Interakce světla s látkou

Při výkladu odrazu a lomu na rozhraní dvou dielektrik jsme předpokládali, že nedochází k předání energie vlny látce, tj. absorbci.

Dále popíšeme absorbující prostředí

Experiment – měříme-li propustnost materiálu zjistíme, že zpravidla s rostoucí tloušťkou propustnost materiálu klesá

útlum je exponenciální $I = I_0 e^{-\alpha d}$

a je charakterizován experimentálně stanoveným absorpčním koeficientem α, $[\alpha] = \frac{1}{m}$

Fyzikální význam – je-li $\alpha = \frac{1}{d}$, klesne I na $1/e$ původní hodnoty intenzity dopadajícího záření I_0.

Fyzikální popis
- Maxwellovy rovnice (makroskopický)
- mikroskopický (oscilátorový model – klasický popis nebo kvantový popis)

Absorpce – makroskopický popis

Dopadající vlna $\hat{E}_x = E_0 e^{i(k_R z - \omega t)}$, tj. $\vec{s_0} = (0,0,1)$

$k_R = k$ – vlnový vektor podle původního označení

V případě absorbujícího prostředí v kůře pod plotí

$\tilde{E}_x = E_0 e^{-k_I z} e^{i(k_R z - \omega t)}$

$e^{-k_I z}$ ... útlum vektoru $\vec{E}$

$E_0 e^{-k_I z} = E_0'$

Protože $I \sim |E_0'|^2 \Rightarrow I \sim e^{-\alpha z}$ $\alpha \sim 2k_I$

Je výhodné pracovat s komplexními veličinami

$\tilde{k} = k_R + i k_I$

pak $E_x = E_0 e^{i(k_R + i k_I)z} e^{-i\omega t} =$

$= E_0 e^{-k_I z} e^{i k_R z} e^{-i\omega t}$

Analogicky k $k_R = \frac{\omega}{c} n$ zavedeme

$k_I = \frac{\omega}{c} \cdot \varkappa$

$\tilde{k} = k_R + i k_I = \frac{\omega}{c} \underbrace{(n + i\varkappa)}_{\tilde{n}}$

$\tilde{n}$ .. komplexní index lomu

$\tilde{k}$ ... komplexní vlnový vektor

$$\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -i\tilde{k} E_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \to i\tilde{k}$$

$$\Rightarrow \quad B_y = \frac{-i\tilde{k}}{-i\omega} E_x = \frac{\tilde{k}}{\omega} E_x \qquad \int dt = \frac{1}{-i\omega}$$

$$\text{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \tilde{\vec{D}}}{\partial t}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = j + \frac{\partial \tilde{D}_x}{\partial t} \qquad \tilde{\vec{B}} = \mu_0 \tilde{\vec{H}}$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{-i\tilde{k}^2}{\mu_0\omega} E_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} = \sigma E_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} + \frac{\partial \tilde{D}_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \tilde{D}_x}{\partial t} = -\sigma E_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} - \frac{i\tilde{k}^2}{\mu_0\omega} E_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$$

$$D_x = \left(\frac{\sigma}{i\omega} + \frac{\tilde{k}^2}{\mu_0\omega^2}\right) E_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)} =$$

$$= \varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{i\varepsilon_0\omega} + \frac{\tilde{k}^2}{\mu_0\varepsilon_0\omega^2}\right) E_0 e^{i(\tilde{k}z-\omega t)}$$

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c}(n + i\varkappa) \qquad \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} = c^2$$

$$= \varepsilon_0 \underbrace{\left(\frac{\sigma}{i\varepsilon_0\omega} + \tilde{n}^2\right)}_{\tilde{\varepsilon}_r} \tilde{\vec{E}} \qquad \tilde{\varepsilon}_r = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$

Komplexní permitivita

$$-i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} + n^2 - \varkappa^2 + i\,2n\varkappa = \tilde{\varepsilon}_r$$

$$\varepsilon_1 = n^2 - \varkappa^2 \qquad \varepsilon_2 = 2n\varkappa - \frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega}$$

Interakce světla s látkou – mikroskopický popis

Klasický model – Lorentz (1878)

atomy = dipólové oscilátory

Např. – elektronový obal atomu kmitá vůči jádru

iontové krystaly – (+) a (−) nabité ionty kmitají vůči sobě

Lorentzův model ... kladný náboj jádra a elektronový obal jsou navzájem pružně svázány

Vnější elektrické pole vynucuje kmity oscilátoru na frekvenci světla

Pokud se tato frekvence rovná vlastní frekv. oscilátoru, dojde k rezonanci; v tomto případě dochází k vyhraznému přenosu energie světla na oscilátor. Poté co se energie absorbuje, dojde k jejímu předání látce, zpravidla formou tepla.

Mimo rezonanční frekvenci je absorpce zanedbatelná!

Oscilátory kmitají s určitým fázovým posunem. Každý z nich vyzařuje vlnu s určitou fází a tyto vlny se skládají. Světlo se pak šíří ve směru, v němž dochází ke konstruktivní interferenci (→ index lomu, rychlost šíření).

