Základní úloha 1. Získejte ortonormální bázi podprostoru $\langle(0,1,1,1),(2,3,1,-1),(3,1,4,1)\rangle$ v $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem aplikací Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace na zadané generátory podprostoru. Určete Fourierovy koeficienty zadaných generátorů vzhledem k této bázi.

Řešení 1. Pro $u_1 = (0,1,1,1)^T$, $u_2 = (2,3,1,-1)^T$ a $u_3 = (3,1,4,1)^T$ máme

$$\begin{aligned}
\tilde{v}_1 &= u_1 = (0,1,1,1)^T,\\
\tilde{v}_2 &= u_2 - \frac{\langle \tilde{v}_1, u_2\rangle}{\langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_1\rangle}\tilde{v}_1 = u_2 - \frac{3}{3}\tilde{v}_1 = (2,2,0,-2)^T,\\
\tilde{v}_3 &= u_3 - \frac{\langle \tilde{v}_1, u_3\rangle}{\langle \tilde{v}_1, \tilde{v}_1\rangle}\tilde{v}_1 - \frac{\langle \tilde{v}_2, u_3\rangle}{\langle \tilde{v}_2, \tilde{v}_2\rangle}\tilde{v}_2 = u_3 - \frac{6}{3}\tilde{v}_1 - \frac{6}{12}\tilde{v}_2 = (2,-2,2,0)^T,
\end{aligned}$$

t.j. po znormování

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,1,1)^T, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,0,-1)^T, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1,0)^T$$

je ON báze daného podprostoru. Fourierovy koeficenty zadaných vektorů (dají se i zrekonstruovat z postupu ortogonalizace)

$$\begin{aligned}
u_1 &= \langle v_1, u_1\rangle v_1 + \langle v_2, u_1\rangle v_2 + \langle v_3, u_1\rangle v_3 = \sqrt{3}u_1,\\
u_2 &= \langle v_1, u_2\rangle v_1 + \langle v_2, u_2\rangle v_2 + \langle v_3, u_2\rangle v_3 = \sqrt{3}(u_1 + 2u_2),\\
u_3 &= \langle v_1, u_3\rangle v_1 + \langle v_2, u_3\rangle v_2 + \langle v_3, u_3\rangle v_3 = \sqrt{3}(2u_1 + u_2 + 2u_3).
\end{aligned}$$

Základní úloha 2. Proveďte QR-rozklad matice $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

Řešení 2. Sloupce matice Q je ON množina získána ortogonalizací a sloupce matice R tvoří příslušné Fourierovy koeficienty jednotlivých vektorů:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}, \quad R = \sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Základní úloha 3. Ortogonalizujte posloupnost $(1, x, x^2)$ v $P(x,\mathbb{R})$ vzhledem ke skalárnímu součinu $(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

Řešení 3. Postupujeme stejně jako v úloze 1:

$$\begin{aligned}
1 &\to 1,\\
x &\to x - \frac{\int_{-1}^{1} x dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx}1 = x - \frac{0}{2}1 = x,\\
x^2 &\to x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} 1 dx}1 - \frac{\int_{-1}^{1} x^3 dx}{\int_{-1}^{1} x^2 dx}x = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2}1 - \frac{0}{\frac{2}{3}}x = x^2 - \frac{1}{3},
\end{aligned}$$

t.j. ortogonalizací posloupnosti $(1, x, x^2)$ jsme získali posloupnost $(1, x, x^2 - \frac{1}{3})$.

Hodnocená úloha. Proveďte QR-rozklad matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Určete matici Q^{-1} a hodnotu determinantu matice Q.

Procvičovací úloha 1. Ověřte, že množina všech unitárních $n \times n$ matic s operací maticového násobení tvoří grupu. Jakých hodnot může nabývat determinant unitární matice?

Procvičovací úloha 2. Určete kladné reálné číslo a a komplexní čísla b, c, d, e, f, g tak, aby matice

$$A = a \begin{pmatrix} i & b & c & e \\ 1 & 1 & d & f \\ -1 & 1 & 1 & g \\ -i & 1 & -1 & i \end{pmatrix}$$

byla unitární. Vyjádřete vektor $(1, i, 0, 1+i)$ jako lineární kombinaci řádků matice A.

Procvičovací úloha 3. Najděte ortonormální bázi podprostoru

$$W = \langle (1,-3,0,1), (1,5,2,3), (0,4,1,1), (1,-2,0,4) \rangle$$

v $\mathbb{R}^4$ se standardním skalárním součinem. Určete ortogonální projekci vektoru $(1,0,0,0)$ do W a do $W^\perp$.

Procvičovací úloha 4. Uvažujme vektorový prostor $\mathbb{R}^{2\times 2}$ se skalárním součinem $g(A,B) = Tr(A^T B)$. Najděte ortonormální bázi podprostoru $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \right\rangle$, která obsahuje násobek matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Rozšiřující úloha 1. Pro všechna $n \in$ $mathbbZ_0^+$ zavedme *Legendreovy polynomy*

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)$$

Dokažte, že posloupnost $(P_0(x), P_1(x), \ldots P_n(x))$ je ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu $(p(x), q(x)) := \int_{-1}^1$ a určete normy polynomů $P_i(x)$. Dokažte, že jsou to až na násobek právě ty polynomy, které získáte ortogonalizací báze $\{1, x, \ldots, x^n\}$.

Rozšiřující úloha 2. Nech $A \equiv (\vec{a}_1 | \ldots | \vec{a}_n) \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Využijte QR-rozklad k důkazu nerovnosti $\det(A^+A) \leq \|\vec{a}_1\|^2 \ldots \|\vec{a}_n\|^2$. Zabývejte se i případem, že A nemá lineárně nezávislé sloupce.

Domácí úloha 1. Uvažujme podprostor $W := \langle (2,-1,1,0,1), (-4,2,1,3,-1) \rangle$ v $\mathbb{R}^5$ se standardním skalárním součinem. Najděte nějakou ortonormální bázi prostoru $W^\perp$ obsahující vektor $(1,1,-1,1,0)$.