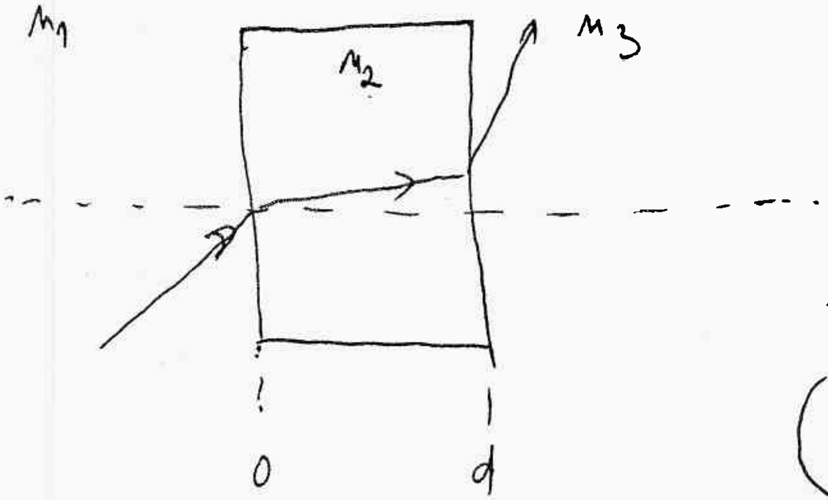
ABCD matice pro průchod deskou



1. Lom na rozhraní n_1/n_2

Matice lomu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f'} & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} ; \quad \frac{1}{f'} = \frac{1}{R}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

Rovné rozhraní, $R \to \infty$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{f'} = 0$

$\Rightarrow$ Matice lomu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} \quad (1.\ \text{rozhraní})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \quad (2.\ \text{rozhraní})$$

Matice šíření $\begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Celkově

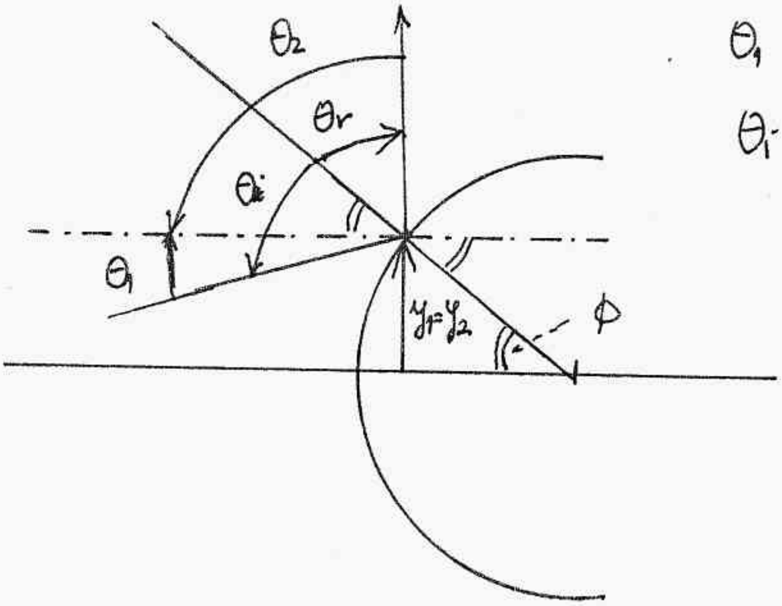
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_2}{n_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -d\frac{n_1}{n_2} \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d \cdot \frac{n_1}{n_2} \\ 0 & \frac{n_1}{n_3} \end{pmatrix}$$

Speciálně pro desku s indexem lomu $n = n_2$ ve vzduchu ($n_1 = n_3 = 1$) dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{d}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matice odrazu na kulovém rozhraní



$\theta_1 < 0 \,,\; \theta_2 > 0$

$\theta_i > 0 \,,\; \theta_r < 0$

$\theta_i = -\theta_r$

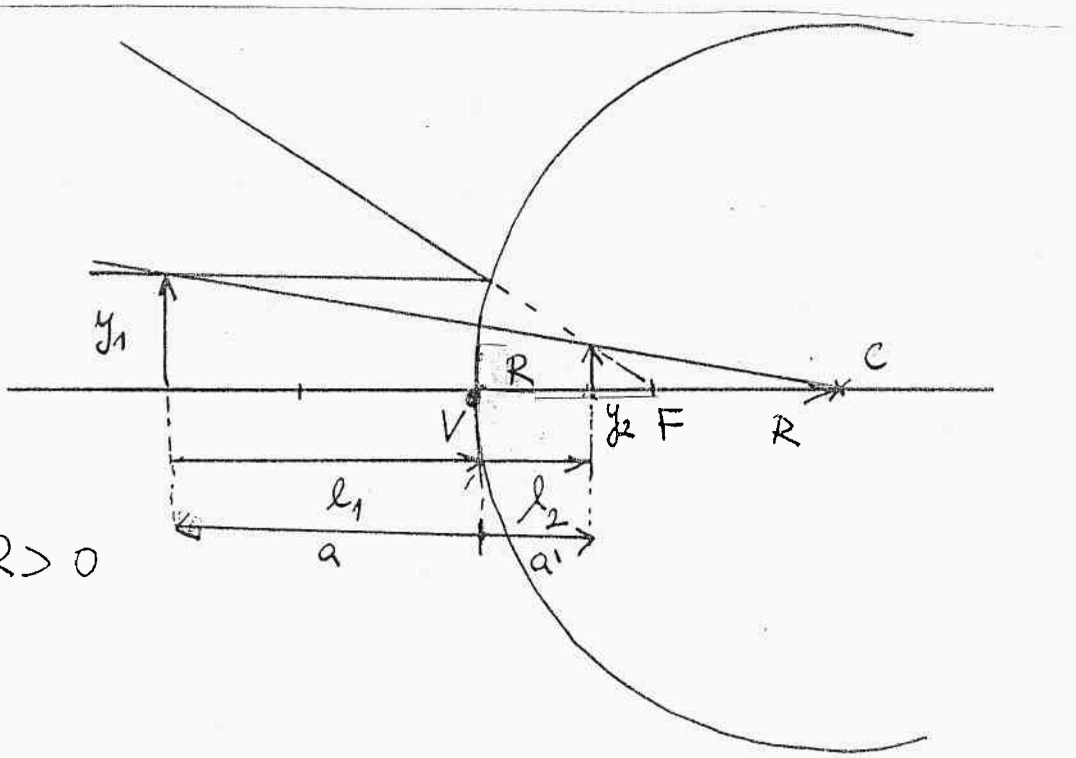
$$\phi = \theta_i + \theta_1$$

$$\phi = \theta_r + \theta_2 = -\theta_i + \theta_2$$

$$\Rightarrow \quad \theta_2 = \phi + \theta_i = 2\phi - \theta_1 = \frac{2y_1}{R} - \theta_1$$