Pro případ $\sigma = 0$ můžeme psát ④

$$\varepsilon_1 = n^2 - \varkappa^2 \qquad \varepsilon_2 = 2n\varkappa$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}} \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_1+\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}\right)}$$

Dále zavedeme komplexní elektrickou vodivost

proud spojený s volnými nosiči (ohmický zákon)

$$\tilde{J} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \sigma\tilde{\vec{E}} + \frac{\partial\tilde{\vec{D}}}{\partial t} =$$

⇐ proud spojený s posunem fixních nábojů v přiloženém střídavém poli.

$$= \sigma\tilde{\vec{E}} + \varepsilon_0\tilde{\varepsilon_r}\frac{\partial\tilde{\vec{E}}}{\partial t} = \sigma\tilde{\vec{E}} - i\omega\varepsilon_0\tilde{\varepsilon_r}\tilde{\vec{E}} =$$

$$= \left[\sigma - i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\right]\tilde{\vec{E}} = [\underbrace{\sigma + \omega\varepsilon_0\varepsilon_2}_{\sigma_1}\ \underbrace{-\, i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}_{\cdot\sigma_2}]\tilde{\vec{E}}$$

$$= (\sigma_1 + i\sigma_2)\tilde{\vec{E}} = \tilde{\sigma}\tilde{\vec{E}} \qquad \sigma_1 = \sigma + \omega\varepsilon_0\varepsilon_2$$

$$\tilde{\sigma} = \sigma_1 + i\sigma_2 \qquad \sigma_2 = -\varepsilon_0\varepsilon_1\omega$$

Nyní zpět k intenzitě

$$I_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n E_0^2$$

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n E_0'^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n E_0^2 e^{-2k_I z}$$

Experiment $\quad I = I_0 e^{-\alpha z}$

$$\Rightarrow \alpha = 2k_I = \frac{2\omega\varkappa}{c}$$

absorpční koeficient

Interakce světla s látkou – mikroskopický popis

Klasický model – Lorentz (1878)

atomy = dipólové oscilátory

Např. – elektronový obal atomu kmitá vůči jádru

iontové krystaly – (+) a (−) nabité ionty kmitají vůči sobě

Lorentzův model ... kladný náboj jádra a elektronový obal jsou vzájemně pružně svázány

Vnější elektrické pole vynucuje kmity oscilátoru na frekvenci světla

Pokud se tato frekvence rovná vlastní frekv. oscilátoru, dojde k rezonanci; v tomto případě dochází k vyhraženému přenosu energie světla na oscilátor. Protože oscilátor energii absorbuje, dojde k jejímu předání se energii látce, zpravidla formou tepla.

Mimo rezonanční frekvenci je absorpce zanedbatelná! Oscilátory kmitají s určitým fázovým posunem. Každý z nich vyzařuje vlnu s určitou fází a tyto vlny se skládají. Světlo se pak šíří ve směru, v němž dochází ke konstruktivní interferenci (⇒ index lomu, rychlost šíření).

$$-m\omega^2\tilde{x}_0 - i\omega m\gamma\tilde{x}_0 + \ell\tilde{x}_0 = q\tilde{E}_0 \qquad (q=-e)$$

$$\tilde{x}_0(-m\omega^2 - i\omega m\gamma + \ell) = q\tilde{E}_0 \qquad (q=-e)$$

$$x_0 = \frac{q\tilde{E}_0}{m} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - i\gamma\omega - \omega^2} \qquad (q=-e)$$

$$\tilde{P}(t) = Nq\tilde{x} = \frac{Nq^2\tilde{E}_0}{m} \cdot \frac{e^{-i\omega t}}{\Omega^2 - i\gamma\omega - \omega^2}$$

Je-li γ malé, $\gamma \ll \omega, \Omega$, lze člen $-i\gamma\omega$ ve jmenovateli zanedbat

Pak je $\tilde{\vec{P}}(t) = \dfrac{Nq^2\tilde{\vec{E}}_0}{m} \cdot \dfrac{e^{-i\omega t}}{\Omega^2 - \omega^2}$

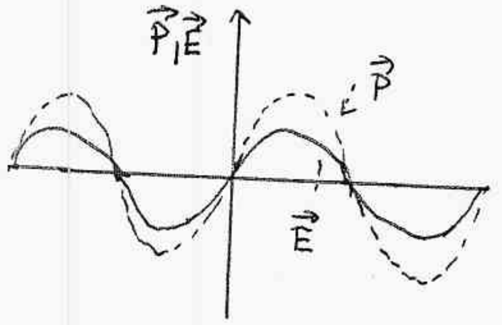
Je-li $\omega < \Omega$, kmitá $\vec{P}(t)$ ve fázi s $\vec{E}$

Je-li $\omega > \Omega$, kmitá v protifázi

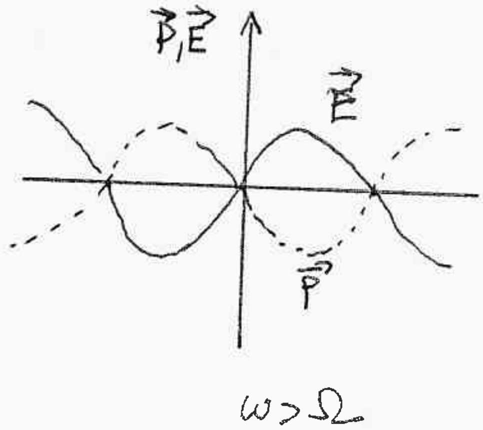
V případě rezonance $\omega = \Omega$ nelze člen $-i\gamma\omega$ zanedbat. Pak je $\tilde{\vec{P}} \sim \dfrac{1}{-i} = i$

$\Rightarrow$ fáze polarizace a pole jsou vůči sobě otočeny o $90°$.

Obecně, je-li $-i\gamma\omega$ nezanedbatelné vůči Ω, ω nastává fázový posun $e^{i\delta}$ (pro $\delta = \frac{\pi}{2}$ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$)



$\omega < \Omega$



$\omega > \Omega$

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\tilde{\varepsilon}_r = 1 + \tilde{\chi} = \tilde{n}^2 = 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} =$$

$$= 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{(\Omega^2 - \omega^2) + i\gamma\omega}{(\Omega^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Je-li γ malé, je index lomu reálný!

