Základní úloha 1. V $(\mathbb{R}^2)^*$ označme $K^* = (\varepsilon^1, \varepsilon^2)$ duální kanonickou bázi, jejíž prvky jsou definovány $\varepsilon^1\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x$, $\varepsilon^2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = y$. Nechť dále $B = (e_1 := (1,2)^T, e_2 := (1,3)^T)$, $\alpha = \varepsilon^1 - 2\varepsilon^2$.

1. Určete $\operatorname{Ker}\alpha$, $\operatorname{Im}\alpha$, $[\alpha]_K$, $[\alpha]_B$
2. Vyjádřete duální bázi B^* ve tvaru $(a\varepsilon^1 + b\varepsilon^2, c\varepsilon^1 + d\varepsilon^2)$ pro nějaká $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
3. Určete matici přechodu $[\mathrm{Id}]^{K^*}_{B^*}$. Popište její vztah s maticí $[\mathrm{Id}]^K_B$ a vyjádřete pomocí některé z těchto matic vztah mezi $[\alpha]_K$ a $[\alpha]_B$.

Řešení. Při raném studiu tenzorů se bude hodit jasné rozlišení mezi vektory a jejich souřadnicemi, proto bude lepší následující příklad formulovat v řeči obecného vektorového prostoru, leč zadání pracuje s aritmetickým. Pro kanonickou bázi užijeme označení $K = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ a informace v zadání interpretujeme následně takto

$$\varepsilon^1(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2) = x\varepsilon^1(\varepsilon_1) + y\varepsilon^1(\varepsilon_2) = x,$$
$$\varepsilon^2(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2) = x\varepsilon^2(\varepsilon_1) + y\varepsilon^2(\varepsilon_2) = y,$$

coby přímý důsledek linearity funkcionálu ε^i (první rovnost) a definiční vlastnosti duální báze K^* k bázi K, tedy formule $\varepsilon^i(\varepsilon_j) = \delta^i_j$, kde $\delta^i_j = 1$ pokud $i = j$, $\delta^i_j = 0$ pokud $i \neq j$ (druhá rovnost).[1]

Pro souřadnice prvků báze B lze potom psát $[e_1]_K = (1,2)^T, [e_2]_K = (1,3)^T$, tedy pro prvky samotné $e_1 = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2, e_2 = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$.

1. Prvním úkolem je určit jádro lineárního funkcionálu $\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Hledáme tedy prvky ve tvaru $x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2$ takové, aby $\alpha(x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2) = 0$. Opět z linearity funkcionálu $x\alpha(\varepsilon_1) + y\alpha(\varepsilon_2) = 0$, neboli $x(\varepsilon^1 - 2\varepsilon^2)(\varepsilon_1) + y(\varepsilon^1 - 2\varepsilon^2)(\varepsilon_2) = 0$. V dalším kroku musíme použít definiční vztahy pro sčítání a násobení z tělesa na duálním vektorovém prostoru, tedy vztahy $(\alpha + \beta)(v) := \alpha(v) + \beta(v)$ a také $(c\alpha)(v) := c\alpha(v)$, kde $v \in V$, $\alpha, \beta \in V^*$, $c \in \mathbb{T}$. Z toho rovnou získáme rovnost $x\varepsilon^1(\varepsilon_1) - 2x\varepsilon^2(\varepsilon_1) + y\varepsilon^1(\varepsilon_2) - 2y\varepsilon^2(\varepsilon_2) = 0$, neboli $x - 2y = 0$. To nám říká, že $[\ker\alpha]_K = \mathrm{LO}\{(2,1)^T\}$.

   Pro výpočet $\operatorname{Im}\alpha$ použijeme výsledky předešlého odstavce, ze kterých přímočaře získáme $\operatorname{Im}\alpha = \{x - 2y \,|\, x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

   Souřadnice α vůči bázi K^* jsou ihned vidět díky samotné definici prvku α, tedy $[\alpha]_K = (1, -2)$.[2] Využíváme vlastně tvrzení $[\ker\alpha]_K = \ker[\alpha]_K$ ze ZS. Souřadnice určíme podle definice: $[\alpha]_B = (\alpha(e_1), \alpha(e_2)) = (-3, -5)$.

