

**Teorie
elektro-
magne-
tického
pole**

JOZEF
KVASNICA

ACADEMIA

ČESKOSLOVENSKÁ
AKADEMIE VĚD

Vědecký redaktor

Prof. Ing. Jiří Formánek, DrSc.

Recenzent

Prof. Ing. Milan Noga, DrSc.

Teorie elektro- magne- tického pole

JOZEF KVASNICA

*Schváleno rozhodnutím ministerstva školství
České socialistické republiky
č. j. 11 346/84-31 ze dne 14. května 1984
jako celostátní vysokoškolská učebnice
pro studenty matematicko-fyzikální fakulty
a přírodovědeckých fakult skupiny
studijních oborů 11
fyzikálně matematické vědy.*

*Schválilo Ministerstvo školstva SSR
dňa 18. 5. 1984 číslo Š 3594/1984-30
ako celoštátnu vysokoškolskú učebnicu
pre vysoké školy*

ACADEMIA PRAHA 1985

PŘEDMLUVA

Rostoucí rozsah aplikací elektromagnetických jevů ve vědecké a technické praxi si vyžádal i přiměřenou změnu v učebních plánech na všech typech škol, proto bych chtěl úvodem říci několik slov ke způsobu výkladu a výběru látky.

V úvodním vysokoškolském kursu fyziky se probírají základní poznatky o elektromagnetických jevech, včetně zobecnění těchto poznatků ve formě Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. Ve speciální přednášce teorie elektromagnetického pole se na tyto poznatky bezprostředně navazuje, po krátké rekapitulaci základních poznatků se Maxwellovy rovnice zavádějí axiomaticky a další teorie se buduje deduktivní cestou. Takový postup odpovídá modernímu pojetí teoretické fyziky. Základní přírodní zákony, mezi něž Maxwellovy rovnice bezesporu patří, se totiž nedají jednoznačně a s plnou obecností dokázat tak, jako se dokazují matematické teorémy. Tyto zákony představují dalekosáhlou generalizaci experimentálních faktů (jistých modelových situací), přičemž platnost těchto zobecnění nemůžeme dokázat pouze logicky (teoreticky). Hlavním a konečným kritériem správnosti těchto zobecnění je souhlas teoretických předpovědí s experimentálními výsledky. Z toho důvodu jsem (na rozdíl od starších učebnic) podstatně zredukoval tzv. odvozování Maxwellových rovnic.

Těmito slovy nehodlám ani v nejmenším snižovat význam induktivní metody, která patří k výchově k vědeckému myšlení. Cesta k objevu základních rovnic žádné velké teorie nebyla ani přímá, ani snadná, řešení si vyžádalo nemálo úsilí, tápání, intuice, odvahy i kusu objevitelského štěstí. Pro ilustraci uvedu alespoň jeden příklad. Původní Coulombův zákon se jednoduchou matematickou operací převede na Gaussovu větu elektrostatiky ($\text{div } \mathbf{D} = \rho$). Maxwell z „estetických důvodů“ tuto rovnici zobecnil i na časově proměnná pole, ačkoli v té době nebyl pro takové zobecnění (ale také proti němu) žádný empirický podklad. Toto zobecnění pak přivedlo k Maxwellovu posuvnému proudu, s nímž je bezprostředně spojena existence elektromagnetických vln.

Pro snazší vniknutí čtenáře do dané problematiky jsem do úvodní kapitoly zařadil přehled základních poznatků o elektromagnetických jevech, jejichž zobecněním je Maxwellova série rovnic elektromagnetického pole. Lorentzova elektronová teorie poskytuje hlubší pohled na mikroskopický původ makroskopických veličin elektromagnetického pole, proto začínám axiomatický výklad právě Lorentzovou teorií.

Tato učebnice, jež vznikla z dlouholetých přednášek na vysokých školách a postgraduálních kursech, vychází ze schválených osnov předmětu teorie elektromagnetického pole na matematicko-fyzikálních fakultách. Tomu odpovídá i forma výkladu a předpokládané předběžné znalosti z matematiky a fyziky. Některé speciální matematické partie přesahující tento rámec jsou vyloženy buď v textu, anebo v dodatcích.

Teorie elektromagnetického pole je nejen samostatnou fyzikální disciplínou, ale v učebním programu je také přípravným předmětem k teorii relativity, kvantové teorii, atomové a jaderné fyzice, fyzice plazmatu, fyzice pevných látek a nakonec ke kvantové elektrodynamice. Tomu je přizpůsoben i výběr látky a způsob výkladu, jakož i široké spektrum řešených úloh k jednotlivým kapitolám.

Označení veličin je ve shodě s doporučením Mezinárodní unie pro čistou a aplikovanou fyziku (IUPAP), jakož i našimi zvyklostmi a normami. Byla-li změna označení některé veličiny nezbytnou, snažil jsem se ponechat standardní označení té veličiny, která se v této učebnici vyskytuje častěji. Při výkladu je použita soustava jednotek SI (ČSN 01 1301), i když pro teoretický výklad je tato soustava nejméně vhodná. Jelikož podstatná část světové teoretické literatury je (a ještě bude) psána v soustavě CGS, uvádím v dodatku převodové vztahy mezi soustavou SI a CGS.

Snažil jsem se ujednotit použití indexů. Indexy označující částice anebo systémy volím z velké tiskací latinské abecedy; tak např. e_A značí náboj A -té částice, r_A polohový vektor A -tého náboje. Různé přívlasky veličin vyznačuji horními závorkovanými indexy; např. $e^{(p)}$ značí polarizační náboj, $j^{(M)}$ Maxwellův proud. Komponenty vektorů a tenzorů v třírozměrném prostoru označuji indexy z malé latinské abecedy; např. v_i ($i = 1, 2, 3$) značí i -tou komponentu vektoru \mathbf{v} , T_{ij} značí (ij) -tou komponentu tenzoru T . U čtyřrozměrných vektorů číslují komponenty malými řeckými indexy probíhajícími od jedné do čtyř. Jelikož zde používám pouze euklidovskou metriku, není třeba rozlišovat mezi kovariantními a kontravariantními komponentami. Ve vektorových a tenzorových operacích užívám *Einsteinovu sumační konvenci*: vyskytne-li se v některém členu index (právě) dvakrát, rozumí se tím sečítání přes tento index bez explicitního vypisování sumačního znaku, a to u malých latinských indexů sečítání od jedné do tří a u řeckých indexů sečítání od jedné do čtyř. Tak např. místo $\sum_{k=1}^3 T_{ik} A_k$ píšeme $T_{ik} A_k$, místo $\sum_{\mu=1}^4 (\partial A_\mu / \partial x_\mu)$ píšeme $\partial A_\mu / \partial x_\mu$.

V učebnici užívám komplexní symboliku pro reálné veličiny. Symbol $a \exp(iff)$ značí reálnou část příslušné reálné veličiny, aniž bych znakem Re explicitně vyznačoval, že se jedná o reálnou část. U lineárních výrazů to nemůže přivést k nedorozumění; manipulace s bilineárními a kvadratickými výrazy je vysvětlena v textu.

Závěrem bych rád poděkoval několika generacím svých žáků, kteří byli trpělivými a aktivně spolupracujícími pokusnými králiky při experimentech s různými formami výkladu, jakož i řadě svých spolupracovníků za řadu cenných podnětů, které vzešly při přednáškách a seminářích o řadě otázek principiálních i metodických. Zvláště bych chtěl poděkovat prof. Ing. Jiřímu Formánkovi, DrSc., prof. Ing. Milanovi Nogovi, DrSc., a doc. RNDr. Jiřímu Langerovi, CSc., za podnětné připomínky k různým variantám rukopisu. Svě manželce Jarmile Kvasnicové děkuji za obětavou pomoc při technické úpravě rukopisu.

Praha, září 1983

Jozef Kvasnica

ÚVOD

Průkopníkem představy o elektromagnetickém poli jako *nositeli a zprostředkovateli* elektromagnetických interakcí byl MICHAEL FARADAY (1791—1867).

Soustavu rovnic elektromagnetického pole zformuloval skotský fyzik JAMES CLERK MAXWELL (1831—1879), jenž v mnoha směrech zobecnil a matematicky formuloval Faradayovy výsledky a představy o silových trubících. První, zjednodušenou variantu těchto rovnic Maxwell uveřejnil v roce 1864; obecná forma rovnic elektromagnetického pole je obsažena v jeho spise "The Treatise on Electricity and Magnetism" (1873).

Veškeré důsledky plynoucí z Maxwellových rovnic pro makroskopické elektromagnetické pole byly pozdějšími pokusy bez výjimky potvrzeny. Maxwell sám odvodil nejdůležitější důsledek svých rovnic: ukázal, že elektromagnetický rozruch se nejenom šíří od místa k místu, ale že se šíří *konečnou rychlostí rovnou rychlosti světla*. Tím byla předpověděna existence *elektromagnetických vln*, což r. 1887 potvrdil svými slavnými experimenty HEINRICH HERTZ (1857—1894).

