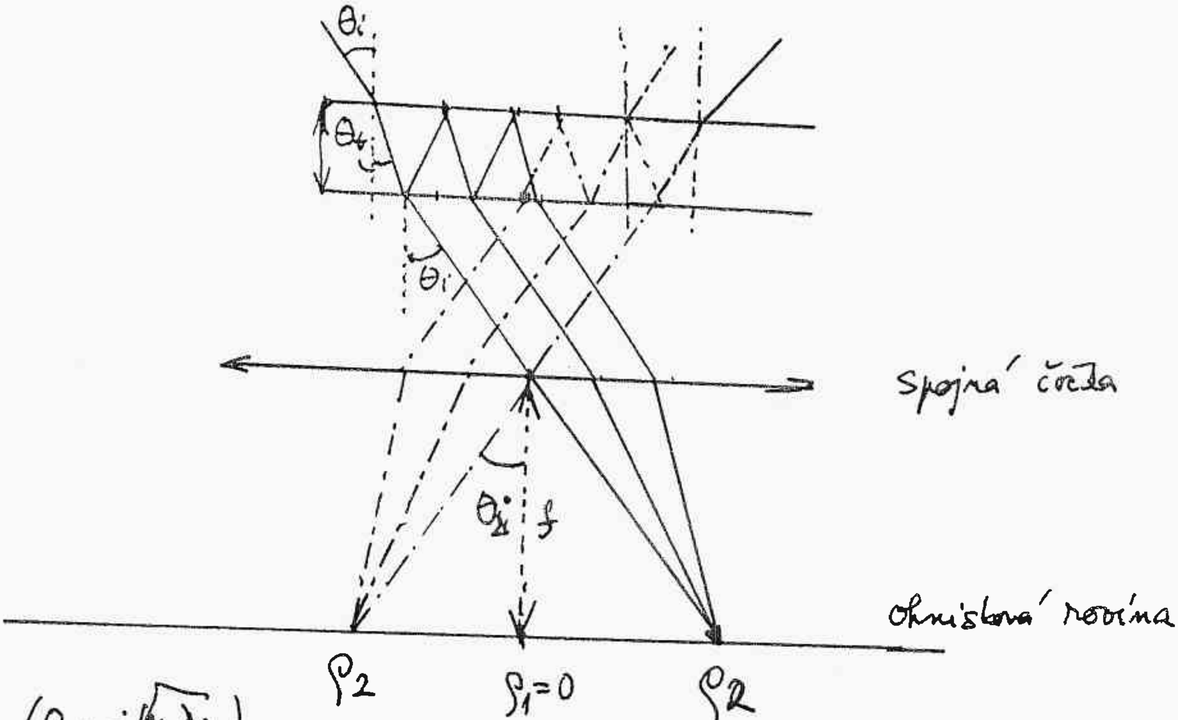
$$\sin\frac{\varepsilon}{4} \doteq \frac{\varepsilon}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1 + F\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{4}{\sqrt{F}}$$

Jemnost $\mathcal{F}$ .. kolikrát se pološířka vejde do fázové vzdálenosti mezi maximy

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\varepsilon} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2}$$





$$\left(\theta_{2i} = \sqrt{\frac{n\lambda_0}{d}}\right)$$

$$\operatorname{tg} \theta_{2i} = \frac{\rho_2}{f}$$

$$\rho_2 = f \cdot \sqrt{\frac{n\lambda_0}{d}}$$

Interferenční kroužky dané sklonem θ_i

$\Rightarrow$ kroužky stejného sklonu (Haidingerovy)

Dráhový rozdíl na FB desce o tloušťce d a indexu lomu n je $2nd\cos\theta_t$

$$2nd\cos\theta_t = m\lambda_0 \quad \text{.. podmínka vzniku IF maxima}$$

Pro případ $\theta_t = 0$ (tj. i $\theta_i = 0$) .. kolmý dopad

$$2nd = m\lambda_0 \quad \ldots \quad \rho_1 = 0$$

(1. maximum je v ohnisku čočky) (tj. ∥ paprsky z FB desky jsou spojnou čočkou soustředěny do ohniska)