$\Rightarrow$ Matice odrazu $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix}$

Přenosová matice pro odraz na zrcadle



$R > 0$

$l_1, l_2 > 0$ $\quad a < 0,\ a' > 0$ (pro vypuklé, konvexní zrcadlo, kde $R > 0$)

$a < 0 \quad a' < 0$ (pro duté, konkávní zrcadlo, kde $R < 0$)

$$\begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -l_1 \\ \frac{2}{R} & -\frac{2}{R} l_1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2l_2}{R} & -l_1 + \frac{2l_1l_2}{R} + l_2 \\ \frac{2}{R} & -\frac{2}{R} l_1 - 1 \end{pmatrix}$$

<!>

Zobrazení $\Leftrightarrow B = 0 \Rightarrow \frac{2 l_1 l_2}{R} = l_1 - l_2$

$$\frac{2}{R} = \frac{l_1 - l_2}{l_1 l_2} = -\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \qquad \begin{matrix} l_1 = -a \\ l_2 = a' \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}}$$

$$\frac{2}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$$ ... zobrazovací rovnice pro zrcadla

$a \to -\infty$ (pak $a' = f'$ ⇝ obrazové ohnisko)

Je-li $R > 0$ (vypuklé, konvexní zrcadlo)

pak je $\frac{2}{R} = \frac{1}{f'}$; $f' > 0$

Je-li $R < 0$ $\frac{2}{R} = \frac{1}{f'}$ $f' < 0$

(duté zrcadlo)

V obou případech je $|f'| = \left|\frac{R}{2}\right|$

Ohnisko je v polovině vzdálenosti mezi středem kulové plochy a vrcholem na optické ose.

$a' \to \pm\infty$ $a = f$ předmětové ohnisko

$$|a| = |f| = \left|\frac{R}{2}\right|$$

Zobrazení zrcadlem

Porovnáním matic pro lom a odraz na kulovém rozhraní

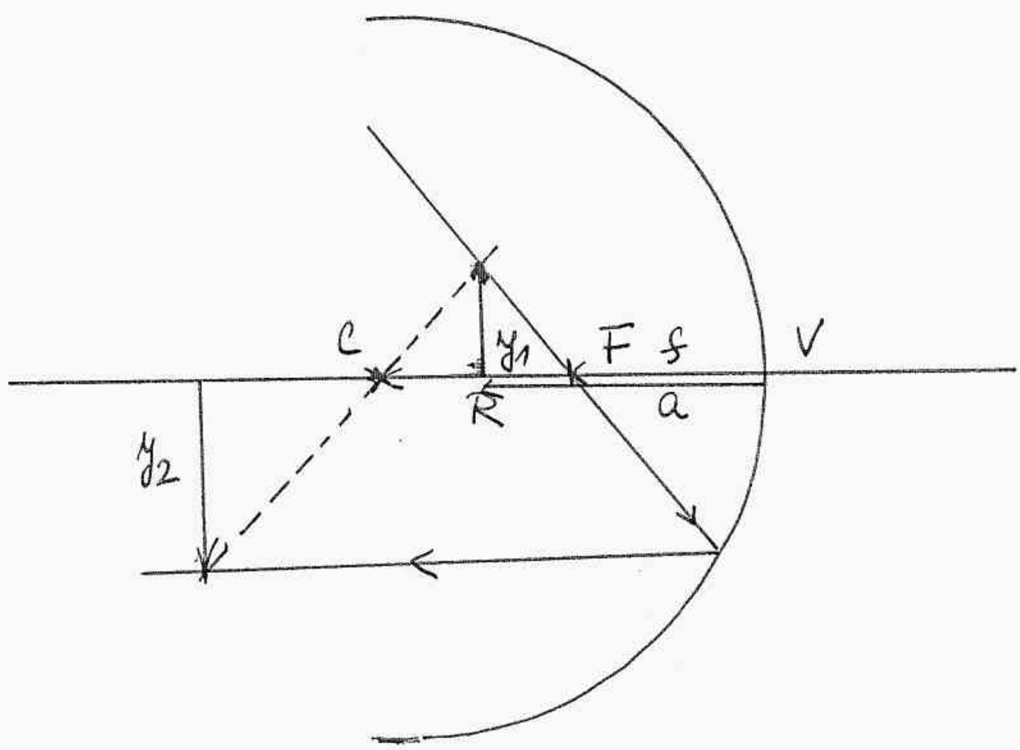
$$\frac{1}{f'} = \frac{2}{R} \Rightarrow f' = \frac{R}{2}$$

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n_i}{n_f} = -1$$

pro odraz

$n_i = n_f$ při odrazu (odraz do prostředí se stejným indexem lomu)

Duté zrcadlo $R<0$
(Konkávní)