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\chi}\} = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{\Omega^2 - \omega^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} = \chi_1 \quad (q^2 = e^2)$$

$$\chi_2 = \mathrm{Im}\{\tilde{\chi}\} = \frac{Nq^2\gamma^2\omega^2}{\varepsilon_0 m (\Omega^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \qquad \mathrm{tg}\,\delta = \frac{\mathrm{Im}\{\tilde{\chi}\}}{\mathrm{Re}\{\tilde{\chi}\}}$$

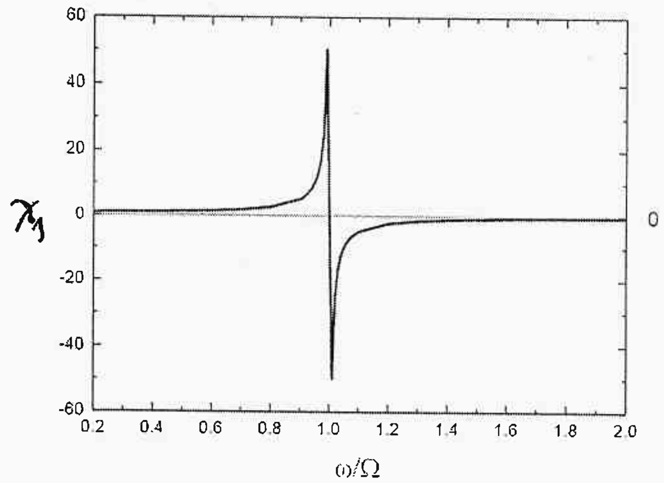
$$\varepsilon_1 = 1 + \chi_1 = 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{\Omega^2 - \omega^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

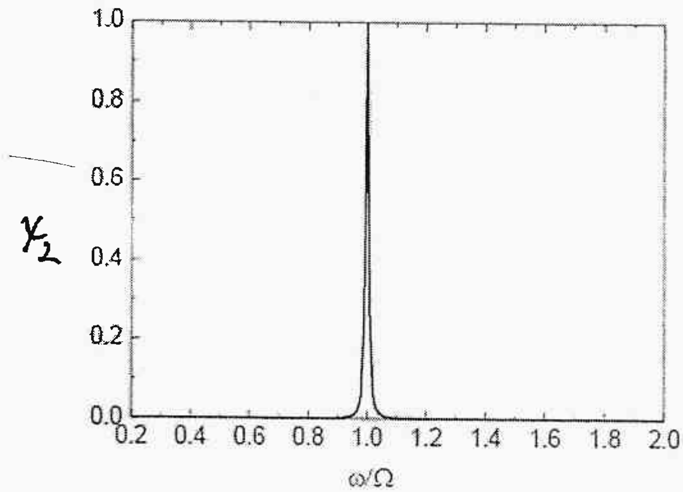
$$\varepsilon_2 = \chi_2$$

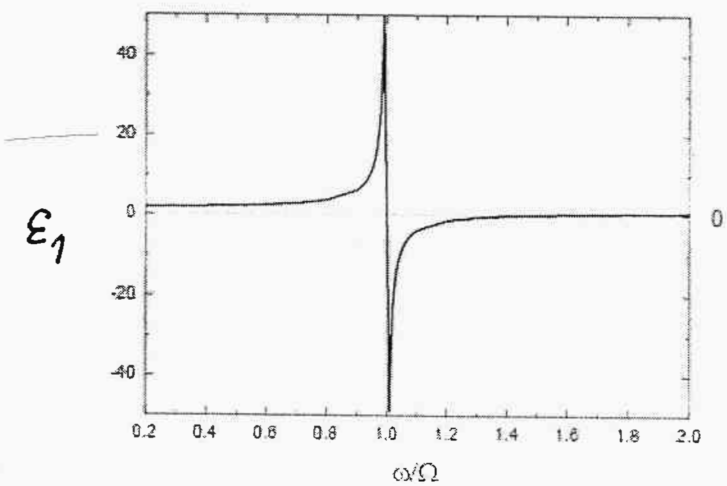
$$\varepsilon_1 = n^2 - \varkappa^2 \qquad \varepsilon_2 = 2n\varkappa$$

$$\Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)} \quad \varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}\left(-\varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}\right)}$$

