Základní úloha 1. Spočtěte $\exp\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$ nejprve přímým dosazením a poté diagonalizací.

Řešení. Začneme přímým dosazením. Pro matici $A=\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$ snadno dostaneme $A^{4k}=E$, $A^{4k+1}=A$, $A^{4k+2}=-E$, $A^{4k+3}=-A$, $k\in\mathbb{Z}$. Po dosazení do vzorce $\exp(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ zjistíme, že matice

$$\begin{aligned}\exp(A)&=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}}{(2k)!} & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k+1}}{(2k+1)!} & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^{2k}}{(2k)!}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\cosh(i) & \sinh(i)\\ \sinh(i) & \cosh(i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(1) & i\sin(1)\\ i\sin(1) & \cos(1)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Teď to samé spočteme pomocí diagonalizace. Snadno zjistíme, že matice A má 2 různá vlastní čísla, a to $\lambda_1=i$ a $\lambda_2=-i$. Matice A je tedy diagonalizovatelná. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_1 je např. $v_1=(1,1)^T$, vlastní vektor pro λ_2 je např. $v_2=(1,-1)^T$. Máme tedy

$$A=BJ_AB^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Pak

$$\begin{aligned}\exp(A)=B\exp(J_A)B^{-1}&=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^i & 0\\ 0 & e^{-i}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^i+e^{-i} & e^i-e^{-i}\\ e^i-e^{-i} & e^i+e^{-i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(1) & i\sin(1)\\ i\sin(1) & \cos(1)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Využili jsme fakt, že exponenciála diagonální matice s hodnotama $(d_1,\dots,d_n)$ na diagonále je opět diagonální matice s hodnotama $(e^{d_1},\dots,e^{d_n})$ na diagonále (a taky několik znalostí z matematické analýzy).

Základní úloha 2. Určete $\exp\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Řešení. Matici $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ si převedeme do tvaru $A=BJ_AB^{-1}$, kde J_A je Jordanova matice matice A a sloupce matice B tvoří příslušnou Jordanovu bázi. Pak bude $\exp(A)=B\exp(J_A)B^{-1}$.

Charakteristický polynom matice A je $p(\lambda)=(\lambda-1)(1-\lambda^2)$, takže máme $\lambda_1=1$ s algebraickou násobností 2 a $\lambda_2=-1$ s algebraickou násobností 1.

Pro $\lambda_1=1$ je

$$A_1:=A-\lambda_1E=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad A_1^2=\begin{pmatrix}4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}.$$

Máme $\mathrm{Ker}(A_1)=\left\langle(1,1,1)^T\right\rangle$, tedy pro λ_1 budeme mít 1 Jordanovu buňku (má geometrickou násobnost 1) řádu 2 (má algebraickou násobnost 2). Teď ještě musíme zkonstruovat příslušný řetízek. Začneme vlastním vektorem $v_1=(2,2,2)^T$. Vektor v_2 hledáme tak, aby platilo $A_1v_2=v_1$, např. $v_2=(0,0,1)^T$.

Pro $\lambda_2=-1$ je

$$A_{-1}:=A-\lambda_2E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad \mathrm{Ker}(A_{-1})=\left\langle(2,0,1)^T\right\rangle.$$

Máme tedy 1 (geometrická násobnost) Jordanovu buňku řádu 1 (algebraická násobnost), příslušný vlastní vektor je např. $v_3 = (2, 0, 1)^T$.

Když to dáme dohromady, dostaneme

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a $A = BJ_AB^{-1}$. Teď potřebujeme spočíst $\exp(J_A)$. Protože J_A je blokově diagonální, je každá její mocnina (a tím i exponenciála) taky blokově diagonální. Stačí tedy spočíst exponenciály jednotlivých Jordanových buněk. Pro buňky řádu 1 je to jednoduché, stačí místo λ napsat e^λ. Pro buňky řádu 2 je to složitější. Máme

$$J^n_{\lambda,2} = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}, \quad \exp(J_{\lambda,2}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{J^n_{\lambda,2}}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}.$$

Jiný (obecně asi snazší) spůsob, jak spočíst $\exp(J_{\lambda,2})$ (snadno se zobecní) je tento:

$$\begin{aligned} \exp\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} &= \exp\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \exp\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & 0 \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\lambda & e^\lambda \\ 0 & e^\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tento postup je korektní, neboť skalární násobky E komutují s jakoukoli maticí. Dohromady

$$\exp(J_A) = \begin{pmatrix} e & e & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}, \quad \exp(A) = B\exp(J_A)B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2e + 2e^{-1} & -2e^{-1} & 4e \\ -2e & 0 & 4e \\ -3e + e^{-1} & -e - e^{-1} & 6e \end{pmatrix}.$$

Základní úloha 3. Řešte soustavu lineárních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= 5y_1(t) - 3y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= 3y_1(t) - y_2(t) \end{aligned}$$

s obecnou počáteční podmínkou. Pro jakou počáteční podmínku má řešení tvar $e^{\lambda t}\mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^2$ a $\lambda \in \mathbb{C}$?

Řešení. Máme soustavu rovnic $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ pro $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Její řešení pro $\mathbf{y}_0 = \mathbf{c}$ je $\exp(At)\mathbf{c}$. Pro $A = BJ_AB^{-1}$ je $\exp(At) = B\exp(J_At)B^{-1}$. Potřebujeme tedy najít matice B a J_A. Snadno zjistíme, že matice A má jediné vlastní číslo $\lambda = 2$ s vlastním podprostorem $\langle (1, 1)^T \rangle$. Máme tedy 1 Jordanovu buňku řádu 2. Teď ještě příslušný řetízek. Stačí vzít za v_2 libovolný vektor mimo vlastní podprostor a položit $v_1 = (A - 2E)v_2$. Například $v_2 = (1, 0)^T$ a $v_1 = (3, 3)^T$. Máme tedy

$$A = BJ_AB^{-1}, \quad \text{kde} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Teď potřebujeme spočíst $\exp(At) = B\exp(J_At)B^{-1}$. Máme

$$\begin{aligned} \exp(J_At) = \exp\begin{pmatrix} 2t & t \\ 0 & t \end{pmatrix} &= \exp\left[\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \exp\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

a tedy

$$\exp(At) = B\exp(J_At)B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} 3t + 1 & -3t \\ 3t & 1 - 3t \end{pmatrix}.$$

Řešení pro obecnou počáteční podmínku $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$ je

$$\exp(At)\mathbf{c} = e^{2t}\begin{pmatrix} 3t+1 & -3t \\ 3t & 1-3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{2t}\begin{pmatrix} (3t+1)c_1 - 3tc_2 \\ 3tc_1 + (1-3t)c_2 \end{pmatrix} = e^{2t}\mathbf{v}.$$

Aby $\mathbf{v}$ nezávisel na t, musí být $c_1 = c_2$.