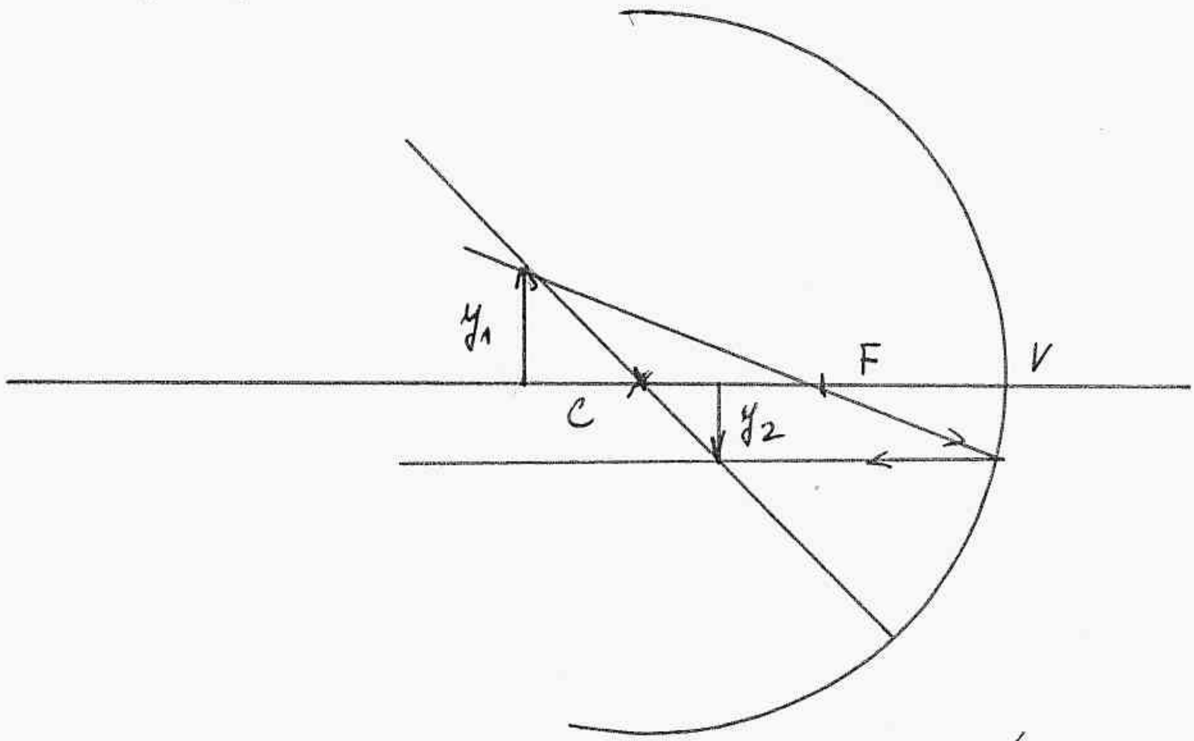


Obraz je zvětšený a invertovaný

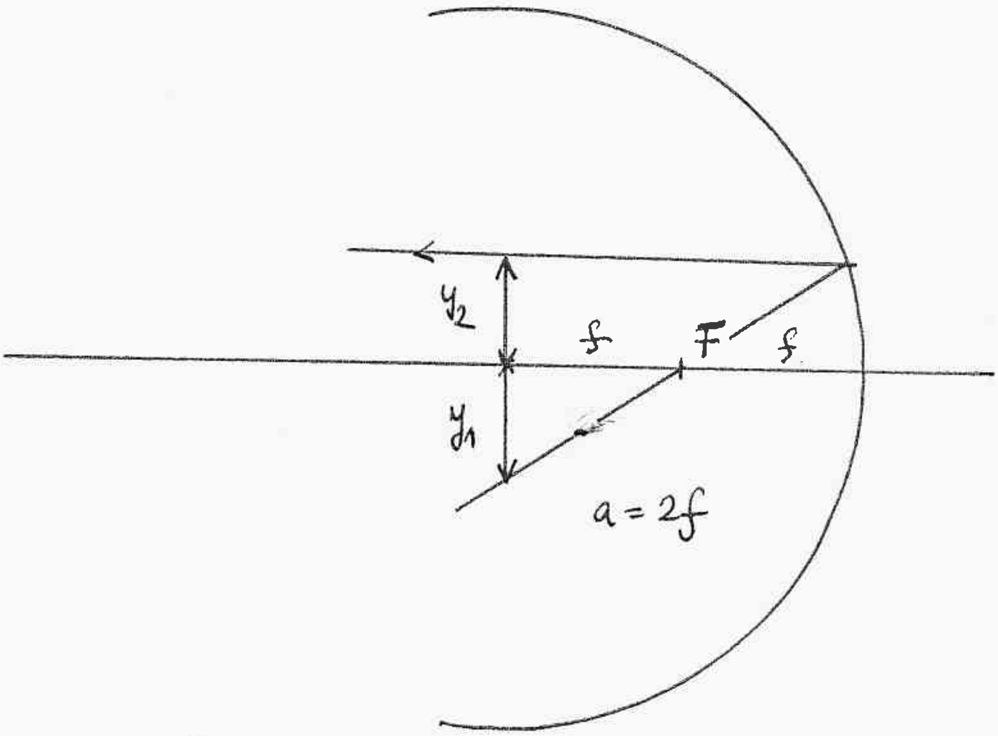
$f < a < 2f$

$2f < a < \infty$

a .. vzdálenost y_1 od vrcholu V

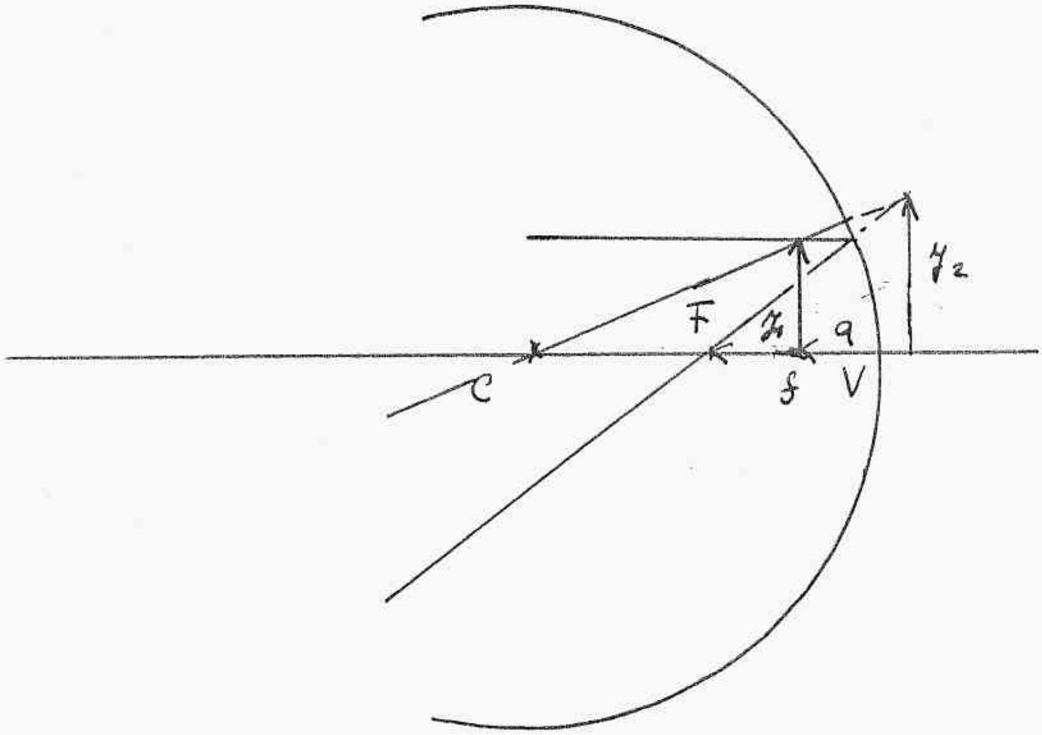


Obraz je invertovaný a zmenšený



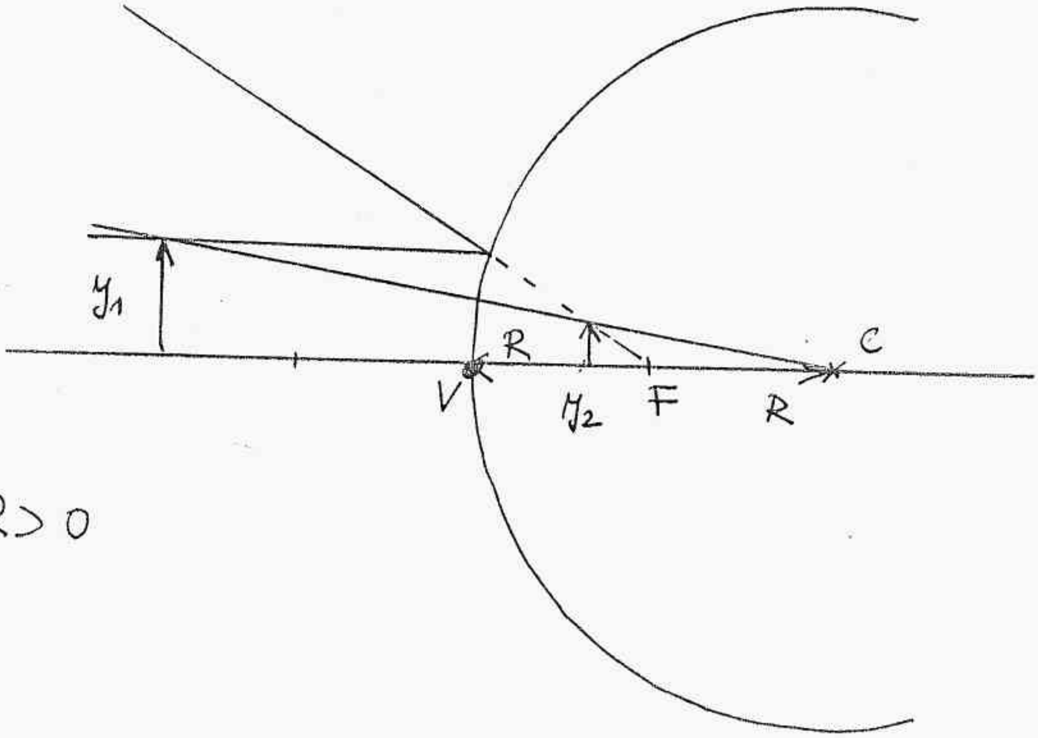
Je-li předmět ve středu kulové plochy, vzniká ve stejném místě invertovaný obraz stejné velikosti

$a < f$



Obraz je virtuální, vzpřímený a zvětšený.

Vypuklé zrcadlo
(konvexní)

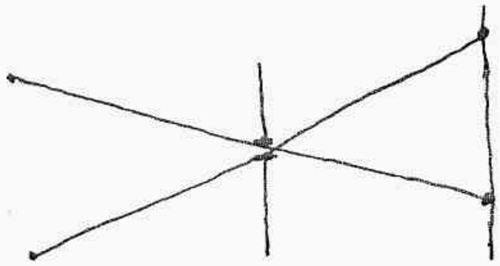


$R > 0$

Obraz je virtuální, přímý a zmenšený pro libovolnou polohu objektu (předmětu) před zrcadlem.

Fotoaparát

Nejjednodušší - tzv. camera obscura



Malý otvor   Stínítko = detektor

Do každého bodu obrazu dopadají paprsky vycházející přibližně z jednoho bodu předmětu. Každému bodu scény odpovídá kroužek v rovině detektoru. Velikost kroužku je dána rozměrem clony. Příliš velká clona .. kroužky se překrývají, obraz je rozmazaný. Příliš malá clona - vzniká difrakce, obraz je opět rozmazaný.