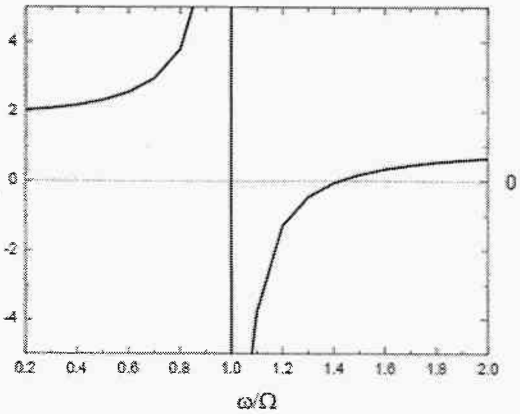
Příklady spektrálních průběhů



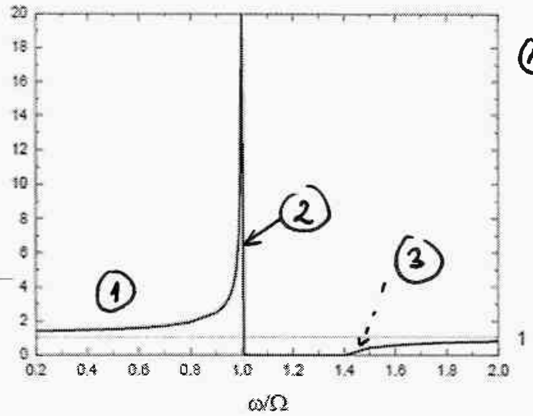




ε_1

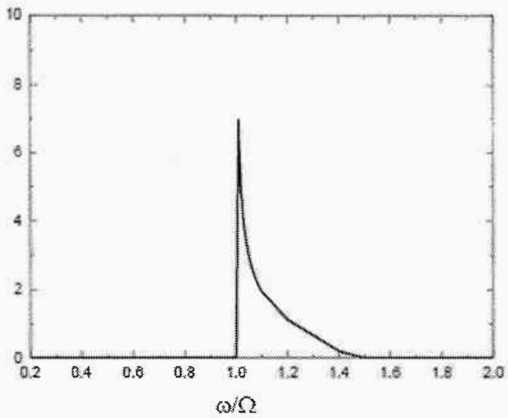


n

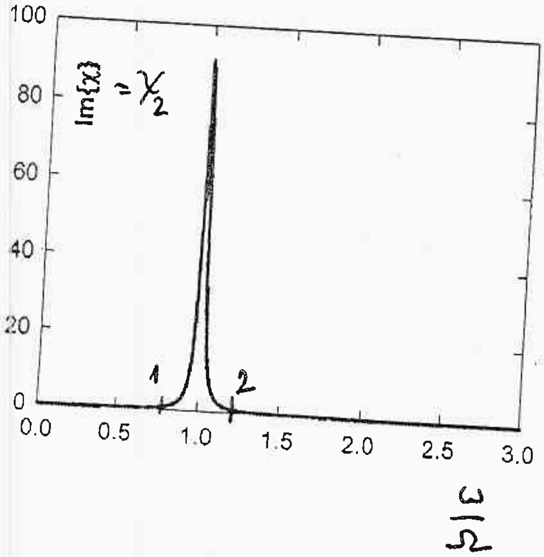


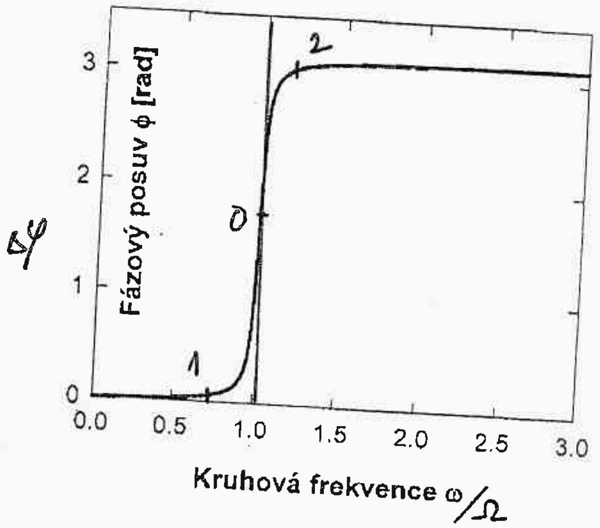
(1) Do rezonanční frekvence index lomu roste $\frac{dn}{d\omega} > 0$. Oblast normální disperze. V oblasti blízko Ω $\frac{dn}{d\omega} < 0$ ... oblast anomální disperze (2)). Dále opět oblast normální disperze, $n < 1$.

$\varkappa$



V oblasti $\omega > \Omega$ ... oblast silné absorpce záření





Mezi frekvencemi $\omega(0) = \Omega$ a $\omega(2)$ je $\Delta\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

Mezi frekvencemi $\omega(1)$ a $\omega(2)$ dochází v okolí rezonanční frekvence k silné absorpci záření. Zde dochází rovněž k fázovému posunu mezi budícím elektrickým polem $\vec{E}$ a odezvou materiálu danou vektorem polarizace $\vec{P}$. $\Delta\varphi \in (0, \pi)$.

Mezi frekvencemi $\omega(0) = \Omega$ a $\omega(2)$ je $\Delta\varphi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. V tomto případě je fáze vektoru polarizace $\vec{P}$ posunuta vůči budícímu poli $\vec{E}$ tak, že vlna $(2) = \vec{P}$ fázově předbíhá vlnu $(1) = \vec{E}$. Fázová rychlost (rychlost maxima jejich složení) je potom větší než c.

Posun maxima je tedy dán interakcí světla s látkou. Nedochází při něm k žádnému přenosu informace rychlostí větší než c. Typická tedy znamená oblast $n < 1$ změna fáze vektoru polarizace $\vec{P}$ v intervalu $(\frac{\pi}{2}, \pi)$

V případě slabého tlumení je $\gamma \approx 0$

$$n^2 \simeq 1 + \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{1}{(2\pi v)^2 \left[\frac{1}{\lambda_r^2} - \frac{1}{\lambda^2}\right]} = \frac{1}{2\pi v^2} \frac{\lambda_r^2 \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_r^2}$$

λ_r ... rez. vlnová délka

$$\Rightarrow n^2 = 1 + A \cdot \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_r^2}$$ Sellmeierův vzorec

Pro $\omega \ll \Omega$

$$\frac{1}{\Omega^2 - \omega^2} = \frac{1}{\Omega^2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2} = \frac{1}{\Omega^2} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^4 + \dots\right.$$

$$n^2 = A' + \frac{B'}{\lambda^2} + \frac{C'}{\lambda^4} + \dots$$

Cauchyho vzorec

Rezonanční frekvence molekul vzduchu leží v UV oblasti. T.j. viditelné záření při průchodu vzduchem má $\omega \ll \Omega$.