2. Z podmínky na duální bázi získáme sadu rovnic pro koeficienty lineární kombinace

$$(a\varepsilon^1 + b\varepsilon^2)(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) = 1,$$
$$(a\varepsilon^1 + b\varepsilon^2)(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2) = 0,$$
$$(c\varepsilon^1 + d\varepsilon^2)(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2) = 0,$$
$$(c\varepsilon^1 + d\varepsilon^2)(\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2) = 1.$$

[1] Pozor, tato definiční vlastnost prvků duální báze se nevztahuje jen na případ kanonické báze, ale na obecný případ!

[2] Prvek α dozajista leží v prostoru $(\mathbb{R}^2)^*$, takže bychom očekávali spíše zápis $[\alpha]^{K^*}$ nežli $[\alpha]_K$. Ale díky tomu, že pro každou bázi existuje právě jedna její duální báze, nemůže tato konvence vést k nejednoznačnostem. Občas pro zdůraznění báze budeme ještě psát $[\alpha]^{K^*}$, musíme mít ale na paměti, že $[\alpha]^{K^*} \equiv [\alpha]_K$.

Stojí jen chvíli zamyšlení, že výše uvedená soustava je ekvivalentní maticové rovnici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Nalezením inverzní matice dostáváme hledané koeficienty lineární kombinace, neboli souřadnice vektorů báze $B^* = (e^1, e^2)$ vůči bázi K^*, konkrétně $[\mathrm{Id}]^{K^*}_{B^*} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, tedy pro souřadnice $[e^1]_K = (3, -1)$ a $[e^2]_K = (-2, 1)$. Nyní již snadno zkontrolujeme, že i podle tohoto postupu docházíme k výsledku $[\alpha]_B = (-3, -5)$, jelikož skutečně $-3(3\varepsilon^1 - \varepsilon^2) - 5(-2\varepsilon^1 + \varepsilon^2) = \varepsilon^1 - 2\varepsilon^2 = \alpha$. Analogicky předešlému si můžeme všimnout, souřadnice bázových vektorů báze B vůči bázi K jsou sloupce matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, která je tím pádem rovna matici přechodu $[\mathrm{Id}]^K_B$. Celkově tedy lze psát $([\mathrm{Id}]^{K^*}_{B^*})^T [\mathrm{Id}]^K_B = E$, neboli $([\mathrm{Id}]^{K^*}_{B^*})^T = ([\mathrm{Id}]^K_B)^{-1} = [\mathrm{Id}]^B_K$.

Jak víme ze zimního semestru, souřadnice formy α (coby prvku jistého vektorového prostoru) vůči bázi B^* si můžeme vyjádřit pomocí souřadnic formy α vůči bázi K^* a matice přechodu $[\mathrm{Id}]^{B^*}_{K^*}$, což dává $[\mathrm{Id}]^{B^*}_{K^*}[\alpha]^{K^*} = [\alpha]^{B^*}$, nebo ekvivalentně $[\alpha]_K[\mathrm{Id}]^K_B = [\alpha]_B$. Číselný výsledek je

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

□

Základní úloha 2. Nechť α, B jsou jako v předchozí úloze a $\beta = \varepsilon^2 \in (\mathbb{R}^2)^*$, $g = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha$.

1. Ověřte, že g je symetrická bilineární forma.

2. Určete matice $[g]_K$ a $[g]_B$ a ověřte, že splňují správný transformační vztah.

3. Určete souřadnice $[T]_K$ trilineární formy $T = g \otimes \beta$. Kolik souřadnic bude mít kvadrilineární forma $S = g \otimes g$?

Řešení. 1. Protože $(\alpha \otimes \beta)(u, v) = \alpha(u)\beta(v)$ závisí lineárně na u i na v, je g bilineární forma. Platí $g(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) + \alpha(v_2)\beta(v_1) = g(v_2, v_1)$, tedy je i symetrická.

