Základní úloha 1. Najděte Jordanův tvar a nějakou Jordanovu bázi matice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Můžete použít jako fakt, že jediné vlastní číslo A je -1. Určete hodnotu A^n pro $n \in \mathbb{N}$.

Jaké jsou všechny možné Jordanovy tvary pro matice 3×3, jejichž jediné vlastní číslo je -1? A pro 4×4 matice s touto vlastností? Jak se dá s co nejméně výpočty zjistit, který Jordanův tvar konkrétní 4×4 matici přísluší?

Řešení. Pro nalezení Jordanova tvaru matice je třeba najít Jordanovy řetízky. Prvními vektory Jordanových řetízků jsou vlastní vektory matice. Jelikož ze zadání známe (jediné) vlastní číslo matice A, hledáním jádra matice $A_{-1} := A + E$ získáme vlastní podprostor příslušející vlastnímu číslu -1. Lehce se můžeme přesvědčit, že se jedná o prostor $V_{-1} = \mathrm{LO}\{(-1,-2,1)^{\mathrm{T}}\}$. Dimenze takového prostoru je 1, kdežto algebraická násobnost vlastního čísla je 3. Matice tedy, dle očekávání, není diagonalizovatelná. To zároveň také znamená, že budeme mít pouze jeden Jordanův řetízek. Vyberme si libovolný vektor v_1 z prostoru V_{-1}, třeba $(-1,-2,1)^T$ a najděme jeho maximální Jordanův řetízek. V pořadí druhý vektor Jordanova řetízku, označme jej v_2, splňuje rovnici $A_{-1}v_2 = v_1$. Řešením této nehomogenní soustavy lineárních rovnic je například vektor $v_2 := (0,-1,0)^T$. Podobně spočteme třetí vektor Jordanova řetízku, v_3. Řešením rovnice $A_{-1}v_3 = v_2$ je například vektor $v_3 := (-1,-1,0)^T$. Pokud bychom chtěli počítat další člen Jordanova řetízku, brzy bychom shledali, že rovnice $A_{-1}v_4 = v_3$ nemá žádné řešení. To je ale v souladu s naším očekáváním i Jordanovou větou.

Jelikož existuje jediný Jordanovský řetízek, bude matice v Jordanově tvaru obsahovat jedinou Jordanovu buňku $J := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Báze, v níž bude mít zobrazení tvar této Jordanovy buňky, tzv. Jordanova báze, je potom uspořádaná trojice $B := \{v_1, v_2, v_3\}$.

Díky znalosti Jordanovy báze a Jordanova tvaru matice lze poměrně snadno dopočítat libovolná mocnina původní matice. Jak bychom očekávali, opět platí $A^n = [\mathrm{Id}]^K_B J^n [\mathrm{Id}]^B_K$, kde K je označení pro kanonickou bázi. Použijeme-li vzorec pro obecnou mocninu $n > 1$ Jordanovy buňky na náš případ, dostaneme

$$J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & \frac{n^2-n}{2}(-1)^{n-2} \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

A nyní nás čeká už jenom dosazení a roznásobení. Hurá na to.

$$A^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} & \frac{n^2-n}{2}(-1)^{n-2} \\ 0 & (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1},$$

neboli

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1)^n(n^2+n+2) & (-1)^{(n+1)}n & \frac{1}{2}(-1)^n(n-3)n \\ (-1)^n n^2 & (-1)^n(1-2n) & (-1)^n(n-4)n \\ -\frac{1}{2}(-1)^n n(n+1) & (-1)^n n & -\frac{1}{2}(-1)^n((n-3)n-2) \end{pmatrix}.$$

V případě, že pracujeme s maticemi 3×3, rozhoduje o konkrétním Jordanově tvaru (až na permutace jednotlivých Jordanových buněk) výlučně geometrická násobnost vlastního čísla. V pořadí uveďme Jordanovy tvary matic, které mají geometrickou násobnost vlastního čísla jedna, resp. dva, resp. tři:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Všimněme si, že jakmile je geometrická násobnost tři (tedy stejná jako algebraická), matice je diagonální. Jordanovu teorii lze tedy chápat jako zobecnění teorie o diagonalizaci matic. Závěrem k této otázce je odpovědět, pro matice 3×3 s jediným vlastním číslem existují právě tři tvary Jordanových matic, pokud ztotožníme různé permutace jednotlivých Jordanových buněk.

Velmi podobně tomu je v případě matic 4×4, musíme si jen uvědomit, že geometrická násobnost 2 může vést na řetízky o délkách 3, 1, nebo řetízky o délkách 2, 2. Celkem je tedy různých Jordanových tvarů (modulo permutace) pět. Matice mohou vypadat třeba takto:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

přičemž druhá matice odpovídá délce řetízků $3, 1$ a třetí délce $2, 2$. Jednoduchý způsob hledání Jordanova tvaru matice typu 4×4 s (jediným) vlastním číslem -1 je najít hodnost matice $A + E$, jelikož právě hodnost takové matice určuje počet Jordanových buněk. Pokud by vyšla hodnost 2, určili bychom následně hodnost $(A+E)^2$, čímž bychom získali informaci o počtu Jordanových buněk o velikosti alespoň 2×2. Podrobnější komentář naleznete u řešení třetího příkladu. □

Základní úloha 2. Určete Jordanův tvar a nějakou Jordanovu bázi pro matici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Můžete použít jako fakt, že A má vlastní číslo 1 s algebraickou násobností 3 a vlastní číslo -1 s algebraickou násobností 1. Kolik je všech možných Jordanových tvarů 4×4 matic se spektrem $\{1, -1\}$?