Index lomu tedy s energií roste (s rostoucí vlnovou délkou klesá)

$n_č = 1{,}49$

$n_z = 1{,}50$ (indexy lomu pro sklo)

$n_m = 1{,}51$

Lokální pole

V pevných látkách působí na každý oscilátor kromě vnějšího vnějšího pole ostatních dipólů $\vec{E}_{dip}$.

To znamená, že na oscilátor působí tzv. lokální pole

$$\vec{E}_e = \vec{E} + \vec{E}_{dip}$$

Při výpočtu indexu lomu v předchozí části by proto mělo být správně použito pole $\vec{E}_e$. Výpočet $\vec{E}_e$ je obecně složitý. Jednoduše to jde pro kubickou mřížku. Zde platí

$$\vec{E}_e = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

Dipólový moment atomu vyjádříme jako

$$\vec{p} = \beta \vec{E}_e \quad ; \quad \beta \ldots \text{polarizovatelnost}$$

$$\vec{P} = N\vec{p} = N\beta\vec{E}_e = N\beta\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}\right)$$

$$\vec{P} = N\beta\vec{E} + N\beta\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

$$\vec{P}\left(1 - \frac{N\beta}{3\varepsilon_0}\right) = N\beta\vec{E}$$

$$\vec{P} = \frac{N\beta\vec{E}}{1 - \frac{N\beta}{3\varepsilon_0}} \qquad \vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi$$

$$\varepsilon_0\chi = \frac{N\beta}{1 - \frac{N\beta}{3\varepsilon_0}} \quad , \quad \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = \frac{N\beta}{1 - \frac{N\beta}{3\varepsilon_0}}$$

Označme $\quad \mathcal{L} = \frac{N\beta}{3\varepsilon_0} \qquad \chi = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{3\mathcal{L}\varepsilon_0}{1-\mathcal{L}} = \frac{3\mathcal{L}}{1-\mathcal{L}}$

$\chi = \varepsilon_r - 1 \qquad (\varepsilon_r - 1)(1-\mathcal{L}) = 3\mathcal{L}$

$$\varepsilon_r - \varepsilon_r\mathcal{L} - 1 + \mathcal{L} = 3\mathcal{L}$$

$$\varepsilon_r - 1 = (\varepsilon_r + 2)\mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} = \frac{N\beta}{3\varepsilon_0}$$

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{N\beta}{3\varepsilon_0}$$ Lorentz-Lorenzova rovnice

Tato rovnice spojuje index lomu látky s polarizovatelností atomů.

Klasický model pro výpočet indexu lomu vodivých prostředí (např. kovy, plazma apod.)

Elektrony jsou v těchto prostředích volné

$\Rightarrow k_H = 0, \ \Omega = 0$

$m\ddot{\tilde{x}} + m\gamma\dot{\tilde{x}} = e\tilde{E} \qquad \tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{-i\omega t}$

$\qquad \tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow$ Řešení stejné jako u Lorentzova modelu $(\Omega = 0)$

$$\tilde{n}^2 = 1 + \tilde{\chi} = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{-\omega^2 - i\gamma\omega} =$$

$$= 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{1}{-i\omega} \cdot \frac{1}{\gamma + \frac{\omega}{i}} =$$

$$= 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \cdot \frac{i}{\omega} \cdot \frac{1}{\gamma - i\omega}$$

označme $\dfrac{q^2 N}{\varepsilon_0 m} = \omega_p^2$, ω_p.. plasmová frekvence

$$\tilde{\varepsilon}_r = 1 + i\frac{\omega_p^2}{\omega}\cdot\frac{1}{\gamma - i\omega}$$

V případě slabého tlumení $\gamma \ll \omega$

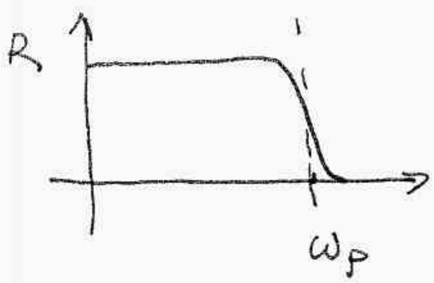
je $\tilde{\varepsilon}_r = 1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2} = \tilde{n}^2$

pro $\omega > \omega_p$ je $\tilde{n} > 0$ $\tilde{n}$ je reálné

pro $\omega < \omega_p$ je $\tilde{n} = i\varkappa$ (ryze imaginární)

– stejná situace jako v oblasti za rezonancí v Lorentzově modelu.