Od poznatku, že elektromagnetický rozruch se šíří rychlostí světla byl pouze krůček k tomu, aby optické jevy byly pochopeny (interpretovány) jako speciální případ jevů elektromagnetických. Maxwell sám odvodil zákony optiky ze svých rovnic elektromagnetického pole.

Počátkem 20. století objevil holandský fyzik HENRIC ANTON LORENTZ (1853—1928), že rovnice elektromagnetického pole jsou invariantní vůči jisté transformaci souřadnic a času, kterou dnes nazýváme *Lorentzovou transformací*.

Newtonovy pohybové rovnice však nebyly invariantní vůči Lorentzově transformaci, nýbrž vůči transformaci Gallileově. Bylo plauzibilní předpokládat, že rovnice mechaniky i elektromagnetického pole jsou invariantní vůči stejné transformaci. V tom případě byly na vybranou dvě možnosti: upravit Maxwellovy rovnice tak, aby byly invariantní vůči Gallileově transformaci, anebo upravit pohybové rovnice Newtonovy tak, aby respektovaly invariantnost vůči transformaci Lorentzově.

ALBERT EINSTEIN (1879—1955) se rozhodl pro druhou možnost, a tím vytvořil jeden z nosných sloupů současné vědy — *teorii relativity* —, jež vedla k odhalení nových fundamentálních vlastností samotného prostoru a času.

Spojení Maxwellových rovnic s postuláty kvantové teorie přivedlo ke kvantové elektrodynamice, která patří k nejlépe prověřeným teoriím moderní vědy. Obecná platnost Maxwellových rovnic a jejich neobyčejná vnitřní krása (symetrie) byly a jsou nejen předmětem obdivu, ale i inspirace při tvorbě nových fyzikálních teorií. Pro ilustraci uvedeme slavné Boltzmannovo motto k jeho přednáškám o Maxwellově teorii¹⁾, jímž vyjádřil svůj obdiv k Maxwellovi a jeho rovnicím: „War es ein Gott, der diese Zeilen schrieb“.

¹⁾ L. BOLTZMANN: Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, München 1893.

Přehled poznatků o elektromagnetických jevích

I.1 Elektrický náboj. Rovnice kontinuity

Různé specifické projevy hmoty popisujeme pomocí charakteristických parametrů. Schopnost těles odporovat změně pohybového stavu charakterizujeme setrvačnou hmotností, mírou schopnosti tělesa vytvářet gravitační pole je charakteristická veličina zvaná gravitační hmotnost (gravitační náboj) a elektrické projevy částic, tj. jejich schopnost vytvářet ve svém okolí specifické elektromagnetické pole, charakterizujeme odpovídající veličinou — elektrickým nábojem e . V soustavě SI je jednotkou náboje jeden coulomb — 1 C.

Dnes víme, že elektrické náboje všech částic (s výjimkou hypotetických kvarků) jsou rovny celistvému násobku elementárního náboje

$$e_0 = (1,602\,189 \pm 0,000\,005) \cdot 10^{-19} \text{ C.} \quad \text{I(1.1)}$$

Označíme-li $z_A e_0$ (kde $z_A = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) náboj A -té částice a N_A celkový počet těchto částic, pak celkový náboj „všech částic ve vesmíru“ (tj. velké izolované soustavy) lze vyjádřit rovnicí

$$e = \sum_A N_A z_A e_0. \quad \text{I(1.2)}$$

Ze zkušenosti plyne, že celkový elektrický náboj je konstantní, na čase nezávislý, což vyjadřuje *zákon zachování elektrického náboje*. Vznikne-li při nějakém procesu náboj $z e_0$, musí nutně vzniknout také náboj $-z e_0$ (minus $z e_0$), aby celkový náboj I(1.2) zůstal nezměněn. Příklady přeměny fotonu na pár elektron—pozitron, proton—antiproton, jakož i obrácené procesy anihilační, jsou všeobecně známé.

Zákon zachování elektrického náboje patří mezi nejlépe prověřené přírodní zákony a o jeho platnosti není ani nejmenších pochybností; patří proto k pilířům teorie elektromagnetických jevů.

Elektrické náboje se mohou v prostoru pohybovat, což vede ke vzniku *elektrického proudu*. Místo globálního zákona zachování náboje (v celém vesmíru)

$$e = \sum_A N_A z_A e_0 = \text{konst} \quad \text{I(1.3)}$$

potřebujeme analogické tvrzení pro libovolný objem; při tom je nutno uvážit přenos náboje elektrickým proudem. V makroskopické teorii zpravidla nepřihlížíme k diskrétní struktuře elektrického náboje a zavádíme hustotu náboje

$$\rho \equiv \rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta e}{\Delta V}$$

jako funkci polohy \mathbf{r} a času t . Veličina

$$e(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV \quad \text{I(1.4)}$$

představuje náboj obsažený v objemu V v čase t . Úbytek náboje z tohoto pevného objemu za jednotku času je

$$\mathcal{I} = -\frac{de}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad \text{I(1.5)}$$

Proudění elektrického náboje popisujeme vektorem proudové hustoty

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}(\mathbf{r}, t).$$

Absolutní hodnota $j \equiv |\mathbf{J}|$ tohoto vektoru určuje množství elektrického náboje, které proteče za jednotku času jednotkovou plochou kolmou na směr \mathbf{J} ; směr vektoru \mathbf{J} souhlasí se směrem proudu v daném místě \mathbf{r} a čase t . Veličina $d\mathcal{I}' = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = j_n ds$ určuje elektrický proud protékající plošným elementem ds . (Symbol j_n označuje vnější normálovou komponentu vektoru proudové hustoty \mathbf{J} .) Celkový tok náboje uzavřenou plochou \mathbf{s} je dán integrálem

$$\mathcal{I}' = \oint_{\mathbf{s}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}. \quad \text{I(1.6)}$$

Zákon zachování elektrického náboje můžeme vyjádřit tvrzením: úbytek náboje za jednotku času z libovolného objemu V je přesně roven náboji, který proproudil za jednotku času z daného objemu do okolního prostoru přes ohraničující plochu. V matematické řeči to značí rovnost výrazů I(1.5) a I(1.6), tj.

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oint_{\mathbf{s}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}. \quad \text{I(1.7)}$$

Plošný integrál přes uzavřenou plochu převědeme na integrál přes objem vytvořený touto uzavřenou plochou; příslušný vztah je dán známou *Gaussovou větou*²⁾

$$\oint_{\mathbf{s}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \text{div } \mathbf{J} dV, \quad \text{I(1.8)}$$

s níž se v této učebnici mnohokrát setkáme. Ze vztahu I(1.7) tak dostaneme

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} \right) dV = 0.$$

Zkušenost nás učí, že elektrický náboj se zachovává v každém (i libovolně malém) objemu V . Poslední rovnice musí tedy platit pro libovolný objem V , což vyžaduje anulování integrandu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0. \quad \text{I(1.9)}$$

Tento důležitý vztah zvaný *rovnice kontinuity* vyjadřuje zákon zachování elektrického náboje ve tvaru jisté parciální diferenciální rovnice svazující hustotu náboje $\rho(\mathbf{r}, t)$ a tři složky vektoru proudové hustoty $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$.

Je-li $(\partial \rho / \partial t) = 0$, pak proudění nazýváme *stacionární*. Zákon zachování elektrického náboje při stacionárním proudění má pak tvar

$$\text{div } \mathbf{J} = 0, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \right). \quad \text{I(1.10)}$$

I.2 Coulombův zákon a jeho důsledky

Elektrický náboj e vytvoří ve svém okolí (okolním prostoru) elektrické pole, které se projeví silovými účinky na ostatní náboje vložené do tohoto pole. (S ohledem na probíranou problematiku mluvíme o silovém působení, ač to nejsou jediné účinky pole.)

Z měření vyplynulo (CH. A. COULOMB, 1785), že síla \mathbf{F}_{12} působící mezi dvěma klidovými bodovými náboji e_1, e_2 je přímo úměrná oběma nábojům a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti mezi těmito náboji

$$\mathbf{F}_{12} = k_0 \frac{e_1 e_2}{R_{12}^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}}. \quad \text{I(2.1)}$$

\mathbf{R}_{12} je zde průvodič vedený z bodu 1 do bodu 2. Vzorec I(2.1) určuje sílu, kterou působí bodový náboj e_1 na (rovněž bodový) náboj e_2 . (Jelikož $\mathbf{R}_{12} = -\mathbf{R}_{21}$, je také

²⁾ Potřebné vztahy z vektorového počtu uvádíme v dodatku I.

