Základní úloha 1. Ze všech bodů, které leží na průsečnici rovin $x+y+z=1$ a $-x-y+z=0$, najděte ten, který je nejblíže počátku. Řešte jednak přímo, jednak jako řešení podurčené soustavy rovnic s minimální normou, a porovnejte výsledky.

Řešení 1. Průsečnice zadaných rovin se parametricky vyjádří jako $(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})^T+t(-1,1,0^T)$, $t\in\mathbb{R}$. Hledáme na ní vektor s nejmenší normou. Na to nám stačí minimalizovat druhou mocninu normy, t.j. funkci $2t^2-t+\frac{1}{4}$. Ta má minimum v bodě $t=\frac{1}{4}$, t.j. bod nejblíže počátku je $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})^T$.

Teď budeme hledat řešení podurčené soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x+y+z&=1\\ -x-y+z&=0 \end{aligned}$$

s minimální normou. Máme

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&1\end{pmatrix},\quad AA^+=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

tedy

$$x_0=A^+(AA^+)^{-1}b=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})^T.$$

Základní úloha 2. Ukažte, že matice $\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}$ není diagonalizovatelná, a proveďte její singulární a polární rozklad.

Řešení 2. Matice $\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}$ má jediné vlastní číslo $\lambda=2$, jehož algebraická násobnost je 2 a geometrická násobnost je 1.

Matice $A^+A=\begin{pmatrix}4&6\\6&13\end{pmatrix}$ má vlastní čísla $\lambda_1=16$ a $\lambda_2=1$, t.j. $\sigma_1=4$ a $\sigma_2=1$.

Normovaný vlastní vektor s vlastním číslem 16 je např. $v_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)^T$, z čehož $u_1=\frac{1}{\sigma_1}Av_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)^T$. Podobně pro vlastní číslo 1 dostaneme $v_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1)^T$ a $u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)^T$. Singulární rozklad je tedy

$$A=U\Sigma V^+=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}$$

a polární rozklad

$$A=(UV^+)(V\Sigma V^+)=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&3\\-3&4\end{pmatrix}\frac{1}{5}\begin{pmatrix}8&6\\6&17\end{pmatrix}.$$

Základní úloha 3. Určete pseudoinverzní matice k maticím $A=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ a $C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$.

Řešení 3. Matice $A=\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}$ má LN řádky, proto $A^\dagger=A^+(AA^+)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Matice $A=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ má LN sloupce, proto $A^\dagger=(A^+A)^{-1}A^+=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}$.

Pro matici $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$ uděláme singulární rozklad. Matice $A^+A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ má vlastní čísla $\lambda_1=2$ a $\lambda_2=0$. Pro λ_1 dostaneme

$$\sigma_1=\sqrt{2},\quad v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T,\quad u_1=(1,0)^T.$$

Vektor v_1 doplníme na ON bázi pomocí $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^T$, podobně $u_2=(0,1)^T$. Takže pro

$$A=U\Sigma V^+=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

dostaneme

$$A^\dagger=V\Sigma^\dagger U^+=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}.$$