

Lineární algebra pro fyziky  
*Požadavky k zápočtu a zkoušce LS 2017/18*

1. POČETNÍ POSTUPY

- Nalezení polární báze symetrické bilineární a hermitovské seskvilineární formy, zjištění, zda je forma skalární součin, nalezení ortogonálního doplňku množiny vektorů, určení vzdálenosti a úhlu vektorů, výpočet ortogonální projekce vektoru na podprostor, GS ortogonalizace, určení Fourierových koeficientů, QR rozklad matice.
- Ortogonální diagonalizace normálního operátoru a matice, spektrální rozklad operátoru, aproximativní řešení soustavy rovnic s nejmenší normou, nalezení singulárního rozkladu matice, polárního rozkladu matice, Moore-Penroseovy pseudoinverze matice.
- Rozložení bilineární formy na symetrickou a antisymetrickou část, určení matice kvadratické formy, nalezení její polární báze a ortonormální polární báze, určení signatury kvadratické formy, symetrické matice, samosdruženého operátoru. Určení signatury pomocí Sylvestrovho kritéria, nalezení prvku nulové množiny. Určení souřadnic v afinním prostoru, transformace těchto souřadnic, převedení regulární kvadriky do kanonického tvaru, určení typu regulární kvadriky.
- Určení Jordanova tvaru, nalezení Jordanovy báze matice a endomorfismu, určení mocniny a exponenciály matice, řešení homogenní soustavy lineárních rovnic prvního i vyšších řádů s konstantními koeficienty.
- Určení jádra a souřadnic lineární formy, nalezení duální báze, určení souřadnic bilineární formy, kovektoru a dalších tenzorů, transformace těchto souřadnic. Zdvih a spuštění indexu, výpočet kontrakce tenzoru.

2. TEORETICKÉ ZNALOSTI

- Skalární součin na reálném a komplexním vektorovém prostoru, bilineární a seskvilineární forma, polarizační identita, polární báze, věta o její existenci. Ortogonální a ortonormální báze, kolmost vektorů, ortogonální doplněk množiny vektorů a jeho vlastnosti, norma, vzdálenost a úhel vektorů. Ortogonální projekce a její vlastnosti, Schwarzova a trojúhelníková nerovnost, věta o GS ortogonalizaci, Parsevalova rovnost pro normu a pro skalární součin, QR rozklad, unitární matice a jejich vlastnosti.
- Adjungovaný operátor a jeho vlastnosti, samosdružený, unitární a normální operátor, doplnění ortonormální množiny na ortonormální bázi, Schurova reprezentace operátoru, ortogonální diagonalizace normálního operátoru, spektrální rozklad, spektrum samosdruženého operátoru a hermitovské matice, charakterizace unitárního operátoru. Gramova matice a její vlastnosti, aproximativní řešení přeurtčené soustavy rovnic, řešení podurtčené soustavy s nejmenší normou, definice Moore-Penroseovy pseudoinverze a její výpočet, modul a singulární hodnoty operátoru, singulární rozklad, polární rozklad, věta o vztahu aproximativního řešení a singulárního rozkladu.
- Symetrická a antisymetrická část bilineární formy, kvadratická forma, její matice, vztah k příslušné bilineární formě. Signatura, Sylvesterův zákon setrvačnosti, Sylvesterovo kritérium, ortogonální a neortogonální diagonalizace kvadratické formy. Nulová množina kvadratické formy. Afinní a aritmetický afinní prostor, body a vektory, afinní zobrazení, vzdálenost bodů, soustava souřadnic a transformace souřadnic. Klasifikace regulárních kuželoseček a kvadrik. Gaussův integrál.
- Jordanova báze, Jordanův tvar, binomická věta, mocnina Jordanovy buňky, invariantní podprostory a jejich vlastnosti, nerovnost mezi algebraickou a geometrickou násobností, existence a jednoznačnost Jordanova tvaru, zobecněný vlastní podprostor a jeho vlastnosti. Limita posloupnosti matic, exponenciála matice, její konvergence a vlastnosti, řešení homogenní a nehomogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty. Cayley-Hamiltonova věta. Současná diagonalizovatelnost, Geršgorinovy kruhy.
- Lineární formy, duální prostor, duální báze, tenzorová notace, tenzorový součin, multilineární forma, její souřadnice a jejich transformace, druhý duál a kanonický izomorfismus, multivektory, smíšené tenzory, jejich souřadnice a transformační vlastnosti, kovariantní a kontravariantní tenzory a indexy, kontragredientní matice, vztah mezi tenzory typu  $(1, 1)$  a endomorfismy. Spuštění a zdvižení indexu, metrický a duální metrický tenzor, úplně symetrický a úplně antisymetrický tenzor, symetrizace a antisymetrizace, kontrakce tenzoru.