$\theta_t = \theta_{2t}$ .. 2. maximum

$$2nd\cos\theta_{2t} = (m-1)\cdot\lambda_0$$

Předpokládejme θ_{2i} blízké nule, tedy i θ_{2t} malé

$\Rightarrow$ použijeme aproximaci malých úhlů

$$\cos\theta_{2t} = \sqrt{1-\sin^2\theta_{2t}} \doteq 1 - \frac{1}{2}\theta_{2t}^2$$

$$\sin\theta_i = n\sin\theta_t \quad \text{zákon lomu}$$

$$\theta_i \doteq n\theta_t \quad \Rightarrow \theta_{2t} \doteq \frac{\theta_{2i}}{n}$$

$$2nd\left(1 - \frac{1}{2}\theta_{2t}^2\right) = m\lambda_0 - \lambda_0$$

$$2nd - nd\,\theta_{2t}^2 = m\lambda_0 - \lambda_0 \qquad (m\lambda_0 = 2nd)$$

$$\lambda_0 = nd\,\theta_{2t}^2 = \frac{d\,\theta_{2i}^2}{n^2}$$

$$\Rightarrow \theta_{2i} \doteq \sqrt{\frac{n\lambda_0}{d}}$$

$$\mathrm{tg}\,\theta_{2i} = \frac{\rho_2}{f}$$

$$\Rightarrow \rho_2 = f\,\mathrm{tg}\,\theta_{2i}$$

Interferometrie

- soubor technik, ve kterých se vlny skládají a ze vzniklého interferenčního obrazce (interferogramu) se získávají informace o vlnách, resp. jejich prostřednictvím o fyzikálních veličinách, jež změní rozdíl optických drah skládaných svazků

Youngův pokus ... $n d \sin\theta = m\lambda$ (podmínka maxima)

IF na dielektrické desce $2 n d \cos\theta_t = m\lambda$ $m \in \mathbb{Z}$

Změní-li se optická dráha OD o ΔOD, změní se m o Δm.

$$\Delta OD = \Delta m \cdot \lambda$$

→ k posunu interferenčních proužků (kroužků) o 1 řád dojde, změní-li se OD o $1 \times \lambda$.

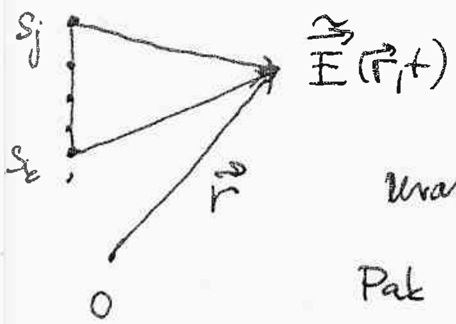
Prostým okem můžeme pozorovat posun maxima nebo minima IF proužku o 1/20, detektorem až o 1/1000. V tomto případě může tedy interferometr detekovat $\Delta OD \approx \frac{\lambda}{1000}$

V případě světla $\lambda = 500\ nm = 5 \times 10^{-7} m$ je tedy $\Delta OD \sim 10^{-10}\ m$.

? Co změní OD ... index lomu n

... geometrická dráha d

Mějme zdroj záření složený z jednotlivých navzájem nekoherentních bodových zdrojů



$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \sum_i \tilde{\vec{E}}_i(\vec{r},t)$$

Uvažujme dále 2 zdroje – S_j a S_k

Pak $\tilde{\vec{E}}(\vec{r},t) = \tilde{\vec{E}}_j(\vec{r},t) + \tilde{\vec{E}}_k(\vec{r},t)$

$$I \sim \langle (\tilde{\vec{E}}_j + \tilde{\vec{E}}_k)(\tilde{\vec{E}}_j^* + \tilde{\vec{E}}_k^*) \rangle_{T_D}$$

T_D ... doba odezvy detektoru

$$I \sim \frac{1}{T_D} \int_0^{T_D} \left(E_{0j}^2 + E_{0k}^2 + E_{0j} E_{0k} e^{i(\phi_j - \phi_k)} + \right.$$

$$\left. + E_{0j} e^{-i(\phi_j - \phi_k)} \right) dt =$$

$$= E_{0j}^2 + E_{0k}^2 + \frac{2}{T_D} \int_0^{T_D} E_{0j}.E_{0k} \cos(\phi_j - \phi_k)\, dt$$

Rozdíly $\phi_j - \phi_k$ jsou náhodné, za dostatečnou dobu středování nabydou všech hodnot mezi $\langle 0, 2\pi \rangle$, tj. cos. nabývá všech hodnot $\in \langle -1, 1 \rangle$

a $\int = 0$

$$\Rightarrow I \approx E_{0j}^2 + E_{0k}^2$$

Výsledná intenzita v $\vec{r}$ je pak součtem intenzit jednotlivých nekoherentních zdrojů.