Výhoda ... žádná optická soustava, není třeba nic nastavovat

Nevýhoda - clonou projde málo světla = dlouhé expoziční časy

Rozlišení fotoaparátu je omezeno zrnitostí emulze na filmu nebo velikostí pixelu na čipu v digit. fotoaparátu. Zrnitost filmu - obvykle 5 μm.

Vady optického zobrazení

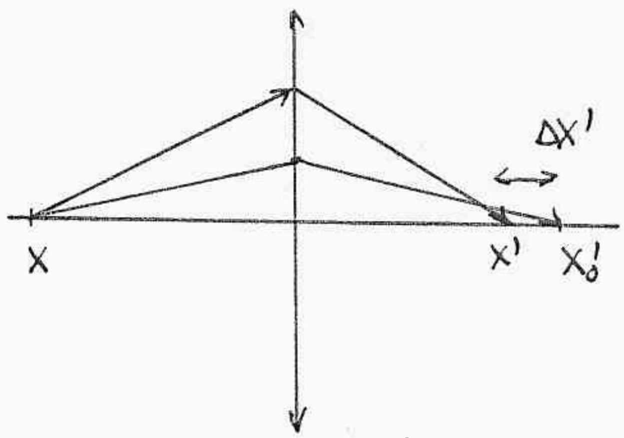
Ideální zobrazení – paprsky z předmětového bodu se po průchodu optickou soustavou sbíhají v obrazovém bodě – případ sbíhavých paprsků. V případě rozbíhavých paprsků se jejich zpětné prodloužení sbíhají ve zdánlivém bodě.

Ideální zobrazení ... – pouze paraxiální prostor
– pouze monochromatické záření

Vady
- monochromatické (otvorová, astigmatismus, zkreslení, zklenutí, koma)
- barevné . způsobeny rozdílným indexem lomu pro různé vlnové délky

Otvorová vada (sférická aberace)

Vzniká při zobrazení předmětů na optické ose monochromatickým světlem.