2. Jelikož jsme už porozuměli technologii, jakou lze efektivně počítat souřadnice lineárních forem, budeme schopni vcelku rychle odhalovat transformační vlastnosti souřadnic multilineárních forem při změně báze. Pro jednotlivé souřadnicové složky tenzoru g vůči bázi B se obdobně ukáže $([g]_B)_{ij} = g(e_i, e_j)$, což s využitím transformační formule pro bázové vektory $\sum_i \varepsilon_i([\mathrm{Id}]^K_B)^i_j = e_j$ (tato rovnost je jen jinak zapsaný rozvoj (bázového) vektoru do (obecně jiné) báze, tj. $\sum_i \varepsilon_i([e_j]^K)^i = e_j$) poskytne kýženou transformační formuli $([g]_B)_{ij} = g(e_i, e_j) = g(\sum_k \varepsilon_k([\mathrm{Id}]^K_B)^k_i, \sum_l \varepsilon_l([\mathrm{Id}]^K_B)^l_j) = \sum_{k,l}([\mathrm{Id}]^K_B)^k_i g(\varepsilon_k, \varepsilon_l)([\mathrm{Id}]^K_B)^l_j = \sum_{k,l}([\mathrm{Id}]^K_B)^k_i([g]_K)_{kl}([\mathrm{Id}]^K_B)^l_j$, neboli maticově $[g]_B = ([\mathrm{Id}]^K_B)^T[g]_K([\mathrm{Id}]^K_B)$ (v indexové notaci odpovídá první/horní index řádkovému indexu v maticové notaci)

   Pokud napočítáme souřadnice bilineární formy vůči bázím K a B dostaneme matice $[g]_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $[g]_B = \begin{pmatrix} -12 & -19 \\ -19 & -30 \end{pmatrix}$. Pro ně můžeme otestovat platnost transformační formule

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -19 \\ -19 & -30 \end{pmatrix}.$$

3. Souřadnice trilineární formy se již určí na základě výše uvedených postupů velmi přímočaře. Rozmyslete si, že pro naši formu T jsou souřadnice vůči kanonické bázi rovny $([T]_K)_{ijk} = ([g]_K)_{ij}\delta^2_k$.

Počet souřadnic kvadrilineární formy $g \otimes g$ stanovíme z toho, kolika různými možnostmi můžeme vybrat uspořádanou čtveřici bázových vektorů, když vybíráme z dvouprvkové množiny (odborníky nazývaná variace s opakováním). Jak už každý ví, takových možností je $2^4 = 16$.

$\square$

Základní úloha 3. Nechť $u = (1,1)^T$, $v = (1,-2)^T$, B je jako výše. Určete souřadnice bivektoru $u \otimes v$ vzhledem ke K a z nich pak transformační formulí jeho souřadnice $[u \otimes v]_B$.

Řešení. Zadání tohoto příkladu nevyžaduje úsilí naučit se nové praktiky, proto jen stručně shrneme, k čemu bychom se měli dopočítat.

Ze zadání víme, že $[u]^K = (1,1)^T, [v]^K = (1,-2)^T$. Souřadnice tenzorového součinu $u \otimes v$ vůči bázi K stanovíme opět z formulky $([u]^K)_i([v]^K)_j = ([u \otimes v]_K)_{ij}$, v maticové podobě tedy máme $[u \otimes v]_K = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Z transformační formulky $[u \otimes v]_B = [\mathrm{Id}]^B_K [u \otimes v]_K ([\mathrm{Id}]^B_K)^T$ (pozor, transformační vztah je jiný kvůli tomu, že transformace báze a její duální báze jsou dány vzájemně kontragredientními maticemi), tedy

$$[u \otimes v]_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -8 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Hodnocená úloha 1. Nechť u, v jsou jako v předchozí úloze, $w = (-1,3)^T$. Určete souřadnice trivektoru $S = u \otimes v \otimes w$ vzhledem ke K. Označíme-li $[S]_B = (S'^{ijk})$, určete S'^{212} pomocí transformační formule.