Základní úloha 1. Rozhodněte, které z následujících matic jsou matice skalárního součinu na $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. První matice není symetrická, nemůže tedy být maticí skalárního součinu. Zbylé tři matice upravíme symetrickými úpravami na diagonální tvar. Kladná čísla na diagonále jsou jen u třetí matice.

Základní úloha 2. Nechť $V = P^2(x, \mathbb{R})$, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ je bilineární forma definovaná předpisem $g(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$. Označme $K = (1, x, x^2)$ a najděme matici $[g]_K$. Ověřte, že g je skalární součin a najděte vzhledem k němu ortogonální doplněk množiny $M = \{3x^2 - 1, 3x - 2\}$ ve V.

Řešení. Platí, že

$$g(r_1p_1(x)+r_2p_2(x), q(x)) = \int_0^1 r_1p_1(x)q(x)dx+\int_0^1 r_2p_2(x)q(x)dx = r_1g(p_1(x), q(x))+r_2g(p_2(x), q(x)),$$

tedy g je lineární v prvním argumentu, stejně tak i ve druhém. Snadno vidíme, že $g(p(x), q(x)) = g(q(x), p(x))$, tedy g je symetrická bilineární forma. Pro každý nenulový polynom je $g(p(x), p(x)) = \int_0^1 p(x)^2dx$ kladné číslo, tedy g je i pozitivně definitní. Mohli bychom také symetrickými úpravami diagonalizovat matici

$$[g]_K = \begin{pmatrix} \int_0^1 dx & \int_0^1 xdx & \int_0^1 x^2dx \\ \int_0^1 xdx & \int_0^1 x^2dx & \int_0^1 x^3dx \\ \int_0^1 x^2dx & \int_0^1 x^3dx & \int_0^1 x^4dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Polynom $ax^2 + bx + c$ je v $M^\perp$, pokud splňuje podmínky

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = 0$$

Hledáme tedy

$$\mathrm{Ker} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{4}{15} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} = \left\langle \left(\frac{1}{6}, -\frac{16}{15}, 1 \right) \right\rangle,$$

čili $M^\perp = \langle x^2 + \frac{16}{15}x + \frac{1}{6} \rangle$.

Základní úloha 3. Označme $M = \{(1 + i, 1, i), (1, i, -i)\} \subset \mathbb{C}^3$ se standardním skalárním součinem. Najděte ortogonální projekci vektoru $(i, 1, 1 + i)$ do prostoru $\langle M \rangle$.

Řešení. Protože $\overline{1 + i}.1 + \overline{1}.i + \overline{i}.(-i) = 0$, jsou vektory v M kolmé vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu. Pak je projekce do roviny $\langle M \rangle$ rovna součtu projekcí do jejich jednotlivých vektorů, tj.

$$\frac{\overline{1 + i}.i + \overline{1}.1 + \overline{i}.(1 + i)}{4}(1 + i, 1, i) + \frac{\overline{1}.i + \overline{i}.1 + \overline{-i}.(1 + i)}{3}(1, i, -i) = \frac{1}{12}(5 + 13i, 5 - 4i, 4 + 13i)$$