X_0' ... paraxiální obraz X

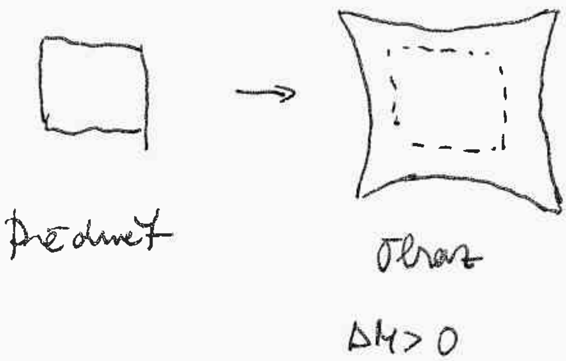
$\Delta X'$ .. podélná otvorová vada
Pro spojnou čočku je $\Delta X' < 0$ (X' je nalevo od X_0')
Pro rozptylnou naopak

Omezení prostorové vady .. zaclonění okrajových paprsků

Zkreslení (distorze)

- předmětný bod leží mimo optickou osu
  Monochromatické světlo

Příčina zkreslení je nestejná velikost příčného zvětšení v celém obrazovém poli

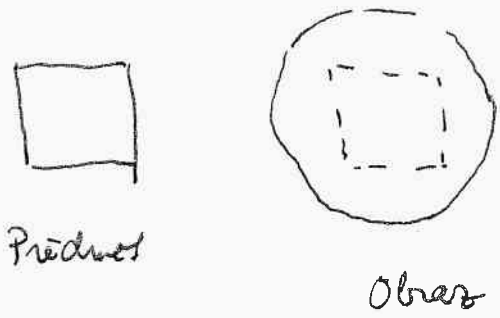


Polštářové zkreslení

$$\Delta M = \frac{M_I - M}{M}$$

M_I ... zvětšení na optické ose

M .. zvětšení mimo optickou osu



Soudkové zkreslení

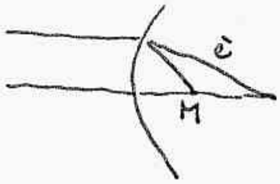
$\Delta M < 0$

Astigmatismus

Astigmatické zobrazení je nebodové – bod se zobrazí jako 2 úsečky. Dochází k němu při zobrazení předmětu ležícího mimo optickou osu monochromatickým světlem.

Barevná vada

- Daná různou velikostí indexu lomu pro různé vlnové délky (disperze)



Červené paprsky se lámou nejméně, fialové nejvíce
Bod se zobrazí jako řada bodů s různou barvou

Barevnou vadu lze korigovat kombinací spojné a rozptylné čočky

Fázová a grupová rychlost, signál

Mějme harmonickou vlnu

$$E = E_0 \cos(k_1 z - \omega t) = E_0 \cos\left(k_1 z - \frac{2\pi}{T} t\right) =$$

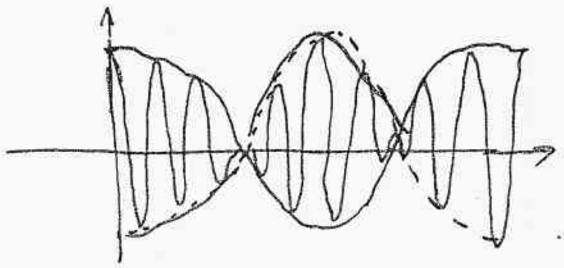
$$= E_0 \cos\left(k_1 z - \frac{2\pi}{\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_1}{T} t\right) = E_0 \cos(k_1 z - \underbrace{k_1 v_p}_{\omega_1} t)$$

$v_p = \frac{k v_p}{k}$ je fázová rychlost vlny

Při složení 2 vln stejné amplitudy a mírně se lišící frekvence dostaneme

$$E = E_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) + E_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t) =$$

$$= 2E_0 \cos \frac{(k_1+k_2)z - (\omega_1+\omega_2)t}{2} \cos \frac{(k_1-k_2)z - (\omega_1-\omega_2)t}{2}$$



$$\bar{k} = \frac{k_1+k_2}{2} \qquad \bar{\omega} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$

$$\Delta k = \frac{k_1-k_2}{2} \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$$

$$= 2E_0 \cos\left(\frac{\bar{k}z - \bar{\omega}t}{2}\right) \cos\left(\frac{\Delta k z - \Delta\omega t}{2}\right)$$

↑ Nosná vlna ↑ obálka

$\bar{v}_p = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$ .. fázová rychlost složené nosné vlny

$\bar{v}_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ ... grupová rychlost (rychlost šíření obálky)

Skládání vln s frekvencemi z určitého intervalu (kvazimonochromatické světlo)

$\omega = \omega(k)$ disperzní vztah

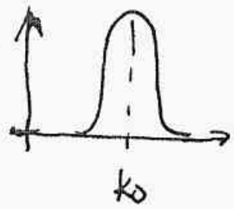
např. $\omega = ck$ vakuum

$$\omega = vk = \frac{c}{n(\omega)} k \quad \text{.. látka}$$

Zkonstruujme vlnový balík jako superpozici vln

$$E(z,t) = \int dk\, E(k)\, e^{i(kz-\omega t)}$$

Nechť $E(k)$



$$[E(z)] = \frac{V}{m}$$

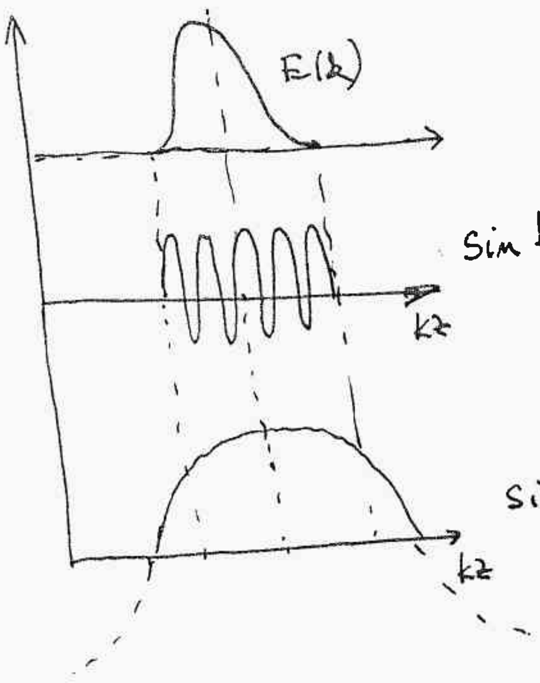
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad [k] = \frac{rad}{m}$$

$$\Rightarrow \left[\int dk\, E(k)\, e^{i(kz-\omega t)}\right] = E(z,t)$$

$$= \frac{rad}{m} \cdot \frac{V}{rad} \cdot 1 = \frac{V}{m}$$

Bude nás zajímat, jak rychle se tento balík pohybuje. Nejprve to ukážeme přibližně s využitím principu konstantní fáze.

Rozměr funkce $E(k)$ při skládání vlnového balíku je $\frac{V}{rad}$.



sin kz (nebo cos kz)
(varianta I)

sin kz (nebo cos kz)
(varianta II)

aby $\int E(k) \sin kz \, dk$ nebo $\int E(k) \cos kz \, dk$ vytvořil vlnový balík, je třeba aby málo se měnící funkce $E(k)$, $\left(-\frac{\Delta k}{2} \leq k \leq \frac{\Delta k}{2} \right)$ byla v integrálu násobena málo se měnící funkcí $\sin kz$ nebo $\cos kz$. V případě varianty I je harmonická funkce rychle oscilující, takže $\int E(k) \sin kz \, dk$ je na daném intervalu integrace téměř nulový – vlnový balík se nevytvoří!. V případě varianty II je integrál téměř maximální, neboť harmonická funkce je na intervalu integrace téměř konstantní.