$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.) Jsou-li e_1, e_2 stejného znaménka (odpuzování), směry vektorů \mathbf{F}_{12} a \mathbf{R}_{12} jsou souhlasné, takže konstanta $k_0 > 0$. Je-li mezi náboji e_1, e_2 prázdný prostor (vakuum), konstanta k_0 je *univerzální*, a závisí tudíž pouze na volbě měřicích jednotek. V soustavě SI se volí

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \text{I(2.2)}$$

kde ϵ_0 je tzv. *permitivita vakua* (c je rychlost světla ve vakuu)

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ F m}^{-1}. \quad \text{I(2.3)}$$

Coulombův zákon zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_1 e_2}{R_{12}^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}}. \quad \text{I(2.4)}$$

Je nutno zdůraznit, že Coulombův zákon platí pouze pro statickou interakci dvou bodových nábojů. Pouze v případě bodových nábojů má jednoznačný smysl pojem vzdálenosti mezi náboji a pouze v tom případě interakce nábojů nezávisí na jejich geometrickém tvaru. (V praxi to značí, že rozměry těles jsou velmi malé ve srovnání s jejich vzájemnou vzdáleností.) Původní přesnost Coulombových měření je dnes mnohonásobně převýšena moderními experimentálními metodami. Bylo zjištěno, že případná modifikace Coulombova zákona změnou mocnitele $R^{-2+\delta}$ je v souladu s empirickými daty při $|\delta| \leq 10^{-10}$. Dnes lze pokládat Coulombův zákon za prověřený až do vzdálenosti $R \cong 10^{-15}$ m.

Síla působící na klidový jednotkový náboj se nazývá intenzitou elektrického pole, zkráceně *elektrickou intenzitou* \mathbf{E} . (V soustavě SI je jednotkou elektrické intenzity Volt na metr, V m^{-1} .) Bodový náboj e_1 umístěný ve vakuu v bodě \mathbf{r}_1 budí v bodě \mathbf{r} prázdného prostoru intenzitu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3}. \quad \text{I(2.5)}$$

Máme-li více takových nábojů e_1, e_2, \dots , lokalizovaných v bodech $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots$, pak z pokusů plyne, že výsledná intenzita \mathbf{E} vytvořená všemi těmito náboji v libovolném bodě \mathbf{r} je rovna vektorovému součtu intenzit vytvořených jednotlivými náboji, tj.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_A e_A \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|^3}. \quad \text{I(2.6)}$$

Tento významný poznatek představuje *princip superpozice* pro pole.

K pojmu elektrické intenzity připojíme ještě tuto poznámku: Intenzitu \mathbf{E} určujeme pomocí síly \mathbf{F} , jež v daném bodě \mathbf{r} působí na zkušební (testovací) náboj

e . Tento testovací náboj musí být dostatečně malý, aby nevedl k přerozdělení ostatních nábojů (a tím i změně intenzity v daném bodě). Matematicky lze tento požadavek vyjádřit rovnicí

$$\mathbf{E} = \lim_{e \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{e}. \quad \text{I(2.7)}$$

Limitní přechod $e \rightarrow 0$ je však zdrojem principiálních potíží, spojených s konečnou hodnotou kvanta elektrického náboje e_0 . Definici I(2.7) lze tedy použít pouze v tom případě, kdy zdrojem pole je veliký počet elementárních nábojů, tj. v případě makroskopických jevů. Při zkoumání elementárních nábojů, z nichž reálná prostředí sestávají, je nutno definici I(2.7) brát s velkou opatrností. Mikroskopické pole nelze definovat operacionalisticky.

S Coulombovým zákonem úzce souvisí známá Gaussova věta z elektrostatiky. Inspiraci lze získat z vyjádření I(2.5). Položíme-li $e_1 = e, \mathbf{r}_1 = 0$, pak radiální složka E_r je rovna

$$E_r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Opíšeme-li kouli se středem v počátku souřadnic (kde sídlí náboj e), pak $E_r = E_n$ je složka intenzity \mathbf{E} ve směru vnější normály k povrchu koule. Je tedy $E_n 4\pi r^2 = e/\epsilon_0$. Vyjádříme-li plošný element ds pomocí prostorového úhlu $d\Omega$ známým vztahem

$$ds = r^2 d\Omega, \quad \text{I(2.8)}$$

pak $E_n ds = (e/4\pi\epsilon_0) d\Omega$, a tudíž $\oint E_n ds = e/\epsilon_0$.

Výrazy typu

$$\psi \equiv \int_s \mathbf{A} ds = \int_s A_k ds_k = \int_s A_n ds \quad \text{I(2.9)}$$

nazýváme *tokem* vektoru \mathbf{A} plochou \mathbf{s} . (Výraz tok je převzat z hydrodynamiky, kde výrazy typu I(1.6) bylo prvně popsáno proudění tekutin.) Pro pozdější reference uvedeme ještě definici toku tenzoru T_{ik} plochou \mathbf{s}

$$\psi_i \equiv \int_s T_{ik} ds_k = \int_s T_{ik} n_k ds, \quad \text{I(2.10)}$$

kde n_k jsou složky jednotkového vektoru ve směru vnější normály k plošnému elementu ds .

Aby nedošlo k přehlédnutí, připomínáme, že ve vzorcích I(2.9) a I(2.10) je použito Einsteinovy sumační konvence (viz předmluvu).

Rovnice $\oint \mathbf{E} ds = e/\epsilon_0$ tedy praví, že tok vektoru $\epsilon_0 \mathbf{E}$ uzavřenou plochou je roven náboji e obsaženému uvnitř této plochy.

Zobecnění pro elektrostatické pole soustavy bodových nábojů je snadné. Plochu

s zvolíme tak, aby neprocházela žádným bodovým nábojem, kde je intenzita **E** nekonečná. Jelikož vektorovému sečítání intenzit (princip superpozice) očividně odpovídá algebraické sečítání příslušných toků, úhrnný tok intenzity **E** uzavřenou plochou je roven podílu e/ϵ_0 , kde e je celkový náboj uzavřený uvnitř této plochy. Tento poznatek je zmíněná *Gaussova věta z elektrostatiky*. S ohledem na pozdější reference uvedeme její matematický tvar

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = \frac{e}{\epsilon_0}. \quad \text{I(2.11)}$$

Vyjádříme náboj e pomocí hustoty ρ vztahem $e = \int \rho \, dV$ a tok vektoru **E** upravíme pomocí Gaussovy matematické věty I(1.8). Vzniklá rovnice

$$\int_V \left(\operatorname{div} \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) dV = 0$$

má platit pro libovolný objem V , což vyžaduje, aby platilo

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad \text{I(2.12)}$$

Tato základní diferenciální rovnice svazuje elektrickou intenzitu **E** ve vakuu s hustotou ρ elektrického náboje. I když tato rovnice původně vznikla jednoduchou úpravou Coulombova zákona, její platnost a význam je mnohem širší. O příslušných zobecněních pojednáme v další části této kapitoly.

Vektor intenzity elektrického pole se znázorňuje pomocí tzv. *siločar*, což jsou křivky v každém bodě tečné s vektorem **E**; element $d\mathbf{l}$ této křivky je určen rovnicí

$$d\mathbf{l} = \text{konst} \cdot \mathbf{E}, \quad \text{I(2.13)}$$

popř.

$$\mathbf{E} \times d\mathbf{l} = 0. \quad \text{I(2.14)}$$

V kartézské soustavě rovnice siločar zní

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad \text{I(2.15)}$$

V libovolné ortogonální soustavě q_1, q_2, q_3 jsou elementy oblouku $dl_1 = h_1 dq_1$, $dl_2 = h_2 dq_2$, $dl_3 = h_3 dq_3$, kde h_i jsou *Laméovy koeficienty* (viz dodatek). Rovnice siločar mají tvar

$$\frac{h_1 dq_1}{E_1} = \frac{h_2 dq_2}{E_2} = \frac{h_3 dq_3}{E_3}. \quad \text{I(2.16)}$$

Aplikace těchto rovnic uvádíme v příložených řešených úlohách.

