Základní úloha 1. Uvažujme $S = ([2,3],((3,1),(2,1)))$ a $S' = ([1,1],((0,1),(-1,2))$ dvě soustavy souřadnic v afinním prostoru A_2 a bod $a = [2,1] \in A_2$. Určete $[a]_S$, $[a]_{S'}$ a obecné vyjádření vektoru $[b]_S$ pomocí $[b]_{S'}$ pro libovolné $b \in A_2$.

Řešení. Vyjádření bodu a v soustavě souřadnic S vlastně znamená řešit

$$a = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$$

což dává souřadnice $x_1 = 4, x_2 = -6$ neboli $[a]_S = [4,-6]^T$. Obdobně pro soustavu souřadnic S' řešíme

$$a = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + y_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

vychází $[a]_{S'} = [2,-1]^T$.

Pro libovolný bod, jehož souřadnice vůči soustavě souřadnic S' s bází B' jsou $[b]_{S'} = [b_1,b_2]^T$, chceme zjistit souřadnice $[b]_S = [c_1,c_2]^T$, splňující

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + c_1\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + b_2\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

To vede k soustavě

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = [p'-p]^B + [\mathrm{Id}]^S_{S'}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

kde $[p'-p]^B$ je vektor získaný z odečtení počátků souřadnicových systémů, přičemž pouhé odečtení dává sic vektor $(-1,-2)^T$ ovšem v kanonické bázi nikoli v bázi B (příslušné k souřadnicovému systému S). Využijeme matice přechodu $[\mathrm{Id}]^B_K = \begin{pmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{pmatrix}$ a určíme $[p'-p]^B = (3,-5)^T$. Pro zjištění matice přechodu $[\mathrm{Id}]^S_{B'}$ tak již stačí pouze určit matici přechodu $[\mathrm{Id}]^K_{B'} = \begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}$, což celkově dává výsledné vyjádření

$$[b]_S = \begin{pmatrix}1\\c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0^T\\ [p'-p]^B & [\mathrm{Id}]^B_K\cdot[\mathrm{Id}]^K_{B'}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b_1\\b_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\3 & -2 & -5\\-5 & 3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

□

Základní úloha 2. Ukažte, že kvadrika $3x^2+2xy+3y^2-10x-14y+7=0$ na A_2 je elipsa a určete její střed, směr os a délku poloos.

Řešení. Nejprve si zadanou kvadriku zapíšeme maticově jako

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\tilde{A}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & -5 & -7\\-5 & 3 & 1\\-7 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = 0$$

kde matice $\tilde{A}$ má odpovídající blokovou strukturu $\tilde{A} = \begin{pmatrix}c & b^T\\b & A\end{pmatrix}$. Pro zjištění, zda se jedná o elipsu, potřebujeme nejprve zjistit, jaká je signatura A a znaménko poměru determinantů $\tilde{A}$ a A. Determinanty podmatic A jsou po řadě 3 a 8. Signatura je tak dle Jacobi-Sylvesterovy věty (2,0,0). Jelikož je $\det\tilde{A} = -80$, je $\dfrac{\det\tilde{A}}{\det A} = \dfrac{-80}{8} < 0$ a jedná se tedy o elipsu (neboť jsme v A_2).

Střed elipsy je v bodě

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -A^{-1}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Směr poloos odpovídá vlastním vektorům matice A, kterážto má vlastní čísla $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ a k nim příslušné vlastní vektory $v_1 = (1, -1)^T, v_2 = (1, 1)^T$. Délky poloos d_1, d_2 jsou určeny jako

$$d_i = \sqrt{\left| \frac{c - b^T A^{-1} b}{\lambda_i} \right|}$$

neboli $d_1 = \sqrt{6}, d_2 = \sqrt{3}$. Stejné výsledky je možné získat i převodem rovnice kvadriky do kanonického tvaru, tj. nejprve substitucí $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, kde U je matice přechodu do báze z vlastních vektorů matice A, a následně doplňováním na čtverec. □

Základní úloha 3. Určete pomocí signatury a determinantu typ kuželosečky $4x^2 + 2y^2 + 6xy + 2x + 2y + 3 = 0$ na A_2.

Řešení. Postupujeme obdobně jako v předešlé úloze neboli

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinanty podmatic A jsou 4, -1, dávajíc signaturu $(1, 1, 0)$. Jelikož $\frac{\det\tilde{A}}{\det A} = \frac{-3}{-1} > 0$ jedná se o hyperboloid v A_2, neboli hyperbolu. □

Hodnocená úloha. Určete typ kvadriky $-x^2 + 4xz + y^2 + 4yz - 14x + 6y - 14z + 14 = 0$ na A_3