Koherence

Koherence je vzájemná souvislost fáze a amplitudy vlnění vycházejících buď z různých míst povrchu zářícího tělesa (zdroje) nebo vlnění vycházejícího z jednoho místa avšak s určitým časovým odstupem.

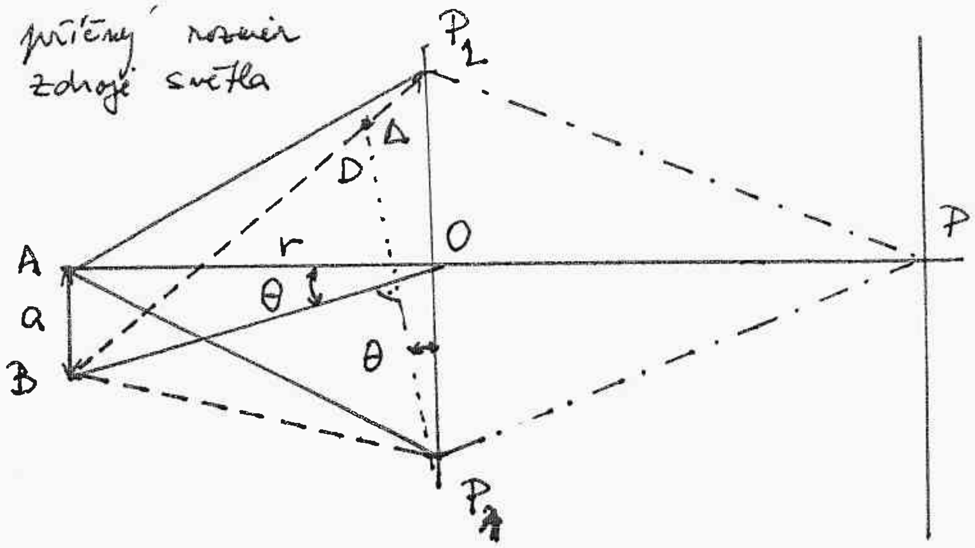
Zdroje záření mohou být koherentní, částečně koherentní nebo nekoherentní. Mezi zdroje koherentního záření patří především lasery.

Prostorová koherence

Korelace fáze a amplitudy světelného pole v různých bodech prostoru a ve stejném čase.

Prostorovou koherenci zkoumáme pomocí uspořádání analogického Youngovu pokusu.