Pro odhad šíření balíku a jeho rychlosti budeme předpokládat, že fáze $\varphi = kz - \omega t$ je na intervalu integrace $\left(k_0 - \frac{\Delta k}{2}, k_0 + \frac{\Delta k}{2} \right)$ konstantní!

$$\varphi = kz - \omega(k)t = \text{konstantní}$$

Provedeme derivaci v bodě k_0

$$\left.\frac{d\varphi}{dk}\right|_{k_0} = z - \underbrace{\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}}_{\text{Má rozměr a význam rychlosti}} \cdot t = 0$$

Definujme ji jako $v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$

.. grupová rychlost = rychlost šíření balíku fázi φ nyní můžeme psát jako

$$\varphi = kz - \omega t = k\left(z - \frac{\omega}{k} t\right) = k\left(z - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \cdot t\right)$$

a

$$E(z,t) = \int dk\, E(k) e^{i(kz - \omega t)} = \int dk\, E(k) e^{ik\left(z - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \cdot t\right)}$$

$$E(z,0) = \int dk\, E(k) e^{ikz}$$

Balíčky v čase $t = 0$ a $t = t$ jsou navzájem posunuté o $\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \cdot t = v_g \cdot t$ ve směru kladné osy x.

Nyní spočítáme grupovou rychlost pomocí Taylorova rozvoje

Rozviňme frekvenci $\omega(k)$ kolem středu balíčku k_0

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \cdot \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} + \underbrace{\frac{1}{2}(k - k_0)^2 \cdot \left.\frac{d^2\omega}{dk^2}\right|_{k_0} + \cdots}_{O(k^2)}$$

$$E(z,t) = e^{-i\omega(k_0)t} \cdot e^{ik_0 \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} t} \int dk\, E(k)\, e^{ik\left(z - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \cdot t\right)}$$

$$|E(z,t)| = \left| \int dk\, e^{ik\left(z - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \cdot t\right)} \right|$$

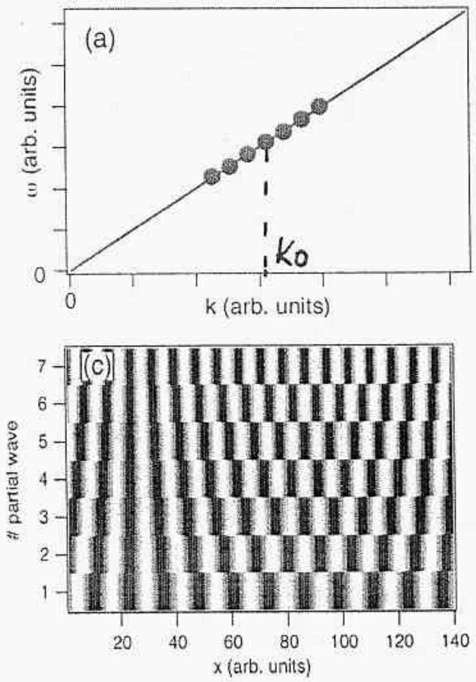
$$|E(z,0)| = \left| \int dk\, e^{ikz} \right|.$$

$$\Rightarrow \quad |E(z,t)| = \left| E\left(z - \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \cdot t,\ 0\right) \right|$$

Amplituda vlny v čase t je amplituda vlny v čase 0 posunutá o $\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} \cdot t = v_g t$ ve směru kladné osy z.

Pro konkrétní popis šíření balíku je třeba znát konkrétní závislost $\omega = \omega(k)$ - disperzní vztah

Elektromagnetická vlna ve vakuu



$$v_p = \frac{\omega}{k} = c$$

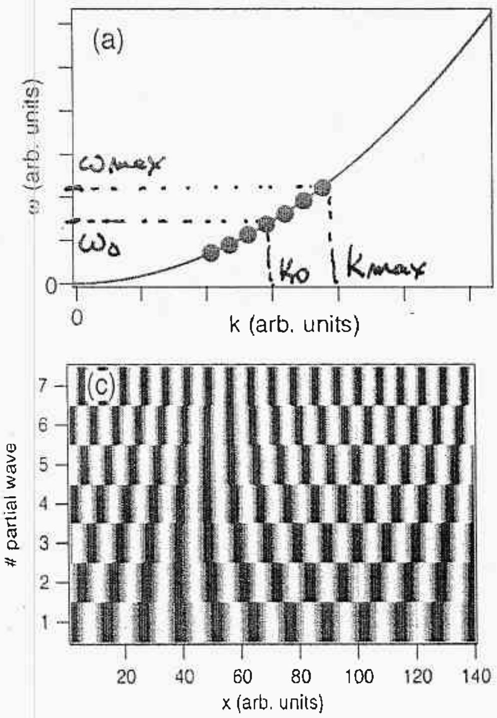
$$v_g = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} = c$$

Fázová a grupová rychlost jsou stejné! Tj. všechny komponenty vlnového balíku se šíří rychlostí c, stejně jako obálka vlnového balíku

Disperzní vztahy ve fyzice mají širokou paletu funkčních závislostí a zahrnují všechny typy vln - elektromagnetické, mechanické i kvantově mechanické vlny pravděpodobnosti.

Než přejdeme k rozboru disperzních vztahů pro šíření EM vln v látce, popíšeme jednodušší vztahy, které se vyskytují v kvantové mechanice a při šíření mechanických vln v látce.