$\Rightarrow$ Pro frekvence větší než plasmová je kov průhledný. Pro $\omega < \omega_p$ je světlo kovem silně odráženo (vysoký absorpční koeficient, světlo nepronikne do látky, takže je odráženo)



R ... výkonový koeficient odrazu

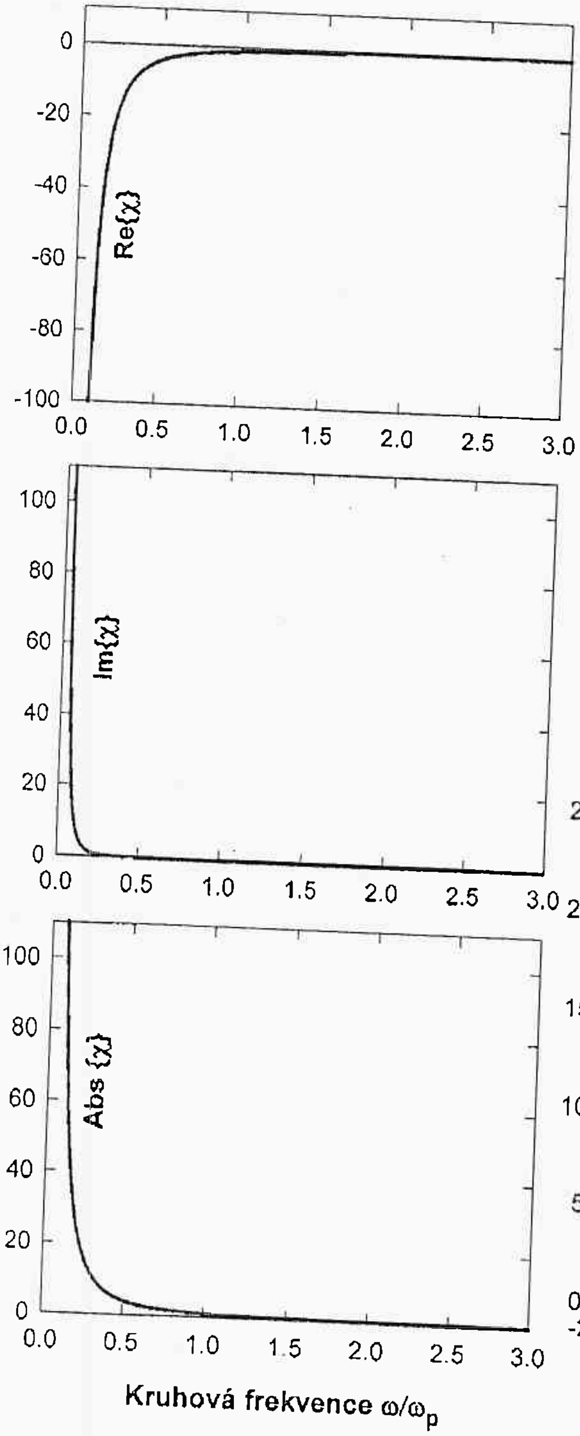
$\omega_p = 1{,}36 \times 10^{16}$ Hz (Ag)

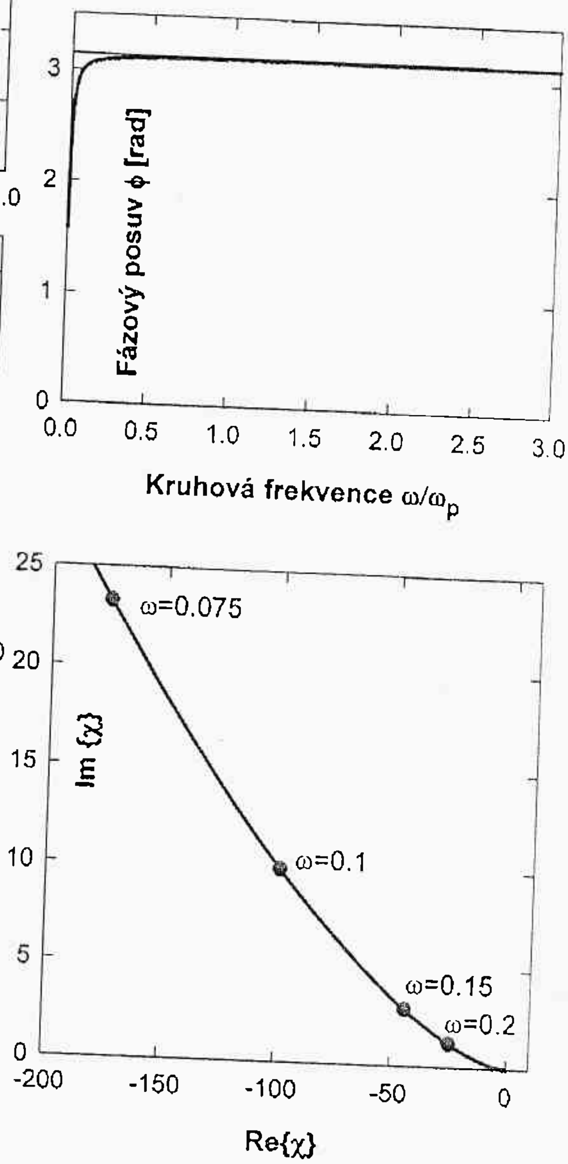
(stříbro je v optické oblasti bílé) – vše se odráží

