Základní úloha 1. Definujme bilineární formu na $\mathbb{R}^2$ vztahem

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$$

1. Rozložte g na symetrickou a antisymetrickou část a napište příslušnou kvadratickou formu $Q_g(\mathbf{x})$ a její matici $[Q_g]_K$.
2. Najděte polární bázi Q_g pomocí symetrických úprav a pomocí ortogonální diagonalizace.
3. Určete signaturu Q_g z výsledků předchozího bodu a pomocí Jacobi-Sylvesterovy věty.
4. Určete nulovou množinu N_g nejprve v souřadnicích vůči polární bázi a následně popis transformujte do báze kanonické.

Řešení. Rozklad bilineárné formy do symetrické a antisymetrické části je

$$g_S(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(g(\mathbf{x}, \mathbf{y} + (\mathbf{y}, \mathbf{x})\right) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 3x_2y_2$$

$$g_A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(g(\mathbf{x}, \mathbf{y} - (\mathbf{y}, \mathbf{x})\right) = 2x_1y_2 - 2x_2y_1$$

Příslušné matice jsou $[g_S]_K = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ a $[g_A]_K = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Kvadratická forma však odpovídá pouze symetrické části, tedy $Q_g(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2$ a $[Q_g]_K = [g_S]_K$.

Symetrické úpravy matice $[Q_g]_K$ mohou být například

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-4}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{-7}{3} \end{pmatrix}$$

V kterémžto případě je polární báze $\{(1, \frac{-4}{3})^T, (0, 1)^T\}$.

Vlastní čísla matice $[Q_g]_K$ jsou $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = -1$ a jim odpovídající vlastní vektory $v_1 = (1, 1)^T$, $v_2 = (1, -1)^T$. Jelikož jsou vlastní čísla různá, jsou vektory rovnou ortogonální. Avšak pro ortogonální diagonalizaci je potřeba je ještě normovat. Získáváme tak příslušnou polární bázi $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$, $w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)^T$.

Symetrickými úpravami jsme získali $\operatorname{diag}(3, \frac{-7}{3})$ získavše signaturu $(1, 1, 0)$. Vlastní čísla získaná v ortgonální diagonalizaci byla 7 a -1 dávajíc rovněž signaturu $(1, 1, 0)$. Pro Jacobi-Sylvesterovu větu zjistíme determinanty příslušných podmatic jako $\det G_1 = 3$, $\det G_2 = 9 - 16 = -7$. Signaturu pak zjistíme ze sekvence $(1, 3, -7)$ jako počet změn znamínka (nebo případně ze sekvence $(\frac{1}{\det G_1}, \frac{\det G_1}{\det G_2}) = (\frac{1}{3}, \frac{3}{-7})$ jako počet jejích záporných členů). Což nám opět dává (1,1,0).

Pro nulovou množinu chceme zjistit všechny vektory $\mathbf{v}$ takové, že

$$(v_1, v_2) \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

Což dává podmínku $7v_1^2 - v_2^2 = 0$, kteroužto splňují vektory $\{k \cdot (1, \sqrt{7}), k \cdot (1, -\sqrt{7}) | k \in \mathbb{R}\}$. Jelikož jsme využili matici kvadratické formy v její polární bázi, získali jsme i vektory v polární bázi. Pro zjištění vektorů N_g v kanonické bázi využijeme matici přechodu

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ k \cdot \sqrt{7} \end{pmatrix} = \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{7} \\ 1 - \sqrt{7} \end{pmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ -k \cdot \sqrt{7} \end{pmatrix} = \frac{k}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{7} \\ 1 + \sqrt{7} \end{pmatrix}$$

□

Základní úloha 2. Rozhodněte a zdůvodněte, které dvě z následujících matic mohou být maticí téže bilineární formy vzhledem ke dvěma různým bázím na $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Řešení. Matice mohou být maticí téže bilineární formy pokud mají stejnou signaturu. Využijeme Jacobi-Sylvesterovu větu, pakliže budou splněny její podmínky.

