Základní úloha 1. Ověřte, že matice $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ je normální, ale není hermitovská ani unitární. Najděte její spektrum $\sigma(A)$ a zapište ji jako UDU^+, kde U je unitární matice a D je diagonální. Zapište A ve formě spektrálního rozkladu a určete matice ortogonálních projekcí do jednotlivých vlastních podprostorů.

Řešení. Pro ověření, že matice A je normální, musíme ukázat rovnost $AA^+ = A^+A$. Pro levou stranu rovnice počítáme součin $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$. Pro pravou stranu máme $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$. Matice A je tedy normální, navíc vidíme, že není unitární $AA^+ \neq \mathrm{Id}$. Není ani hermitovská, jelikož očividně $A \neq A^+$.

Dále hledáme OG diagonalizaci matice A. Nejprve musíme najít vlastní čísla matice A. Charakteristický polynom je zjevně $(2-\lambda)^2 + 9$, vlastní čísla jsou tedy $\lambda_1 = 2+3i$, $\lambda_2 = 2-3i$. Vlastní podprostor V_1 příslušející vlastnímu číslu λ_1 je $\langle (i,1)^T \rangle$, podobně V_2 příslušející vlastnímu číslu λ_2 je $\langle (-i,1)^T \rangle$. Protože A je normální, našli jsme zároveň OG bázi (ortogonalita je vždy míněna vůči skalárnímu součinu, který určuje konkrétní podobu hermitovského sdružení – v našem případě jde o standardní skalární součin).

Abychom získali unitární matici, musíme ale vektory ještě normovat. Normovací konstanta je vždy rovna normě vektorů, tedy $\sqrt{\langle (i,1)^T, (i,1)^T \rangle} = \sqrt{2} = \sqrt{\langle (-i,1), (-i,1) \rangle}$. Hledaná unitární matice U má potom ve svých sloupečcích tyto normované ortogonální vektory (proč jsou takové matice vždy unitární?), konkrétně tedy vypadá takto $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hledaným rozkladem je součin ve tvaru UDU^+, kde D je diagonální matice s vlastními čísly matice A na diagonále. Součin má konkrétní podobu $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2+3i & 0 \\ 0 & 2-3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Můžeme se snadno přesvědčit, že je tento součin skutečně roven matici A.

Abychom spočetli spektrální rozklad matice A, musíme spočítat matice ortogonálních projekcí na vlastní podprostory matice A vzhledem ke kanonické bázi. Ty jsou rovny $\mathbf{u_1 u_1}^+$ a $\mathbf{u_2 u_2}^+$, kde $\mathbf{v}_i$ je normovaný vlastní vektor, tedy sloupec matice U. Celkem tedy máme $[\mathbb{P}_1]_K^K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, $[\mathbb{P}_2]_K^K = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. Spektrální rozklad matice A potom vypadá $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(2+3i) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(2-3i) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.

Základní úloha 2. Rozmyslete, si, že spektrum matice $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ je možné určit pouze na základě její hodnosti a stopy. Proveďte její ortogonální diagonalizaci a spektrální rozklad.

Řešení. Označme matici A, její hodnost je 1, takže nulita je rovna 2. Matice je symetrická, tedy diagonalizovatelná, znamená to tedy, že existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory matice, příslušející vlastnímu číslu 0. Protože je stopa součet vlastních čísel, součet čísel na hlavní diagonále nám dá rovnou informaci o hodnotě posledního vlastního čísla. Tím je 9.

Vlastní podprostor matice příslušející vlastnímu číslu 9 je $V_1 = \langle (2,-1,2)^T \rangle$, vlastní podprostor příslušející dvojnásobnému vlastnímu číslu 0 je $V_2 = \langle (-1,0,1)^T, (1,2,0)^T \rangle$. Pomocí Gram-Schmidtovy ortogonalizace najdeme ortonormální bázi prostoru V_2. Touto bází je například množina $\{\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T, \frac{1}{\sqrt{18}}(1,4,1)^T\}$. Snadno tedy dohlédneme, že OG diagonalizace je tvaru $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}$.

Spektrální rozklad spočteme lehce, jelikož existuje jediné nenulové vlastní číslo, tedy $A = 9\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T$. Matici projekce proto ani nemusíme počítat, je to prostě $\frac{1}{9}A$. Všimněmě si rovněž, že jakmile známe V_2, vektorový prostor V_2 také nemusíme počítat, protože je to prostě ortogonální doplněk $V_2 \equiv \operatorname{Ker} A$, a protože $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^T)^{\perp}$, je tento roven řádkovému prostoru matice A.

Základní úloha 3. Aproximujte body $[-2,4]$, $[-1,3]$, $[0,1]$, $[2,0]$ lineární funkcí metodou nejmenších čtverců.

Řešení. Pokud metodou nejmenších čtverců aproximujeme funkci $y = y(x)$ lineární funkcí, řešíme úlohu

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{4} (ax_i + b - y_i)^2.$$

Hledání minima takové funkce dvou proměnných vede na přeurčenou soustavu lineárních rovnic

$$\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ x_3 & 1 \\ x_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

jejíž příslušná normální soustava je

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} x_i^2 & \sum_{i=1}^{4} x_i \\ \sum_{i=1}^{4} x_i & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \\ \sum_{i=1}^{4} y_i \end{pmatrix}.$$

Po dosazení konkrétních hodnot $[x_1, y_1] = [-2, 4], [x_2, y_2] = [-1, 3], [x_3, y_3] = [0, 1], [x_4, y_4] = [2, 0]$ dostáváme rovnici

$$\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Řešením této soustavy je $(a, b) = (-\frac{36}{35}, \frac{61}{35})$ a hledaná lineární funkce pak $y(x) = \frac{1}{35}(-36x + 61)$.