Vlna; nerelativistické mechanické částice o hmotnosti m



$$\lambda = \frac{h}{p} \Rightarrow p = \frac{h}{\lambda} =$$

$$= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{h}{2\pi} = \hbar k$$

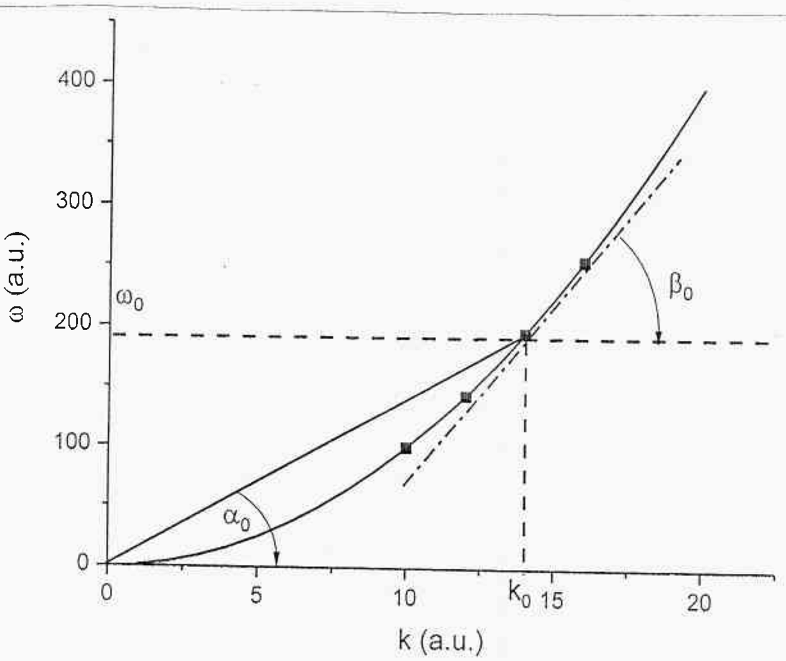
$$E = \hbar\omega$$

De Broglieho vlna

$$E = \hbar\omega(k) = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

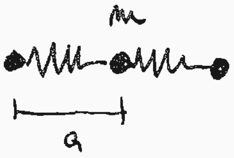
Grafické určení fázové a grupové rychlosti



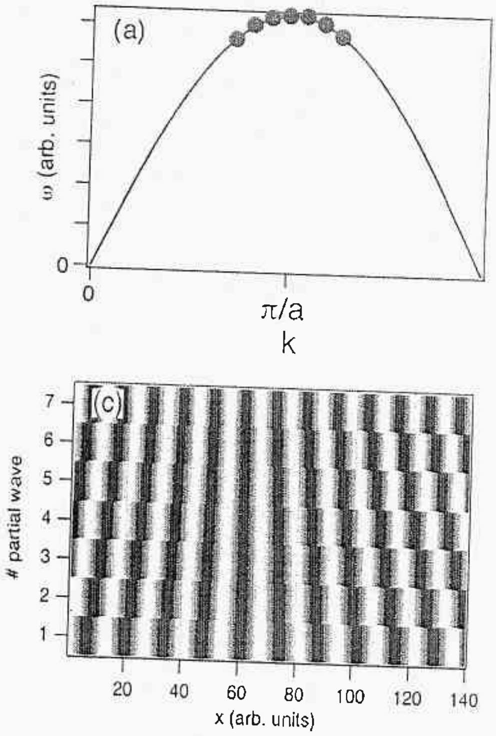
$$v_p\Big|_{k_0} = \frac{\omega}{k_0} = \frac{\hbar k_0}{2m} \qquad v_g(k_0) = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k_0} = \frac{\hbar k}{m} = \operatorname{tg}\beta_0$$

$$= \operatorname{tg}\alpha_0 \qquad v_g > v_p$$

Kmity lineárního řetízku atomů



γ .. síla pružiny (vazby)



$$\omega(k) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|$$

V bodě $\frac{\pi}{a}$ je

$$\omega\left(\frac{\pi}{a}\right) = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$$

$$v_p\Big|_{\frac{\pi}{a}} = \frac{\omega}{k}\Big|_{\frac{\pi}{a}} = \frac{2\sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{\frac{\pi}{a}} =$$

$$= \frac{2a}{\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$$

tj. $v_g = \frac{d\omega}{dk}\Big|_{\frac{\pi}{a}} = 0$

Disperzní vztah při šíření světla v látce

$$\omega = v_p\, k(\omega) \qquad v_p = \frac{c}{n(\omega)} \quad \Rightarrow \quad k(\omega) = n(\omega)\cdot\frac{\omega}{c}$$

Kolem $\omega = \omega_0$ (odpovídající $k = k_0$) můžeme index lomu rozvinout do Taylorovy řady

$$n(\omega) = n(\omega_0) + \frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega_0}(\omega - \omega_0) + \dots$$

$$k(\omega) \approx \left[n(\omega_0) + \frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega_0}(\omega - \omega_0)\right]\cdot\frac{\omega}{c}$$

$$dk = k(\omega_0 + d\omega) - k(\omega_0) =$$

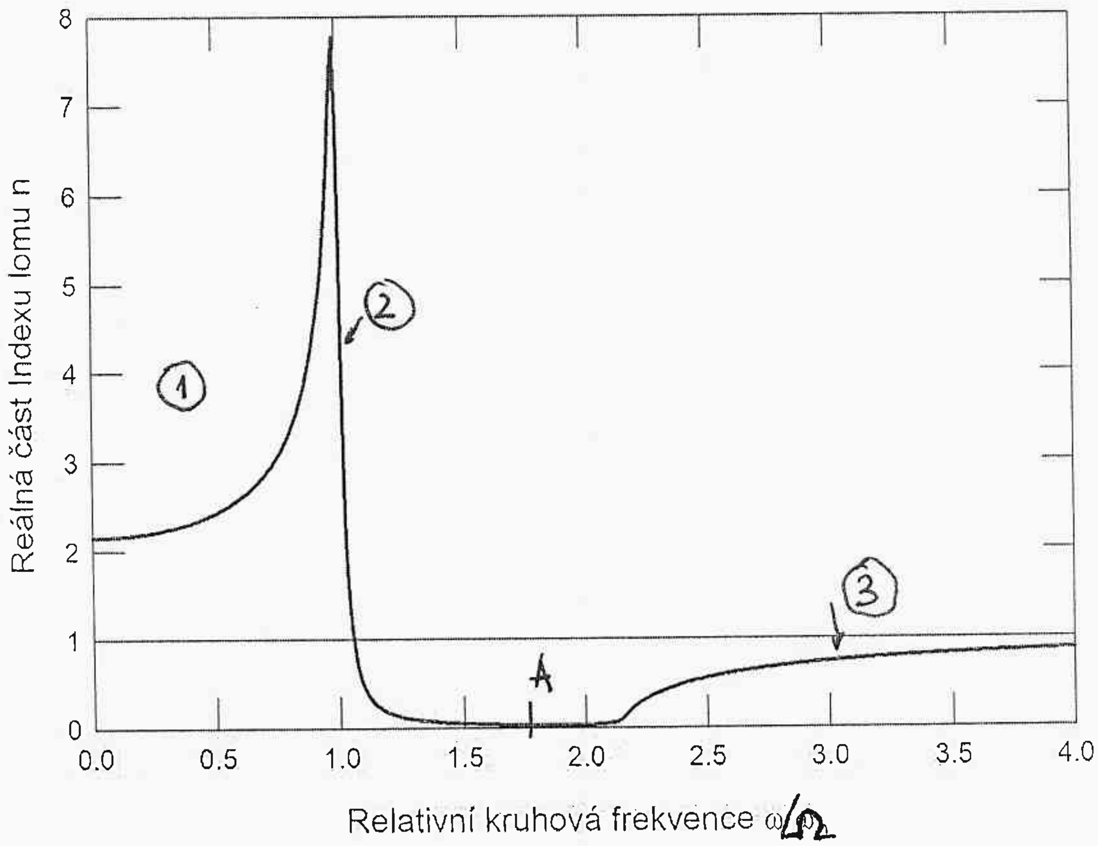
$$= \left[n(\omega_0) + \frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega_0} (\omega_0 + d\omega - \omega_0) \right] \frac{(\omega_0 + d\omega)}{c} - n(\omega_0) \cdot \frac{\omega}{c} =$$