I.3 Elektrostatický potenciál. Laplaceova—Poissonova rovnice

Intenzitu pole bodového náboje umístěného v počátku

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad \text{I(3.1)}$$

lze vyjádřit jako záporně vzatý gradient funkce

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad \text{I(3.2)}$$

Jelikož

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi, \quad \text{I(3.3)}$$

s ohledem na identitu $\operatorname{rot} \nabla \equiv 0$ pro statické pole bodového náboje platí rovnice

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad \text{I(3.4)}$$

Poli I(2.6) soustavy bodových nábojů odpovídá *potenciál*

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_A \frac{e_A}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|}. \quad \text{I(3.5)}$$

Doposud jsme potenciál Φ spojovali s polem soustavy bodových nábojů (ve vakuu). K existenci potenciálu lze dospět i následující úvahou: Veličina $\int \mathbf{E} \, d\mathbf{l}$ představuje práci, kterou vykoná kladný jednotkový náboj po křivce l . Ze zkušenosti plyne, že v elektrostatickém poli tato práce nezávisí na tvaru křivky (integrační cestě), takže při libovolné uzavřené integrační cestě je

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} = 0. \quad \text{I(3.6)}$$

Pomocí *Stokesovy věty*

$$\oint_l \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = \int_s \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \text{I(3.7)}$$

kde \mathbf{s} je plocha vytvořená uzavřenou křivkou l , rovnice I(3.6) dá

$$\int_s \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Odtud (s ohledem na platnost této rovnice pro libovolnou plochu \mathbf{s}) plyne rovnice I(3.4).

Rovnice I(3.4) a I(2.12) slouží k určení rovnice pro elektrostatický potenciál. Do rovnice I(2.12) dosadíme $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$, a dostaneme tak *Laplaceovu—Poissonovu rovnici*

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad \text{I(3.8)}$$

Symbol

$$\nabla^2 \equiv \text{div grad} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

je Laplaceův operátor. Rovnice typu I(3.8) prvně odvodili P. S. LAPLACE a L. POISSON pro potenciál gravitačního pole.

Rovnice I(3.8) určuje elektrostatický potenciál, který vytváří ve vakuu soustavu nábojů s prostorovou hustotou $\rho \equiv \rho(\mathbf{r})$. Řešení této rovnice se probírá v kursech rovnic matematické fyziky a lze k němu dospět i jednoduchou fyzikální úvahou: Malý bodový náboj de lokalizovaný v bodě \mathbf{r}' vytváří v bodě \mathbf{r} potenciál

$$d\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{de}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Integrací získáme řešení

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \text{I(3.9)}$$

kde $dV' \equiv d^3\mathbf{r}'$ je objemový element oblasti, v níž je soustředěn náboj.

V oblasti bez nábojů ($\rho = 0$) pro potenciál Φ platí Laplaceova rovnice

$$\nabla^2\Phi = 0. \quad \text{I(3.10)}$$

Obdobným způsobem vyjádříme potenciál vytvořený nabitými plochami a křivkami. Je-li po ploše rozložen elektrický náboj s plošnou hustotou $\eta(\mathbf{r}')$, pak na plošném elementu ds' sídlí náboj $de = \eta(\mathbf{r}') ds'$, který lze pokládat (vzhledem k infinitezimálním rozměrům plošného elementu) za bodový. Potenciál $\Phi(\mathbf{r})$, který budí v bodě \mathbf{r} ve vakuu nabitá plocha, je pak dán rovnicí

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\eta(\mathbf{r}') ds'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad \text{I(3.11)}$$

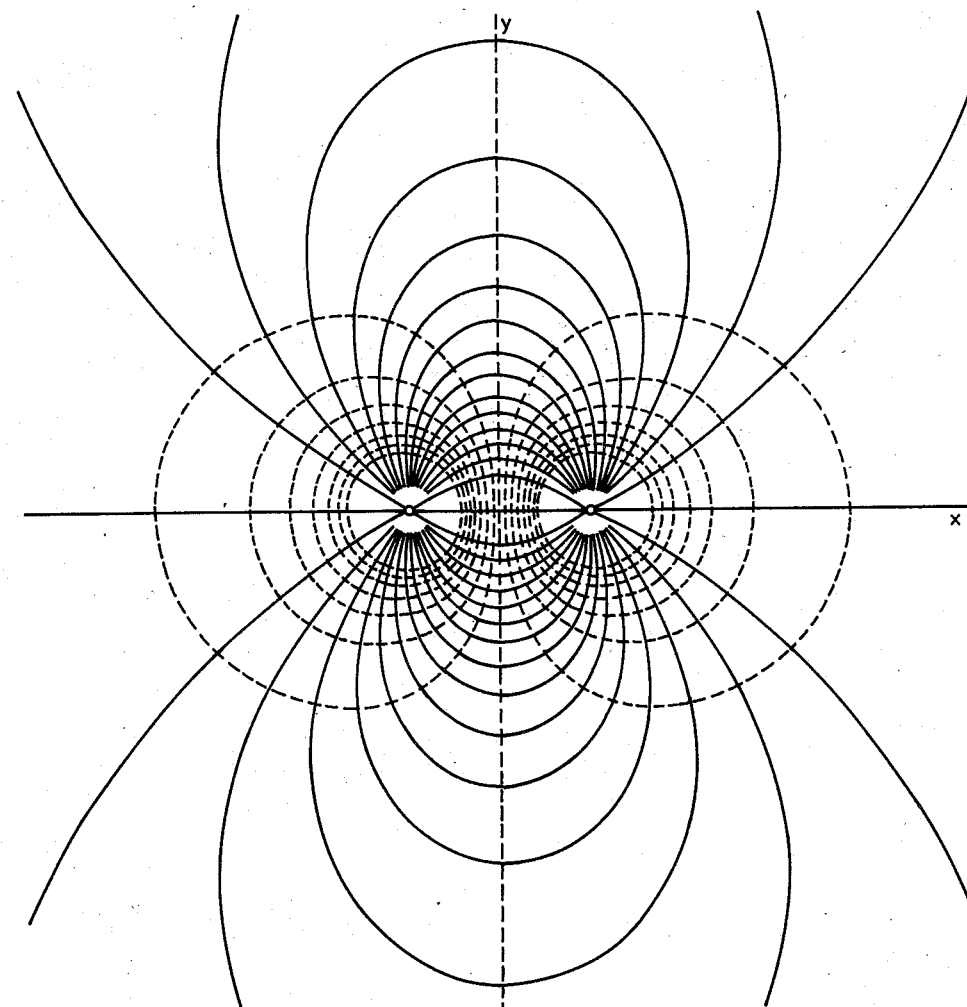
Mějme křivku danou parametrickou rovnicí $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}'(l)$, kde l značí délku oblouku křivky měřenou od vhodně zvoleného bodu na křivce. Ve vakuu vytvoří tato křivka v bodě \mathbf{r} potenciál

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\xi(l) dl}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \text{I(3.11')}$$

kde $\xi(l) dl$ je náboj obloukového elementu dl .

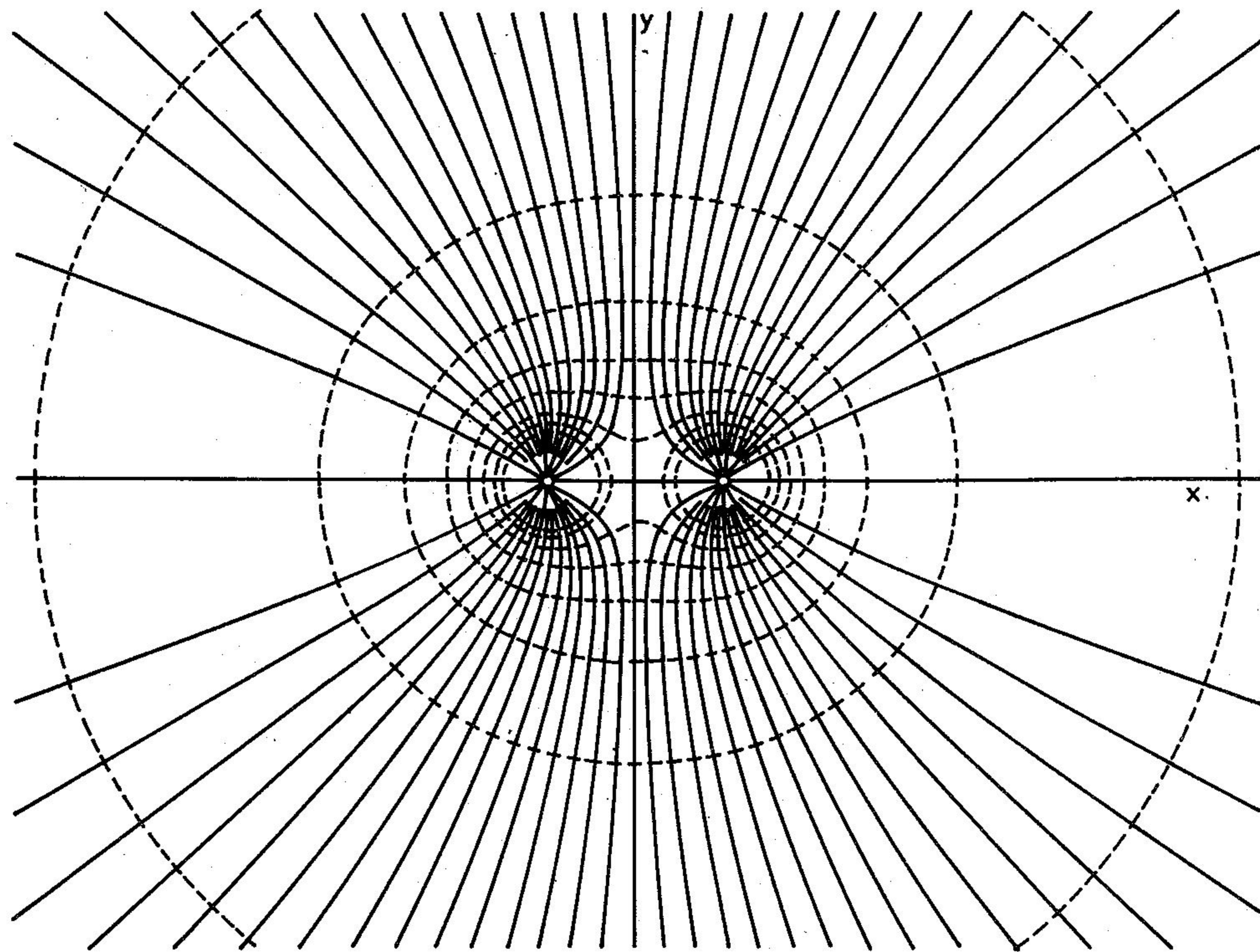
Připomeňme si ještě, že místa se stejnou hodnotou potenciálu nazýváme ekvipotenciálními čarami, popř. plochami. Siločáry a ekvipotenciální čáry dvou nesouhlasných nábojů jsou znázorněny na obr. I.1. a pro dva souhlasné náboje na obr. I.2.