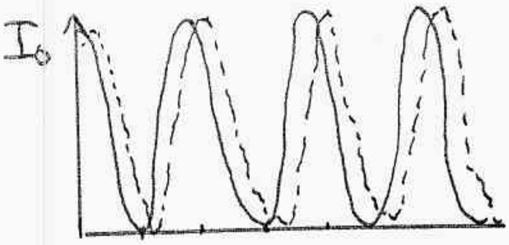
a .. příčný rozměr zdroje světla

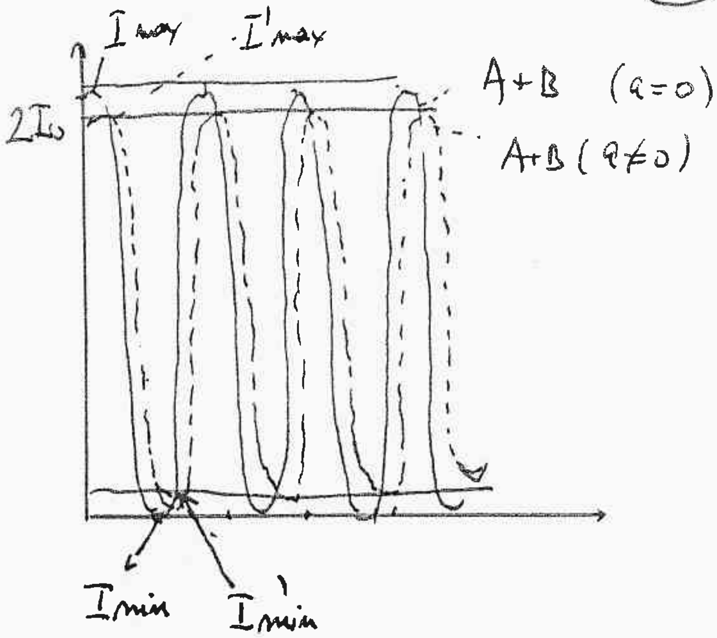


$\theta \sim \frac{\Delta}{l}$

$\theta \sim \frac{a}{r}$ $\quad \overline{P_1P_2} = l \quad \overline{DP_2} = \Delta$

$(\mathrm{tg}\,\theta \doteq \theta = \frac{a}{r})$ $\quad \overline{OA} = r \quad \overline{BP_2} = \overline{BP_1} + \Delta$





Viditelnost IF proužků

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = 1 \quad (a=0)$$

$$V' = \frac{I'_{max} - I'_{min}}{I'_{max} + I'_{min}} \quad (a \neq 0)$$

Jsou-li oba IF obrazce vůči sobě posunuty tak, že maximum jednoho je rovné minimu druhého, IF proužky vymizí! (v dané oblasti prostoru) Světlo v bodech P_1 a P_2 je pak nekoherentní!

IF obrazec vyzařovaný bodem B bude mít v bodě P minimum jestliže

$$\Delta = \overline{BP_2} - \overline{BP_1} = \frac{\lambda}{2}$$

$$\theta \sim \frac{a}{r} \qquad \theta \sim \frac{\Delta}{l}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{la}{r} \; ; \; \text{pro } \Delta = \frac{\lambda}{2} \text{ je } \; a_c = \frac{r\Delta}{l} = \frac{r\lambda}{2l}$$

→ to je maximální vzdálenost, aby bylo možno pozorovat interferenci

l .. vzdálenost zkoumaných bodů prostoru

a .. vzdálenost 2 bodových zdrojů (nebo rozměr plošného zdroje)

Vzdálenost l, pro kterou je pole mezi body P_1 a P_2 ještě koherentní pak můžeme psát

$$l_s < \frac{r\lambda}{2a} \approx \frac{\lambda}{\theta}$$

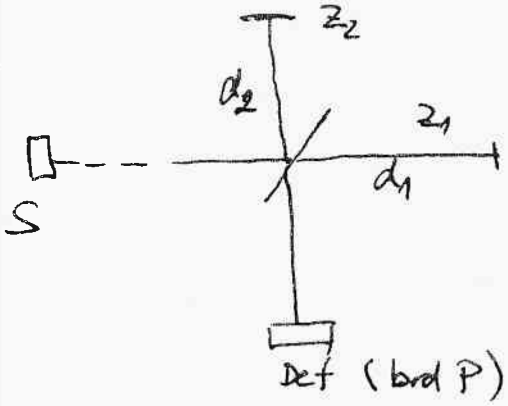
l_S lze zvětšit zvětšením λ nebo zmenšením θ

Pokud bude vzdálenost $\overline{P_1P_2}$ ještě větší než l_S, IF se opět zlepší (ostrost IF poněkud opět vzroste)

Lze ukázat, že závislost stupně koherence na prostorové vzdálenosti $\overline{P_1P_2}$ je stejná, jako prostorový průběh intenzity světla na apertuře, která svým umístěním a rozměry odpovídá ploše zdroje (van Cittert-Zernikeova věta)

Časová (podélná) koherence

- Ke stanovení míry časové koherence se používá dvousvazkového experimentu
- např. Michelsonův interferometr

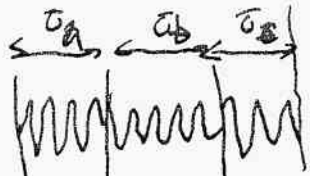


V detektorovém prostoru interferují paprsky s dráhovým rozdílem

$$\Delta l = 2(d_2 - d_1)$$

Tj. paprsek 1 s časovým zpožděním τ_1 a paprsek 2 s časovým zpožděním τ_2.