První matice má det$G_1 = 5$, det$G_2 = 25$ a tedy signaturu (2,0,0). Druhá matice má det$G_1 = -3$, det$G_2 = -25$ a signaturu (1,1,0). Třetí matice má det$G_1 = 7$, det$G_2 = 0$ a nelze tak využít Jacobi-Sylvesterovu větu. Pomocí symetrických úprav však můžeme matici snadno převést na $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ jejíž signatura je očividně (1,0,1). V posledním případě det$G_1 = 0$, tedy rovněž nemůžeme využít Jacobi-Sylvesterovu větu. Pomocí diagonalizace ale snadno zjistíme vlastní čísla jako 5 a -5 z čehož zjistíme signaturu (1,1,0). Vidíme tak, že pouze druhá a čtvrtá matice mohou být maticí téže bilineární formy.

Na závěr se přesvědčíme, že tomu tak opravdu je. Převeďme obě matice pomocí symetrických úprav na diagonální matici, která má na diagonále pouze $+1$ a -1 (v obecném případě i 0) uspořádané přesně v tomto pořadí (tedy nejprve kladné, pak záporné a na závěr nulov0 hodnoty). Pro pouhou diagonalizaci symetrickými úpravami bychom pro druhou ze zadaných matic provedli

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & \frac{25}{3} \end{pmatrix}$$

S naším dodatečným požadavkem si vyjádříme

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Neboli pro $U = \begin{pmatrix} \frac{7}{3\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{3}}{5} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$ máme $U^T \cdot \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Obdobně pro čtvrtou ze zadaných matic určíme

$$V^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pomocí symetrických úprav na sebe matice můžeme převádět, což pro bilineární zobrazení (respektive kvadratické formy) odpovídá změně báze.

$$\begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} = \left(U \cdot V^{-1}\right)^T \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \left(U \cdot V^{-1}\right)$$

□

Základní úloha 3. Určete signaturu kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$ s předpisem

$$Q_g(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

pomocí Jacobi-Sylvesterovy věty a pomocí symetrických úprav.

Řešení. Nejprve zjistíme $[Q_g]_K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =: G$. Pro Jacobi-Sylvesterovu větu zjistíme determinanty příslušných podmatic jako det$G_1 = 1$, det$G_2 = -3$ a det$G_3 = 2$. Z věty pak plyne, že signatura je (1,2,0). Naopak symetrickými úpravami zjišťujeme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

Což opět dává signaturu (1,2,0).

□

Hodnocená úloha. Určete signaturu kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$ v závislosti na $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2\lambda x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + x_2^2 + 4x_2 x_3 + 5x_3^2$$

Procvičovací úloha 1. Určete polární bázi a signaturu kvadratické formy na $\mathbb{R}^4$ definované vztahem $Q_g(\mathbf{x}) = x_1 x_2 - x_3 x_4$.

Procvičovací úloha 2. Pokud je bilineární forma g skalární součin na V, pak platí, že pro každý podprostor $W \leq V$ je $W \cap W^\perp = 0$. Dokažte to a prozkoumejte, jak je to s platností obdobného tvrzení pro jiné bilineární formy (např. indefinitní, singulární, antisymetrické...). Zde definujeme $W^\perp := \{u \in V | \forall v \in W : g(u, v) = 0\}$. Ukažte, že je-li g regulární a platí-li $W \cap W^\perp = 0$, pak $W \oplus W^\perp = V$.

Procvičovací úloha 3. Popište nulovou množinu kvadratické formy ze základní úlohy 3.

Rozšiřující úloha 1. Víme, že přímka v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ je popsána svým směrovým vektorem, rovina v $\mathbb{R}^3$ svým vektorem normálovým, vždy až na násobek. Jak je to s rovinami v $\mathbb{R}^4$?

1. Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jsou dva lineárně nezávislé vektory v $\mathbb{R}^4$. Definujme vektor $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^6$ po složkách takto $p_1 := x_1 y_2 - x_2 y_1$ a další složky vektoru $\mathbf{p}$ jsou další 2×2 subdeterminanty matice $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ vzniklé ponecháním různých dvojic řádků: po řadě 13, 14, 23, 24 a 34. Ukažte, že pokud zvolíme jiné vektory $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$, které generují stejnou rovinu jako $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, vektor $\mathbf{p}$ se změní nanejvýš vynásobením nenulovou konstantou. Tudíž je každé rovině v $\mathbb{R}^4$ takto přiřazena přímka v $\mathbb{R}^6$, označme toto zobrazení α.

2. Ukažte, že složky vektoru $\mathbf{p}$ splňují rovnici $g(\mathbf{p}, \mathbf{p}) := p_1 p_6 - p_2 p_5 + p_3 p_4 = 0$ a náleží tedy nulové množině N_g kvadratické formy Q_g v $\mathbb{R}^6$. Zobrazení α tedy není na. Spočítejte signaturu kvadratické formy Q_g.

3. Uvažujme přímku $\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbb{R}^6$, která leží v N_g a zároveň $p_1 = 1$. Ukažte, že lze najít vektory $\mathbf{x} = (1, 0, \alpha, \beta)^T$ a $\mathbf{y} := (0, 1, \gamma, \delta)^T$ takové, že rovina $W := \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ se v zobrazení α zobrazí na vektor $\mathbf{p}$. Vyvoďte odtud, že zobrazení α je „na“ množinu všech přímek $\langle \mathbf{p} \rangle$ v množině N_g.

4. Pokud $\mathbf{z} \in \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, má matice $(\mathbf{x}|\mathbf{y}|\mathbf{z})$ všechny čtyři 3×3 subdeterminanty nulové. Přeformulujte tyto podmínky jako homogenní soustavu čtyř lineárních rovnic pro složky vektoru F, jejíž koeficienty jsou $\pm p_i$. Dokažte, že hodnost matice této soustavy je pro každé $\mathbf{p} \neq 0$ rovna 2 a tudíž existuje právě jedna rovina, jejíž obraz v zobrazení α je $\langle p \rangle$, tedy α je prosté zobrazení.

Zobrazení α se říká *Plückerovy souřadnice* a jeho obrazu *Kleinova kvadrika.* Pokud $\mathbf{x} = (1, a_1, a_2, a_3)^T$ a $\mathbf{y} = (1, b_1, b_2, b_3)^T$, pak $(p_1, p_2, p_3) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ a $(p_6, -p_5, p_4) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Afinní přímka v $\mathbb{R}^3$, která prochází body $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$, ale nikoli počátkem, je takto zadána pomocí svého směrového vektoru a pomocí normálového vektoru roviny, určené jí a počátkem. Oproti popisu pomocí dvojice bodů $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, kterých může být pro stejnou přímku mnoho, mají Plückerovy souřadnice výhodu, že popisují přímku jednoznačně až na vynásobení obou vektorů (směrového i normálového) stejným skalárem.

Rozšiřující úloha 2. Proč není možné diagonalizovat antisymetrickou bilineární formu? Proč je každá antisymetrická bilineární forma na prostoru V liché dimenze singulární? (Návod: použijte determinant). Ukažme dále, že pro každou antisymetrickou bilineární formu g na V sudé dimenze existuje báze taková, že matice formy vzhledem k této bázi je blokově diagonální matice, jejíž všechny bloky jsou 2×2 matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. (Návod: Najděte vektory u_1, v_1, pro které $g(u_1, v_1) = 1$ a podprostor $W \leq V$ takový, že $g(u_1, W) = g(u_2, W) = 0$. Ukažte, že $W \oplus \langle u_1, v_1 \rangle = V$ a použijte indukci.)

Domácí úloha 1. Najděte ortonormální polární bázi kvadratické formy na $\mathbb{R}^3$:

$$Q(\mathbf{x}) = 5x_1^2 + 4x_1 x_2 - 8x_1 x_3 + 8x_2^2 + 4x_2 x_3 + 5x_3^2$$