V případě nabité plochy je nutno prozkoumat spojitost potenciálu a jeho

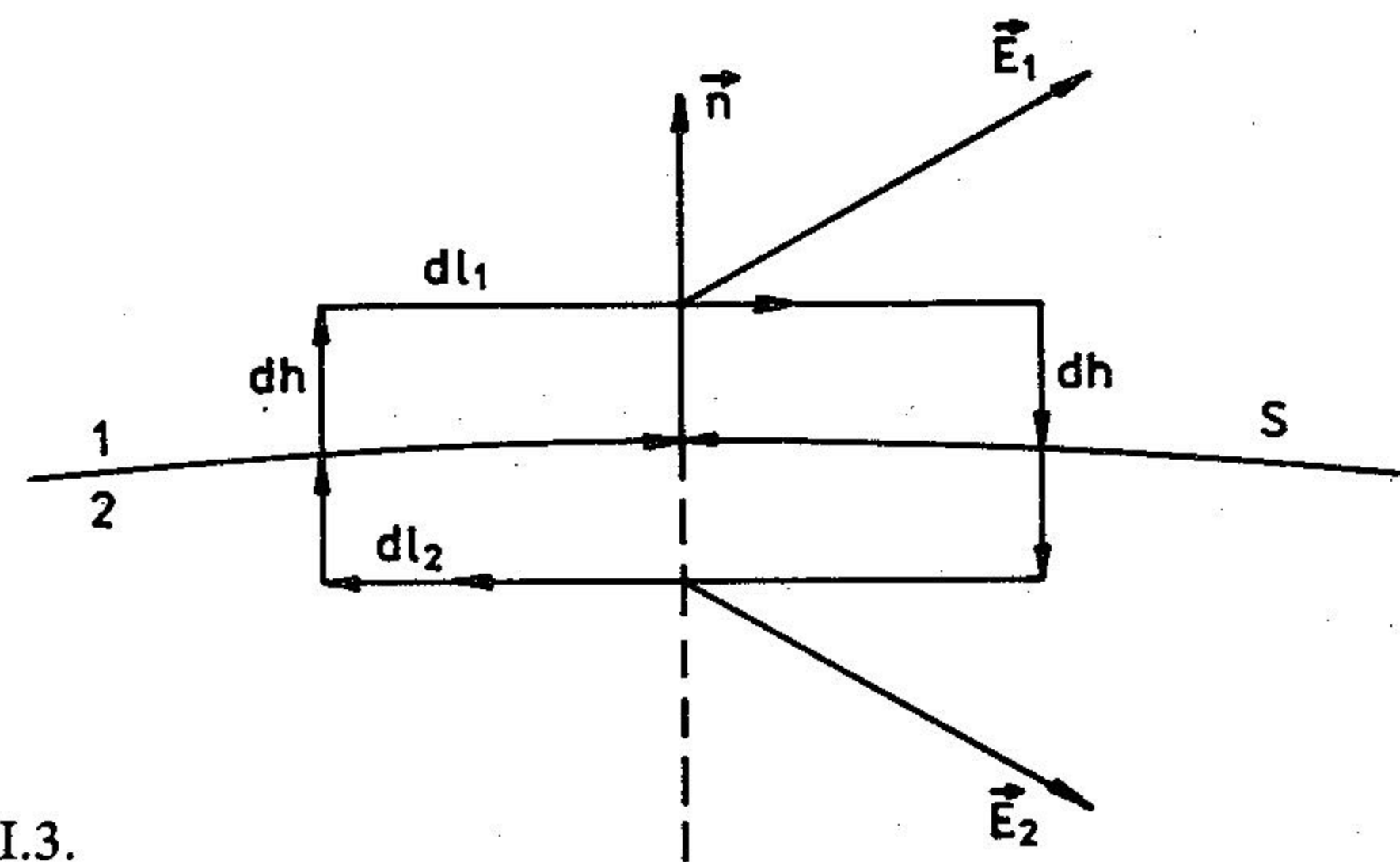


Obr. I.1. Elektrostatické pole dvou nesouhlasných nábojů

derivací při průchodu nabitou plochou. Z vyjádření I(3.10) je ihned vidět, že potenciál nabité plochy zůstává konečným a spojitým i v bodech plochy, tj. při $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. K důkazu stačí položit $R \equiv |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, zavést polární souřadnice R, α a vyjádřit plošný element $ds = R dR d\alpha$. První derivace potenciálu Φ představují složky vektoru \mathbf{E} , proto se obrátíme k rovnicím pro vektor elektrické intenzity \mathbf{E} . Z rovnice $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ plyne $\oint \mathbf{E} dl = 0$. Za uzavřenou integrační křivku zvolíme malý obdélníček, jehož kratší strany protínají plochu \mathbf{s} kolmo a delší probíhají těsně podle plochy na straně 1 a 2 (viz obr. I.3.). Rozepíšeme-li křivkový integrál po této křivce, pak je



Obr. I.2. Elektrostatické pole dvou souhlasných nábojů



Obr. I.3.

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{l} \cong (E_{1t} - E_{2t}) \Delta l.$$

E_{1t} , E_{2t} zde značí tečné složky vektoru \mathbf{E} po obou stranách plochy. Je-li šířka obdélníčku Δh zanedbatelně malá proti jeho délce Δl , pak je

$$E_{1t} - E_{2t} = 0. \quad \text{I(3.12)}$$

Tečné komponenty vektoru \mathbf{E} se tedy při průchodu nabitou plochou mění spojitě. Poněvadž tečna a normála k ploše jsou (podle definice) navzájem kolmé, lze výraz I(3.12) nahradit rovnicí

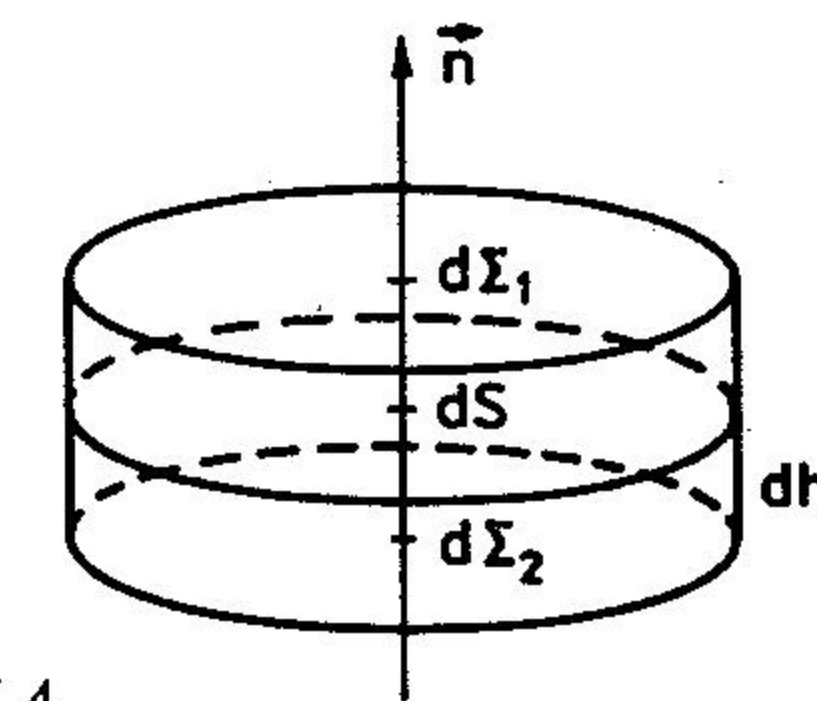
$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \equiv \text{Rot } \mathbf{E} = 0. \quad \text{I(3.13)}$$

Touto rovnicí jsme také definovali tzv. *plošnou rotaci* vektoru. Je-li $\text{Rot } \mathbf{E} = 0$, značí to, že rozdíl tečných komponent tohoto vektoru po obou stranách nějaké plochy je roven nule.