Zdroj



střední doba mezi skoky τ_0

$$\hat{E}_P(t) = \hat{E}_1(t-\tau_1) + \hat{E}_2(t-\tau_2)$$

$$I_P \sim \langle E_P E_P^* \rangle = \langle E_1(t-\tau_1) \cdot E_1^*(t-\tau_1) \rangle +$$

$$+ \langle E_2(t-\tau_2) \cdot E_2^*(t-\tau_2) \rangle + \langle E_1(t-\tau_1) E_2^*(t-\tau_2) \rangle + \langle E_1^*(t-\tau_1) E_2(t-\tau_2) \rangle$$

$$= I_1 + I_2 + 2\mathrm{Re} \langle E_1(t-\tau_1) E_2^*(t-\tau_2) \rangle$$

Velikost interferenčního členu je dána korelací mezi poli obou svazků v bodě P. Dále zavedeme $\tau = \tau_1 - \tau_2$ (pro IF je podstatný rozdíl obou časových zpoždění, nikoliv jejich absolutní hodnoty.

$t' = t - \tau_1 \qquad t = t' + \tau_1$

$t - \tau_2 = t' + \tau_1 - \tau_2$

$\langle \tilde{E}_1(t-\tau_1) \cdot E_2^*(t-\tau_2)\rangle = \langle E_1(t') E_2(t'+\tau)\rangle =$

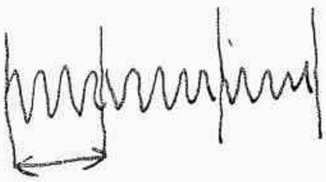
$= \langle E_1(t) E_2^*(t+\tau)\rangle$ a podobně v ostatních členech

Výraz $\langle E_1(t) E_2^*(t+\tau)\rangle = \tilde{\Gamma}_{12}(\tau)$ nazveme korelační funkce.

Výraz $\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \frac{\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}}$ pak nazveme normovaná korelační funkce

Uvažujme nyní jednoduchý model statistického chování světla

Vždy po době τ_0 nastane skok fáze



τ_0

Pokud parametr τ (zpoždění mezi svazky vzniklých dělením amplitudy)

Pokud $\tau > \tau_0$ .. k interferenci nedojde, IF člen se zruší středováním přes dlouhý časový interval.

Dva interferující svazky v bodě P můžeme popsat

$\tilde{E}_1(t) = E_0 e^{i(\varphi(t) - \omega t)}$

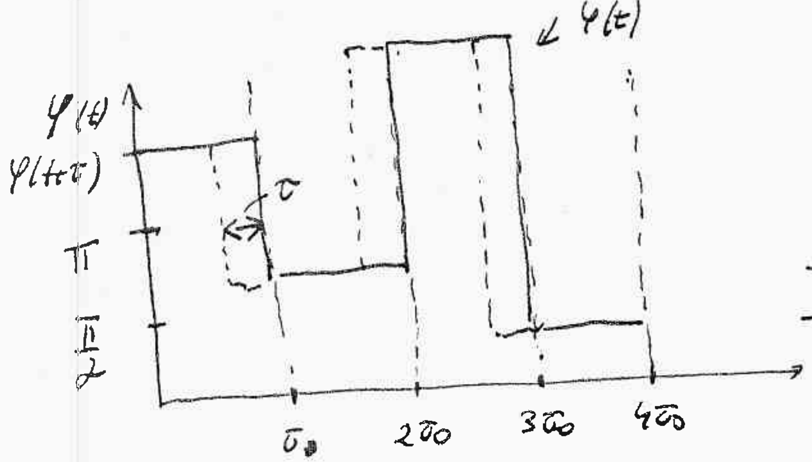
$\tilde{E}_2(t) = E_0 e^{i[\varphi(t+\tau) - \omega(t+\tau)]}$

$\tilde{\gamma}_{12} = \frac{\langle \tilde{E}_1(t) \cdot \tilde{E}_2^*(t)\rangle}{I^2} = \frac{E_0^2}{I} \cdot e^{i\omega\tau} \langle [e^{i(\varphi(t) - \varphi(t+\tau))}$

Pak je $\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = \dfrac{\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} = \dfrac{\tilde{\Gamma}_{12}(\tau)}{I} =$