Řešení. Vlastní podprostor matice A příslušející vlastnímu číslu 1 je $V_1 := \mathrm{LO}\{(1,1,1,0)^{\mathrm{T}}\}$, vlastní podprostor příslušející vlastnímu číslu -1 je $V_{-1} := \mathrm{LO}\{(0,1,1,1)^{\mathrm{T}}\}$. Analogicky předešlému příkladu se nyní pokusíme najít maximální Jordanův řetízek příslušející vlastnímu vektoru $v_1 := (1,1,1,0)^T$, druhý Jordanův řetízek bude díky algebraické násobnosti 1 (víme ze zadání) obsahovat pouze jediný vektor, například $w_1 := (0,1,1,1)^T$. Řešením soustavy $A_1 v_2 = v_1$ získáme druhý prvek řetízku $v_2 := (1,1,0,1)^T$. Pokud budeme hledat třetí prvek tohoto Jordanova řetízku, v_3, zjistíme, že tímto vektorem může být třeba $v_3 := (2,1,1,0)^T$. Jelikož je rozměr matice A čtyři, ihned vidíme, že tímto Jordanův řetízek skončil.

Příslušná matice v Jordanově tvaru je tedy $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, což odpovídá transformaci zobrazení do Jordanovy báze $B := \{v_1, v_2, v_3, w_1\}$.

Počet všech různých Jordanových tvarů 4×4 matic se spektrem $\{1, -1\}$ určíme obdobnou úvahou, jako v předchozí úloze. Mohou nastat tři případy - buďto je geometrická násobnost vlastního čísla jedna, dva nebo tři. Pokud je geometrická násobnost jednoho vlastního čísla tři, je geometrická násobnost druhého vlastního čísla jedna. Jak jsme se dozvěděli z předchozího, pro takové případy existují právě tři různé Jordanovy matice. Pokud je geometrická násobnost dva, můžeme mít pro každé vlastní číslo jeden řetízek délky dva, nebo dva řetízky délky jedna. To jsou čtyři možnosti. Celkový počet různých Jordanových tvarů matic 4×4 matic se spektrem $\{1, -1\}$ je tedy $3+4+3 = 10$. □

Základní úloha 3. Nechť A je matice 20×20, jejíž jediným vlastním číslem je 0. Nechť pro ni platí $\mathrm{rank}(A) = 15$, $\mathrm{rank}(A^2) = 11$, $\mathrm{rank}(A^3) = 8$, $\mathrm{rank}(A^4) = 5$, $\mathrm{rank}(A^5) = 2$, $\mathrm{rank}(A^6) = 1$, $\mathrm{rank}(A^7) = 0$. Určete její Jordanův tvar.

Řešení. V této úloze je klíčové pochopit, jak se mění hodnost nilpotentní matice při jejím umocňování. V obecném případě je nilpotentní každá Jordanova buňka $J_{\lambda,n}$ matice $A - \lambda \mathrm{E}$. Z obecného vzorce pro umocňování Jordanovy buňky plyne, že $\mathrm{rank}(J^k_{\lambda,n}) = n - k$ kdykoliv $k \leq n$. Jelikož jediné vlastní číslo matice A je 0, bude rozdíl $\mathrm{rank}(A^k) - \mathrm{rank}(A^{k+1})$ odpovídat počtu Jordanových buněk s rozměrem alespoň $k+1$. Z toho potom odvodíme vzorec, že počet buněk s rozměrem $k+1$ je roven $\mathrm{rank}(A^k) - 2\,\mathrm{rank}(A^{k+1}) + \mathrm{rank}(A^{k+2})$, kde $A^0 = \mathrm{E}$. Naše konkrétní Jordanova matice je tedy $\mathrm{diag}(J_{0,1}, J_{0,2}, J_{0,5}, J_{0,5}, J_{0,7})$. □

Hodnocená úloha. Nechť A je matice 20×20, jejíž spektrum je $\{-3, 1, 6\}$ a pro hodnosti platí $\mathrm{rank}(A - E) = \mathrm{rank}((A-E)^2) = 18$, $\mathrm{rank}(A - 6E) = 18$, $\mathrm{rank}((A-6E)^2) = 16$, $\mathrm{rank}((A-6E)^3) = 14$, $\mathrm{rank}((A-6E)^4) = \mathrm{rank}((A-6E)^5) = 13$, $\mathrm{rank}((A+3E)) = 16$, $\mathrm{rank}((A+3E)^2 = 12$, $\mathrm{rank}((A+3E)^3 = 11$, $\mathrm{rank}((A+3E)^4 = 10$, $\mathrm{rank}((A+3E)^5 = \mathrm{rank}((A+3E)^6 = 9$. Určete její Jordanův tvar.