"Čistý" Drudeův model, susceptibilita $\chi(\omega)$

$\omega_p=1$ $\chi_{infinity}=0$

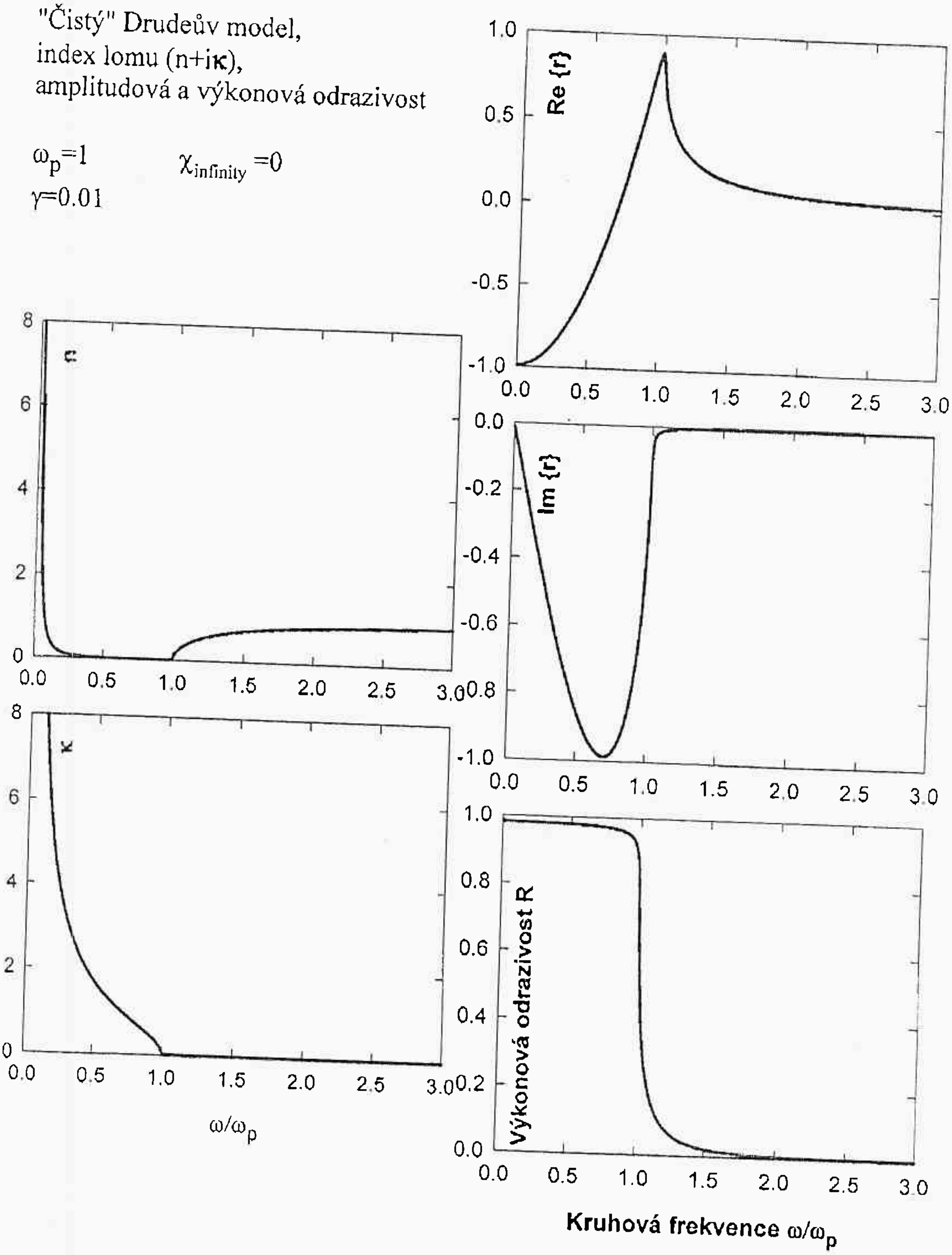
$\gamma=0.01$





"Čistý" Drudeův model,
index lomu $(n+i\kappa)$,
amplitudová a výkonová odrazivost

$\omega_p=1$ $\chi_{infinity}=0$
$\gamma=0.01$



Absorbce – mikroskopický model

Model je založen na výpočtu přenosu energie světelné vlny do jednoho tlumeného oscilátoru a dále výpočtem zeslabení intenzity světla souborem tlumených harmonických oscilátorů.

$$L = \frac{dA}{dt} \leftarrow \text{práce}$$

výkon

$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Práce konaná silou $\vec{F}$ na dráze $d\vec{r}$

$$\vec{F} = q\vec{E} \qquad (q = -e)$$

$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 e^{-i\omega t}$$

$$\tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$dA = qE\,dx \qquad A = qEx$$

$$L = \frac{dA}{dt} = qE\frac{dx}{dt} = qE\dot{x}$$

Při výpočtu výkonu započteme jen reálné hodnoty komplexních veličin $\tilde{x}$ a $\tilde{E}$

$$E = \frac{1}{2}\tilde{E}_0 e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}\tilde{E}_0^* e^{i\omega t} \qquad x = \frac{1}{2}\tilde{x}_0 e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}\tilde{x}_0^* e^{+i\omega t}$$

$$\dot{\tilde{x}} = -\frac{i\omega}{2}\tilde{x}_0 e^{-i\omega t} + \frac{i\omega}{2}\tilde{x}_0^* e^{i\omega t}$$

$$E\dot{x} = \frac{1}{4}\left(\tilde{E}_0 e^{-i\omega t} + \tilde{E}_0^* e^{i\omega t}\right)\left(-i\omega\tilde{x}_0 e^{-i\omega t} + i\omega\tilde{x}_0^* e^{i\omega t}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(-i\omega\tilde{E}_0\tilde{x}_0 e^{-2i\omega t} - i\omega\tilde{x}_0\tilde{E}_0^* + i\omega\tilde{E}_0^*\tilde{x}_0 + i\omega\tilde{E}_0^*\tilde{x}_0^* e^{2i\omega t}\right)$$

$$qE\dot{x} = \frac{-iq\omega}{4}\left(\tilde{x}_0\tilde{E}_0^* + \tilde{E}_0\tilde{x}_0 e^{-2i\omega t}\right) + c.c.$$

$$\langle L\rangle_T = \frac{-iq\omega}{4}\tilde{x}_0\tilde{E}_0^* + c.c.$$

protože $\langle e^{-2i\omega t}\rangle_T = 0$

Z výpočtu LHO víme, že

$$\tilde{x} = \frac{q\tilde{E}_0}{m} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Ω … rezonanční frekvence