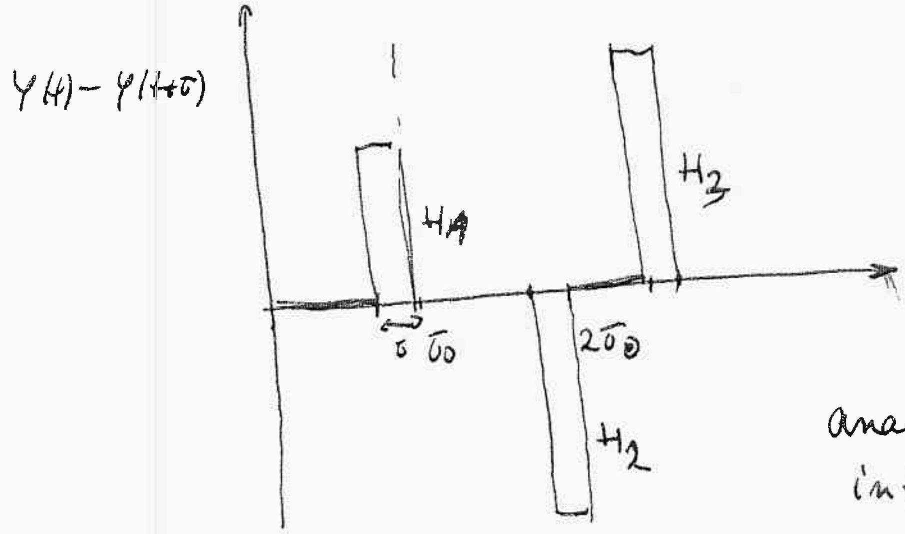
$$= \frac{|E_0|^2}{I} \cdot e^{i\omega\tau} e^{i[-\varphi(t+\tau) + \varphi(t)]}$$

$I = I_1 = I_2 = E_0^{\,2}$ (neuvádíme konstantu $\frac{1}{2}\varepsilon_0 c$)



τ je zpoždění svazků (vzájemné)

— $\varphi(t)$
-·- $\varphi(t+\tau)$



$\varphi(t) - \varphi(t+\tau) = 0$
$0 < t < \tau_0 - \tau$

$\varphi(t) - \varphi(t+\tau) = H_1$

$\tau_0 - \tau < t < \tau_0$

analogicky pro další intervaly

$H_1 \to H_i \quad , i = 1, 2 \ldots$

H_i se mění náhodně

Zavedeme $T = N\tau_0$ a provedeme časové středování přes T

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = e^{i\omega\tau} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i[\varphi(t) - \varphi(t+\tau)]} dt$$

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau) = e^{i\omega\tau}\,\frac{1}{N\tau_0}\left[\int_0^{\tau_0-\tau} e^{i0}\,dt + \int_{\tau_0-\tau}^{\tau} e^{iH_1}\,dt + \dots\right] =$$

$$= e^{i\omega\tau}\cdot\frac{1}{N\tau_0}\left[N(\tau_0-\tau) + \tau\sum_{k=1}^{N} e^{iH_k}\right]$$

H_k náhodné, $\cos H_k$, $\sin H_k$ nabývají se stejnou PP kladných a záporných hodnot

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{N} e^{iH_k} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma}_{12}(\tau) = e^{i\omega\tau}\,\frac{(\tau_0-\tau)}{\tau_0}$$

$$|\tilde{\gamma}_{12}(\tau)| = 1 - \frac{\tau}{\tau_0}$$

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\gamma}_{12}(\tau)\} = \left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\cos\omega\tau$$

$(=\sqrt{I_1 I_2}$ pro $I_1 = I_2)$

$$I_P = I_1 + I_2 + 2\,\mathrm{Re}\,\tilde{\gamma}_{12}(\tau)\cdot I =$$

$$= 2I + 2I\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)\cos\omega\tau$$

$$I_{max} = 2I + 2I\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

$$I_{min} = 2I - 2I\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

Viditelnost interferenčních proužků

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{4I\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)}{4I} =$$

$$= 1 - \frac{\tau}{\tau_0} = |\tilde{\gamma}_{12}(\tau)|$$

$\Rightarrow$ absolutní hodnota normované korelační funkce má fyzikální význam = je rovna viditelnosti interferenčních proužků.