Hraniční podmínku pro normálové komponenty najdeme z Gaussovy věty z elektrostatiky

$$\oint \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = e/\epsilon_0.$$

Integrační plochu \mathbf{s} zvolíme ve tvaru válečku se středem v bodě na ploše \mathbf{s} . Površky válečku nechť protínají tuto plochu kolmo a základny válečku nechť přiléhají těsně ke stranám 1 a 2 této plochy (viz obr. I.4.). Vyšku válečku Δh



Obr. I.4.

volíme tak malou, že velikost pláště je zanedbatelná proti velikosti základen. Gaussovu větu pro takto zvolenou uzavřenou plochu vyjádříme rovnicí (tok pláštěm $d\Sigma_1 = d\Sigma_2$ je nulový)

$$(E_{1n} - E_{2n}) \Delta q = \frac{1}{\epsilon_0} \Delta e.$$

Δq zde označuje velikost podstavy daného válečku a Δe je náboj obsažený uvnitř tohoto válečku. Na rozhraní pak platí

$$\epsilon_0(E_{1n} - E_{2n}) = \eta, \quad \text{I(3.14)}$$

kde $\eta \equiv \Delta e/\Delta q$ je plošná hustota náboje na nabitě ploše. Rozdíl normálových komponent vektoru se nazývá *plošnou divergencí* a značí se Div . Pomocí tohoto označení zapíšeme hraniční podmínku pro normálovou komponentu

$$\mathbf{n}(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \equiv E_{1n} - E_{2n} \equiv \text{Div } \mathbf{E} = \eta/\epsilon_0. \quad \text{I(3.15)}$$

Obě rovnice I(3.13) a I(3.14) lze sjednotit v jedinou vektorovou rovnici

$$\epsilon_0(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = \eta \mathbf{n}. \quad \text{I(3.16)}$$

Při této příležitosti znovu upozorňujeme na orientaci vektoru \mathbf{n} . Tu stranu plochy \mathbf{s} , na níž vektor \mathbf{n} z plochy vystupuje, označujeme vždy indexem 1, stranu druhou indexem 2. Tuto úmluvu budeme všude v této knize dodržovat.

Poznámka: Význam nabitých ploch mimo jiné je v tom, že ve vodičích sídlí elektrický náboj na povrchu; elektrické pole vodiče je tedy polem nabitě plochy.

I.4 Elektrický dipólový moment

Pole soustavy nábojů lze vyjádřit pomocí některých specifických veličin charakterizujících konfiguraci nábojů. Obecně budeme tento problém řešit později; zde zavedeme pouze elektrický dipólový moment, který budeme bezprostředně potřebovat v dalším výkladu.

Budeme vyšetřovat potenciál $\Phi(\mathbf{r})$ na velikých vzdálenostech od nábojů. Při $r_A \ll r$ lze v rovnici I(3.5) použít přibližného vzorce

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|} \approx \frac{1}{r} - (\mathbf{r}_A \nabla) \frac{1}{r} = \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{r} \mathbf{r}_A)}{r^3}. \quad \text{I(4.1)}$$

Tento vztah se snadno získá z Taylorova rozvoje

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = f(\mathbf{r}) + (\mathbf{a} \nabla) f(\mathbf{r}) + \dots,$$

v němž se omezíme na první korekční člen. Po dosazení I(4.1) do I(3.5) dostaneme pro potenciál vyjádření

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \Phi^{(1)}(\mathbf{r}), \quad \text{I(4.2)}$$

kde

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_A e_A \equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{I(4.3)}$$

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{p} \mathbf{r}). \quad \text{I(4.4)}$$

První člen $\Phi^{(0)}$ je Coulombovo pole bodového náboje (celkového náboje soustavy) sídlícího v počátku souřadné soustavy. Je-li soustava elektricky neutrální ($e=0$), první nenulový příspěvek dají další členy rozvoje. Počátek souřadnic volíme v blízkosti nábojů. Člen $\Phi^{(1)}$ odpovídá poli *elektrického dipólového momentu*

$$\mathbf{p} \equiv \sum_A e_A \mathbf{r}_A. \quad \text{I(4.5)}$$

V případě soustavy nábojů rozložených s prostorovou hustotou $\rho(\mathbf{r})$ je postup obdobný. Pro $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ uijeme vzorce I(4.1). Elektrický dipólový moment bude místo I(4.5) definován rovnicí

$$\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) d^3r. \quad \text{I(4.6)}$$

(Čárku u integrační proměnné \mathbf{r}' pro stručnost vypouštíme.)

Všimněme si některých vlastností elektrického dipólového momentu \mathbf{p} . Tato veličina obecně závisí na volbě počátku referenční soustavy. Při posunutí

$$\mathbf{r}'_A = \mathbf{r}_A + \mathbf{a},$$

kde \mathbf{a} je stejné pro všechny náboje, bude

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + e\mathbf{a}.$$

Zde $\mathbf{p}' = \sum_A e_A \mathbf{r}'_A$ je dipólový moment v nové soustavě a $e = \sum_A e_A$ je celkový náboj soustavy bodových nábojů.

Elektrický dipólový moment elektricky *neutrální* soustavy nábojů tedy *nezávisí* na volbě počátku souřadné soustavy.

Vložíme-li do dipólového pole $\Phi^{(1)}$ bodový náboj e , nabude tento náboj v bodě \mathbf{r} potenciální energii

$$U^{(1)} \equiv e\Phi^{(1)} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{p} \mathbf{r}).$$

Veličina

$$\mathbf{E} = -\frac{e\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

představuje intenzitu pole, jež bodový náboj vytvoří v počátku souřadnic (sídle elektrického dipólu). Potenciální energie elektrického dipólu \mathbf{p} v poli \mathbf{E} je tedy

$$U = -\mathbf{p} \mathbf{E} = -pE \cos \vartheta. \quad \text{I(4.7)}$$

Tento vzorec jsme odvodili pro případ, kdy \mathbf{E} je polem bodového náboje. S ohledem na princip superpozice je však tento vzorec platný pro libovolné pole \mathbf{E} .

Na elektrický dipól vložený do pole \mathbf{E} působí síla $\mathbf{F} = -\nabla U$, tj.

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{p} \mathbf{E}). \quad \text{I(4.8)}$$

Pomocí vektorové identity

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{p} \times \text{rot} \mathbf{E} + (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

upravíme sílu na tvar

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad \text{I(4.9)}$$

jelikož v elektrostatickém poli je $\text{rot} \mathbf{E} = 0$. (Při $\text{rot} \mathbf{E} \neq 0$ se ve výrazu pro sílu

objeví dodatečný člen $\mathbf{p} \times \text{rot } \mathbf{E}$.) V homogenním poli \mathbf{E} na elektrický dipól nepůsobí žádná síla.

Otáčivý moment působící na dipól je $K = \partial U / \partial \vartheta = pE \sin \vartheta$. Směr a smysl otáčivého momentu musí být takový, aby dipólem otáčel směrem k poloze, v níž je energie $U^{(1)}$ minimální ($\vartheta = 0$). Je tedy

$$\mathfrak{K} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad \text{I(4.10)}$$

Z výrazu I(4.4) získáme pole $\mathbf{E}^{(1)}$ elektrického dipólu

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \{3(\mathbf{pn})\mathbf{n} - \mathbf{p}\}, \quad \text{I(4.11)}$$

kde $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$.

I.5 Elektrické pole v látkovém prostředí

Rovnice

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0 \quad \text{I(5.1)}$$

slouží k určení elektrostatického pole \mathbf{E} , jež ve vakuu vytvoří soustava volných nábojů se zadanou hustotou náboje ρ .