γ … tlumící faktor

$$\langle L \rangle_T = \frac{-iq\omega \tilde{E}_0^*}{4} \cdot \frac{q\tilde{E}_0}{m} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} +$$

$$+ \frac{iq\omega \tilde{E}_0 \cdot q\tilde{E}_0^*}{4m} \cdot \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} =$$

$$= \frac{-iq^2\omega E_0^2}{4m} \cdot \left(\frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} - \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \right) =$$

$$= \frac{-iq^2\omega E_0^2}{4m} \cdot \left(\frac{2i\gamma\omega}{(\Omega^2 - \omega^2) + \gamma^2\omega^2} \right) = \frac{q^2\omega^2 E_0^2}{2m} \frac{\gamma}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

$\Rightarrow \quad \langle L \rangle_T \geq 0$ … Tlumený LHO absorbuje světlo

Protože intenzita světla je úměrná čtverci amplitudy elektrického pole, je střední výkon pohlcený oscilátorem přímo úměrný intenzitě světla.

V rezonanci, $\Omega = \omega$ je $\langle L \rangle_T \sim \frac{1}{\gamma}$

Dále uvažujme světelný svazek o průřezu M. [m^2] který obsahuje dipóly o koncentraci N [m^{-3}]

Během šíření světla po dráze dz osvítí svazek dn oscilátorů

$$dn' = N \underbrace{M\,dz}_{dV \text{ -- objem}} \qquad M = 1\,m^2$$

Intenzita světla a zeslabení

$$dI = -\langle L\rangle \cdot N \cdot dz$$

(intenzita světla odpovídá střednímu výkonu vztaženému na jednotku plochy.

$$dI = -\frac{q^2\omega^2 E_0^2}{2m} \cdot \frac{\gamma}{(\Omega^2-\omega^2)+\gamma^2\omega^2} \cdot N\,dz$$

$$I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c n E_0^2 \quad \dots \quad \frac{E_0^2}{2} = \frac{I}{\varepsilon_0 c n}$$

$$= -\frac{q^2\omega^2}{m} \cdot \frac{I}{c\varepsilon_0 n} \cdot \frac{\gamma}{(\Omega^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} N\,dz$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \quad \Rightarrow \quad dI = -\frac{q^2}{mn} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, I\, \frac{\gamma\omega^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} N\,dz$$

označme

$$\alpha = \frac{q^2}{mn} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\, \frac{\gamma\omega^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} N$$

absorbční koeficient

$$dI = -\alpha I\,dz \qquad \frac{dI}{I} = -\alpha\,dz$$

$$\ln I = -\alpha z + C$$

$$I = I_0 e^{-\alpha z}$$

$$C = (\ln I)_{z=0} = \ln I_0$$

$$I = I_0 e^{-\alpha z}$$

Lambert-Beerův absorpční zákon.

DODATEK

Základní varianta Lorentzova modelu:

- pohybová rovnice dipólu vynuceně kmitajícího v elektrickém poli dopadající monochromatické vlny,
- „látkové" Maxwellovy rovnice,

zanedbává interakce mezi kmitajícími dipóly (elektromagnetické dipól-dipól i všechny ostatní)

Pohybová rovnice $m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + m \cdot \gamma \frac{dx}{dt} + \kappa x = qE$

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \Omega^2 x = \frac{q}{m} E$$

Řešení: řešení homogenní rovnice (pravá strana $= 0$) + partikulární řešení celé rovnice

Homogenní rovnice: vlastní kmity tlumeného oscilátoru

$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \Omega^2 x = 0$ hledat ve tvaru $\sim e^{-i\Omega_{1,2} t}$

$$-\Omega_{1,2}^2 - i\gamma \Omega_{1,2} + \Omega^2 = 0$$

předpokládejme slabé tlumení $4\Omega^2 > \gamma^2$

$$\Omega_{1,2} = \frac{-i\gamma \pm \sqrt{4\Omega^2 - \gamma^2}}{2}$$

$$x_h(t) = x_1 e^{-i\Omega_1 t} + x_2 e^{-i\Omega_2 t}$$

řešení homogenní rovnice

pro $t \to \infty$ $x_h(t) \to 0$

Vlastní kmity se po dostatečně dlouhé době utlumí.

DODATEK (2)

Označme vlastní kmity $\Omega_V = \sqrt{\Omega^2 - \gamma^2/4}$

$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ rezonanční frekvence

$\Omega_1 = \Omega_V - i\,\gamma/2 \qquad \Omega_2 = -\Omega_V - i\,\gamma/2$

$$x_h(t) = \left(x_1 \cdot e^{-i\Omega_V t} + x_2\, e^{+i\Omega_V t}\right) \cdot e^{-\gamma/2\, t}$$

x_1, x_2 nutno určit z počátečních podmínek.

Řešení pro stacionární stav:

oscilátor je vystaven síle $\sim e^{-i\omega t}$ po hodně dlouhou dobu, kdy $\lim_{t\to\infty} x_h(t) = 0$,

hledat ve tvaru $x(t) = x_0 \cdot e^{-i\omega t}$

oscilátor kmitá ve stejném rytmu jako budící pole

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \Omega^2 x = \frac{q}{m} \cdot E_0 \cdot e^{-i\omega t}$$

$x = x_0 \cdot e^{-i\omega t}$

$\dot{x} = -i\omega\, x_0\, e^{-i\omega t}$

$\ddot{x} = -\omega^2 x_0\, e^{-i\omega t}$