Základní úloha 1. Nechť $V = \mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2) \in V$ a $t \in T_1^2(V)$ přiřazuje $\phi, \psi \in V^*$ a $u \in V$ hodnotu

$$T(\phi, \psi, u) = \phi(a)\psi(u) - \psi(a)\phi(u).$$

1. Ukažte, že T je antisymetrický v prvních dvou argumentech. Najděte souřadnice $[T]_K$.
2. Určete typ a souřadnice tenzorů $C_{11}T$ a $C_{21}T$ vzhledem ke kanonické bázi.
3. Definujme $\tilde{T} := T(\cdot, \cdot, \sharp_g \cdot)$, kde g je standardní skalární součin na V. Určete $[\tilde{T}]_K$ a rozhodněte, zda je $\tilde{T}$ úplně antisymetrický tenzor.

Řešení. 1. Antisymetrie v prvních dvou argumentech znamená $T(\phi, \psi, u) = -T(\psi, \phi, u)$. Máme

$$T(\phi, \psi, u) = \phi(a)\psi(u) - \psi(a)\phi(u) = -(\psi(a)\phi(u) - \phi(a)\psi(u)) = -T(\psi, \phi, u).$$

Označme $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ kanonickou bázi V a $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$ bázi k ní duální. Pak

$$T_k^{ij} = T(\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon_k) = \varepsilon^i(a)\varepsilon^j(\varepsilon_k) - \varepsilon^j(a)\varepsilon^i(\varepsilon_k) = a^i\delta_k^j - a^j\delta_k^i.$$

2. Protože T je typu $(2, 1)$, musí být libovolná jeho kontrakce typu $(1, 0)$. Je

$$\begin{aligned}(C_{11}T)^i &= T_j^{ji} = a^j\delta_j^i - a^i\delta_j^j = a^i - a^i \dim V = -a^i,\\ (C_{21}T)^i &= T_j^{ij} = a^i\delta_j^j - a^j\delta_j^i = a^i \dim V - a^i = a^i.\end{aligned}$$

3. Protože kanonická báze je ortonormální vzhledem ke standardnímu skalárnímu součinu, je $\sharp_g \cdot \varepsilon^i = \varepsilon_i$ pro každý index i. Pak

$$\tilde{T}^{ijk} = \tilde{T}(\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k) = T(\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon_k) = a^i\delta_k^j - a^j\delta_k^i.$$

Je evidentní, že tento tenzor není úplně antisymetrický, protože např. $\tilde{T}^{112} = 0$ a $\tilde{T}^{211} = a^2$, takže $\tilde{T}^{112} \neq -\tilde{T}^{211}$.

Základní úloha 2. Nechť $V = \mathbb{F}^n$. Definujme zobrazení

$$\begin{aligned}T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} &\to \mathbb{F}\\ (v_1, \dots, v_n) &\mapsto \det(v_1 | \dots | v_n).\end{aligned}$$

Ukažte, že se jedná o tenzor, určete jeho typ a ověřte, že je úplně antisymetrický. Pro $n = 3$ najděte souřadnice $[T]_K$.

Řešení. Abychom dokázali, že zobrazení T je tenzor, stačí ověřit, že je v každé proměnné lineární. Jinými slovy, že pro každý index $i = 1, \dots, n$ platí

$$\det\left(\dots | v_i + cv_i' | \dots\right) = \det(\dots | v_i | \dots) + c \det\left(\dots | v_i' | \dots\right),$$

což je základní vlastnost determinantu. Vzhledem k tomu, že T má n vektorových argumentů, musí to být tenzor typu $(0, n)$. Úplná antisymetrie znamená, že pro libovolnou dvojici indexů $i \neq j$ platí

$$\det(\dots | v_i | \dots | v_j | \dots) = -\det(\dots | v_j | \dots | v_i | \dots),$$

což je opět základní vlastnost determinantu. Pro $n = 3$ je $T_{123} = 1$ a z antisymetrie

$$T_{ijk} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}.$$

Základní úloha 3. Nechť $V = \mathbb{R}^2$ a $Z : V \times V \to V$ je zobrazení definované

$$Z(x, y) := (x_1y_1 - x_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1)^T.$$

Definujme tenzor $T \in T_2^1(V)$ předpisem $T(x, y, \alpha) = \alpha(T(x, y))$. Najděte jeho souřadnice $[T]_K$. Ověřte, že T je symetrický v prvních dvou argumentech a určete jeho kontrakci $C_{11}T = C_{12}T \in T_1^0(V)$. Které operaci zobrazení Z (a tedy i tenzor T)odpovídá?

Řešení. Označme znovu $K = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ a $K^* = \{\varepsilon^1, \varepsilon^2\}$. Pak $T_{ij}^k = T(\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon^k) = \varepsilon^k(Z(\varepsilon_i, \varepsilon_j))$, t.j.

$$T_{ij}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z toho je ihned vidět, že T je symetrický v prvních dvou argumentech (obě matice jsou symetrické). Pro jeho kontrakci platí

$$(C_{11}T)_1 = T_{i1}^i = T_{11}^1 + T_{21}^2 = 1 + 1 = 2,$$
$$(C_{11}T)_2 = T_{i2}^i = T_{12}^1 + T_{22}^2 = 0 + 0 = 0.$$

Zobrazení Z odpovídá operaci násobení komplexních čísel:

$$(x_1 + ix_2)(y_1 + iy_2) = (x_1y_1 - x_2y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$