Volné náboje se mohou pohybovat na makroskopických vzdálenostech (prakticky od jedné hranice tělesa k druhé). Patří sem elektrony v kovech (elektronový plyn), ionty v plynech a elektrolytech, jakož i náboje zavedené do tělesa anebo na jeho povrch. V látkovém prostředí se kromě volných nábojů vyskytují ještě tzv. náboje *vázané* neboli *polarizační*, které se nemohou v tělese volně pohybovat. Každý atom se skládá z kladně nabitého jádra a elektronového obalu. Atomy i molekuly jsou za normálních podmínek elektricky neutrální. Pole vytvořené elektricky neutrální soustavou (např. atomem nebo molekulou) však nemusí být nulové. Taková neutrální soustava vázaných nábojů může vytvořit elektrický dipól, jehož pole je určeno rovnicemi I(4.4) a I(4.11). Uspořádání elektrických nábojů v atomu nebo molekule není neměnné, lze je poměrně snadno ovlivnit zvnějška, např. jejich vložením do nějakého elektrického pole. Působením takového pole se vzájemné seskupení kladných a záporných nábojů uvnitř atomu nebo molekuly pozmění tak, že obecně všechny atomy a molekuly se budou chovat jako elektrické dipóly.

Z hlediska transportu elektrického náboje (elektrického proudu) dělíme látková prostředí na vodiče a nevodiče (izolátory). Toto dělení není ostré, jelikož existuje široká třída špatných vodičů, popř. špatných izolátorů. Kromě toho vodivost lze ovlivnit teplotou, osvětlením apod. K těmto podrobnostem zde přihlížet nebudeme.

Z úvodního kursu fyziky je známo, že ve vodičích je elektrické pole rovno nule

$$\mathbf{E} = 0 \quad (\text{uvnitř vodiče}) \quad \text{I(5.2)}$$

a na povrchu vodiče (na vnější straně) stojí k povrchu všude kolmo. Vložíme-li vodič do vnějšího elektrického pole, shromáždí se část volně pohyblivých elektronů na té straně povrchu vodiče, která je odvrácena od směru intenzity \mathbf{E} vnějšího pole; na části povrchu ve směru pole se objeví kladný náboj kladných iontů. Další stěhování volných elektronů se zastaví, když pole vytvořené povrchovými náboji se uvnitř vodiče přesně vykompenzuje s vnějším polem. Podobně při zeledování vodiče se část volných elektronů přivede na povrch vodiče, popř. se z něj odvádí.

V dielektrickém prostředí se kromě zvnějška přivedených volných nábojů s hustotou ρ budou vyskytovat i polarizační náboje s hustotou $\rho^{(p)} \equiv \rho^{(p)}(\mathbf{r})$. Je-li soustava vázaných nábojů elektricky neutrální, pak

$$\int_V \rho^{(p)} dV = 0,$$

kde se integruje přes celý objem tělesa. V malých částech (malých objemech) však může být tento integrál nenulový, jelikož tento malý objem může obsahovat oblast prostoru, v níž převažují vázané (polarizační) náboje jednoho znaménka.

Zdrojem elektrického pole \mathbf{E} v látkovém prostředí jsou nejen volné, ale i polarizační náboje, proto položíme

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} [\rho + \rho^{(p)}]. \quad \text{I(5.3)}$$

Aby nedošlo k přehlédnutí, připomínáme, že \mathbf{E} , ρ , $\rho^{(p)}$ značí odpovídající makroskopické veličiny. Zavedeme vektor \mathbf{P} vztahem

$$\rho^{(p)} = -\text{div } \mathbf{P}. \quad \text{I(5.4)}$$

Tímto vztahem není zatím \mathbf{P} určeno jednoznačně, jelikož místo \mathbf{P} lze vzít $\mathbf{P}' \equiv \mathbf{P} + \text{rot } \mathbf{A}$, kde \mathbf{A} je libovolný vektor. Tuto nejednoznačnost odstraníme později. Po dosazení I(5.4) do I(5.3) dostaneme

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{I(5.5)}$$

kde nový vektor \mathbf{D} je definován vztahem

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad \text{I(5.6)}$$

Fyzikální význam nových vektorů \mathbf{P} a \mathbf{D} najdeme následující úvahou. Elektrický dipólový moment soustavy polarizačních nábojů vyjádříme ve shodě s I(4.6) vztahem

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \rho^{(p)}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = - \int \mathbf{r} \text{div } \mathbf{P} dV.$$

Ve složkovém zápisu (připomínáme sumační konvenci) je

$$p_i = - \int x_i (\partial P_j / \partial x_j) dV.$$

Integraci můžeme rozšířit na celý prostor tak, že na hranicích tohoto prostoru je $\mathbf{P} = 0$ (a tedy i $\rho^{(p)} = 0$). V integrandu použijeme identity

$$x_i \frac{\partial P_j}{\partial x_j} \equiv -P_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i P_j),$$

což vede k vyjádření

$$p_i = \int P_i dV - \int dV \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i P_j). \quad \text{I(5.7)}$$

Druhý integrál na pravé straně má tvar $\int dV (\partial T_{ij} / \partial x_j)$, kde $T_{ij} = x_i P_j$ je tenzor druhého řádu. Výrazy typu

$$\text{div } T \equiv \partial T_{ij} / \partial x_j \quad \text{I(5.8)}$$

se obvykle nazývají divergencí tenzoru T . Objemový integrál se dá převést na integrál přes uzavřený povrch

$$\int_V dV (\partial T_{ij} / \partial x_j) = \oint_S T_{ij} ds_j. \quad \text{I(5.9)}$$

Pomocí tohoto vztahu dospějeme k vyjádření

$$\int dV \frac{\partial}{\partial x_j} (x_i P_j) = \oint x_i P_j ds_j.$$

Plocha je volena tak, že je na ní všude $\mathbf{P} = 0$, takže vzniklý integrál je nulový. Ze vztahu I(5.7) pak plyne

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{P} dV. \quad \text{I(5.10)}$$

Vektor \mathbf{P} představuje elektrický dipólový moment objemové jednotky (hustotu elektrického dipólového momentu) a nazývá se *vektorem elektrické polarizace*. K teoretickému výpočtu polarizace \mathbf{P} je nutno použít konkrétní představy o stavbě atomů a molekul, výsledky kvantové teorie apod. V makroskopické teorii se vektor \mathbf{P} pokládá za známý z experimentálních výsledků. Zpravidla se užívá lineárního vztahu

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \kappa \mathbf{E}, \quad \text{I(5.11)}$$

kde κ je *elektrická susceptibilita* prostředí. O jiných obecnějších typech závislosti pojednáme v následující kapitole.

Vektor \mathbf{D} se nazývá *vektorem elektrické indukce*. Starší název elektrické posunutí se už dnes nepoužívá, zanechal však své stopy v označení:

Displacement = posunutí. Pole \mathbf{D} představuje pouze tu část pole, které je tvořeno pouze volnými náboji. Platí-li lineární závislost I(5.11), pak je také

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \text{I(5.12)}$$

kde *permitivita*

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \kappa). \quad \text{I(5.13)}$$

Podíl

$$\epsilon^{(r)} \equiv \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \kappa \quad \text{I(5.14)}$$

je *relativní permitivita* (relativní vzhledem k vakuu).

Z rovnice I(5.5) plyne, že na rozhraní dvou prostředí je

$$\text{Div } \mathbf{D} \equiv D_{1n} - D_{2n} = \eta, \quad \text{I(5.15)}$$

kde η je povrchová hustota volných nábojů na rozhraní. Postup je stejný jako při odvozování I(3.14) a fakticky se jedná pouze o záměnu $\epsilon_0 \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{D}$, proto postup nebudeme opakovat. Připomeneme pouze, že indexem 1 označujeme tu stranu plochy (rozhraní), na níž vektor \mathbf{n} z plochy vystupuje, stranu druhou indexem 2.

Hraniční podmínku pro vektor \mathbf{P} najdeme takto: Vezmeme malý objem ΔV zčásti zasahující do prostředí 1 a zčásti do prostředí 2. Celkový polarizační náboj $\Delta e^{(p)}$ v tomto objemu je

$$\int_{\Delta V} \rho^{(p)} dV = \Delta e^{(p)}.$$

Použitím I(5.4) a převedením objemového integrálu na integrál povrchový (Gaussova matematická věta) dostaneme

$$\oint \mathbf{P} d\mathbf{s} = -\Delta e^{(p)}.$$

Odtud plyne skok normálových komponent vektoru polarizace

$$\text{Div } \mathbf{P} \equiv P_{1n} - P_{2n} = -\eta^{(p)}, \quad \text{I(5.16)}$$

kde

$$\eta^{(p)} = \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\Delta e^{(p)}}{\Delta q} \quad \text{I(5.17)}$$

je plošná hustota polarizačních nábojů na rozhraní. Je-li dielektrické těleso ve vakuu ($P_{1n} = 0$, $P_{2n} \equiv P_n$), pak

$$P_n = \eta^{(p)}. \quad \text{I(5.18)}$$

Normálová komponenta vektoru polarizace je na povrchu dielektrika rovna plošné hustotě polarizačního náboje. Z tohoto vztahu se obvykle vychází v úvodním kursu při zavádění vektorů \mathbf{P} a \mathbf{D} .