$$= \frac{n(\omega_0)\omega_0}{c} + \frac{n(\omega_0)\, d\omega}{c} + \frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega_0} \frac{\omega_0\, d\omega}{c} + \frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega_0} \frac{(d\omega)^2}{c} - n(\omega_0) \frac{\omega}{c} =$$

$$\approx \frac{n(\omega_0) \cdot d\omega}{c} + \frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega_0} \omega_0 \cdot \frac{d\omega}{c} = \left[n(\omega_0) + \frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega_0} \omega_0 \right] \cdot \frac{d\omega}{c} =$$

$$= dk \quad \Rightarrow \quad \frac{d\omega}{dk} = v_g = \frac{c}{n(\omega_0) + \frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega_0} \cdot \omega_0}$$

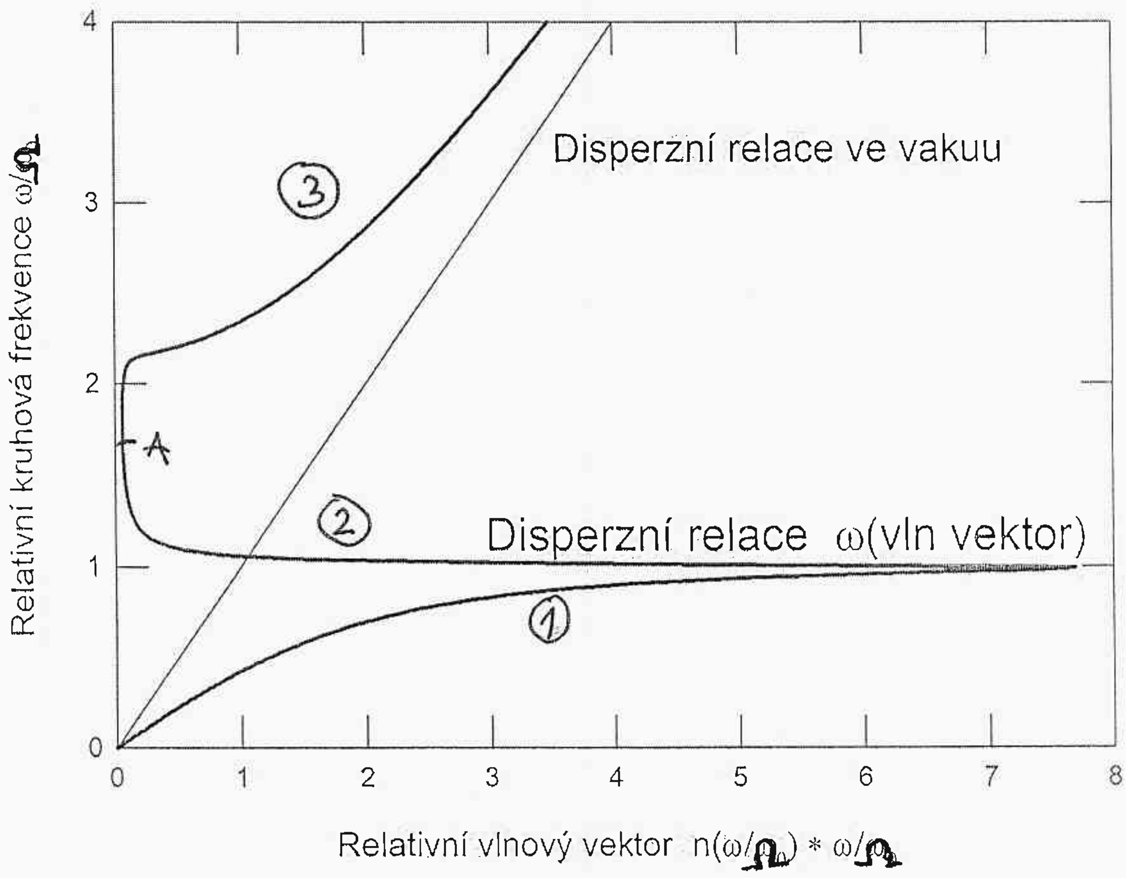
Konkrétní frekvenční závislost n jsme odvozovali v Lorentzově modelu (případ 1 oscilátoru s rez. frekvencí Ω.



A .. hranice mezi 2 a 3 .. Oblastmi anomální a normální disperze

V oblasti ① je $\omega < \Omega$ (typický situace šíření viditelného světla v dielektriku) je $\frac{dn}{d\omega} > 0$ – oblast normální disperze. Oblast ② … $\omega > \Omega$, $\frac{dn}{d\omega} < 0$ … oblast anomální disperze. V oblasti ③ je opět $\frac{dn}{d\omega} > 0$ … normální disperze. Po výpočtu

$k(\omega) = n(\omega) \cdot \frac{\omega}{c}$ dostáváme disperzní závislost



Oblast ① $\frac{dn}{d\omega} > 0$ $v_g = \frac{c}{n + \frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega_0}\omega_0}$ $v_p = \frac{c}{n(\omega_0)}$

Normální disperze

$v_g > 0$, $v_g < v_p$

Oblast ③ $\frac{dn}{d\omega} > 0$, $v_g > 0$, $v_g < v_p$

Oblast ② ... oblast anomální disperze

zde $\frac{dn}{d\omega} < 0$ $v_g = \dfrac{c}{n + \frac{dn}{d\omega}\Big|_{\omega_0} \omega_0} < v_p$

Podle konkrétního průběhu, tj. vzájemné velikosti n a $\frac{dn}{d\omega}$ může být v_g ∞ nebo záporná!