S ohledem na pozdější reference ještě uvedeme, že diferenciální rovnici I(5.5) odpovídá integrální vztah

$$\oint_S \mathbf{D} \, ds = e. \quad \text{I(5.19)}$$

Tok vektoru elektrické indukce libovolnou uzavřenou plochou je roven celkovému volnému náboji obsaženému uvnitř této uzavřené plochy.

Poznamenejme ještě, že rovnice I(5.5) a I(5.19) jsme získali pro elektrostatické pole. V další části této kapitoly uvidíme, že ty rovnice zůstanou v platnosti i pro časově proměnná pole.

Vztahy I(5.11) a I(5.12) umožňují vyjádřit polarizaci \mathbf{P} rovnicí

$$\mathbf{P} = \frac{\kappa}{\kappa + 1} \mathbf{D}. \quad \text{I(5.20)}$$

Při konstantním κ tomu odpovídá hustota $\rho^{(p)}$ polarizačního náboje

$$\rho^{(p)} = -\operatorname{div} \mathbf{P} = -\frac{\kappa}{\kappa + 1} \operatorname{div} \mathbf{D} = -\frac{\kappa}{\kappa + 1} \rho. \quad \text{I(5.21)}$$

Je-li homogenní dielektrické těleso ($\rho = 0$) polarizováno tím, že je vloženo do vnějšího elektrického pole, nevzniknou uvnitř dielektrika žádné polarizační náboje. Pro plošné náboje η a $\eta^{(p)}$ neplatí úměrnost analogická vztahu I(5.21), poněvadž κ v rovnici I(5.20) se na rozhraní mění skokem. Spojením I(5.16) a I(5.20) dospějeme ke vztahu

$$\eta^{(p)} = P_{2n} - P_{1n} = \frac{\kappa_2}{1 + \kappa_1} D_{2n} - \frac{\kappa_1}{1 + \kappa_1} D_{1n}.$$

Po eliminaci D_{1n} pomocí I(5.15) získáme hledaný vztah

$$\eta^{(p)} = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{1 + \kappa_1} D_{2n} - \frac{\kappa_1}{1 + \kappa_1} \eta. \quad \text{I(5.22)}$$

Ze vztahů $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ dostaneme (při konstantním ε) Laplaceovu—Poissonovu rovnici pro potenciál v dielektrickém prostředí

$$-\nabla^2 \Phi = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \text{I(5.23)}$$

kteřá se od I(3.8) liší pouze záměnou $\varepsilon_0 \rightarrow \varepsilon$. Obdobnou záměnu nutno provést i pro ostatní výrazy pro potenciál.

Hraniční podmínky $D_{1n} - D_{2n} = \eta$, $E_{1t} - E_{2t} = 0$ jsou klíčem k určování polí v tuhých dielektrikách. V dielektriku vyřízneme malou diskovitou dutinu, jejíž tloušťka je zanedbatelně malá vzhledem k jejímu poloměru. K určení indukce orientujeme dutinu tak, aby intenzita uvnitř dutiny byla kolmá k základně dutiny. Nejsou-li na rozhraní volné náboje, je $D_{2n} = D_{1n} = \varepsilon_0 E_{1n}$. Změřením elektrické intenzity v dutině určíme elektrickou indukci v dielektriku. K určení intenzity

v dielektriku orientujeme dutinu tak, aby vektor \mathbf{E} v dutině byl paralelní s podstavou dutiny. Z rovnice $E_{1t} - E_{2t} = 0$ pak plyne, že intenzita pole uvnitř dutiny je stejná jako v dielektriku.

I.6 Energie elektrického pole

Interakční energii U_{AB} dvou nábojů vyjádříme ve tvaru

$$U_{AB} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e_A e_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}.$$

Celková interakční (potenciální) energie všech nábojů je

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_A \sum_{B \neq A} \frac{e_A e_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|}. \quad \text{I(6.1)}$$

Faktor $\frac{1}{2}$ je z toho důvodu, abychom interakční dvojice A, B nezapočítávali dvakrát. Výraz

$$\Phi_A \equiv \Phi(\mathbf{r}_A) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{B \neq A} \frac{e_B}{|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B|} \quad \text{I(6.2)}$$

představuje potenciál vytvořený všemi náboji $B \neq A$ v místě A -tého náboje. Pomocí I(6.2) vyjádříme interakční energii rovnicí

$$U = \frac{1}{2} \sum_A e_A \Phi(\mathbf{r}_A). \quad \text{I(6.3)}$$

Pro prostorově rozložené náboje s hustotou ρ je

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \Phi \, dV. \quad \text{I(6.4)}$$

Potenciál $\Phi(\mathbf{r})$ lze vyjádřit rovnicí I(3.9), čímž vznikne výraz obsahující pouze hustotu

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r \, d^3r'. \quad \text{I(6.5)}$$

Pro plošně rozdělené náboje (s povrchovou hustotou náboje η) je nutno I(6.4) nahradit odpovídajícím plošným integrálem

$$U = \frac{1}{2} \int \eta \Phi \, ds. \quad \text{I(6.6)}$$

Potenciál Φ lze vyjádřit pomocí I(3.10), což dá

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\eta(\mathbf{r})\eta(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds \, ds'. \quad \text{I(6.7)}$$

V obecném případě je interakční energie soustavy nábojů dána součtem výrazů I(6.4) a I(6.6), tj.

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \Phi \, dV + \frac{1}{2} \int \eta \Phi \, ds. \quad \text{I(6.8)}$$

Tento vzorec je matematickým vyjádřením představy *působení na dálku* (*actio in distans*). Podle této představy přispívají k energii pouze ty části prostoru, v níž sídlí náboje. Jelikož jednotlivé náboje mohou být od sebe odděleny prázdným prostorem, znamenalo by to vzájemné působení nábojů přes oblasti prostoru neobsahující energii. Vzorec I(6.8) tedy odpovídá mechanistickým představám, podle nichž jsou sídlem energie elektrické náboje. Vyšetříme vliv prostředí na rovnici I(6.8).

Jelikož ρ a η jsou nenulové pouze uvnitř těles, popř. na jejich povrchu, lze v I(6.8) integrovat přes celý prostor, což nám (spolu s rovnicemi pole) umožní dát tomuto vzorci novou, podstatně hlubší interpretaci.

Dříve než přejdeme k této úpravě, všimneme si otázky, zda-li I(6.8) obsahuje veškerou elektrickou energii. Ve výrazu I(6.8) se totiž vyskytují pouze objemová a plošná hustota volných nábojů. Mohlo by se zdát, že bychom měli ρ a η nahradit součty $\rho + \rho^{(p)}$, $\eta + \eta^{(p)}$. To by ovšem bylo chybné, jelikož bychom vliv prostředí započítali dvakrát: jednou implicitě v potenciálu a podruhé v nábojích.

Hustotu ρ vyjádříme pomocí rovnice pole $\rho = \text{div } \mathbf{D}$ a pak užijeme vektorové identity

$$\Phi \text{ div } \mathbf{D} \equiv \text{div}(\Phi \mathbf{D}) - (\mathbf{D} \nabla \Phi) = \text{div}(\Phi \mathbf{D}) + \mathbf{E} \mathbf{D}.$$

Energie I(6.8) bude nyní výrazem

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \mathbf{D} \, dV + \frac{1}{2} \int \eta \Phi \, ds + \frac{1}{2} \int \text{div}(\Phi \mathbf{D}) \, dV. \quad \text{I(6.9)}$$

Jak jsme již uvedli, integrace se zde vztahují na celý prostor. Poslední integrál převedeme na integrál přes povrch

$$\int \text{div}(\Phi \mathbf{D}) \, dV = \oint \Phi \mathbf{D} \, ds.$$

Plocha \mathbf{s} ohraničuje celou oblast pole, jakož i místa diskontinuit vektoru \mathbf{D} , tj. nabitě plochy. Jsou-li všechny náboje budící dané pole soustředěny v konečné části prostoru, pak na velikých vzdálenostech je

$$\Phi \sim r^{-1}, \quad \mathbf{D} \sim r^{-2}, \quad ds = r^2 \, d\Omega,$$

takže integrand je úměrný $1/r$, a tudíž integrál přes nekonečně vzdálenou uzavřenou plochu vymizí

$$\oint_{s(\infty)} \Phi \mathbf{D}_n \, ds = 0. \quad \text{I(6.10)}$$

Integrál přes povrch \mathbf{s}' nabitých vodičů se vyjádří pomocí skoku normálových komponent

$$\int_{s'} \Phi \mathbf{D} \, ds' = \int \Phi (\mathbf{D}_{2n} - \mathbf{D}_{1n}) \, ds = - \int \eta \Phi \, ds.$$

Dospěli jsme tak k výsledku

$$\int \text{div}(\Phi \mathbf{D}) \, dV = - \int \eta \Phi \, ds.$$

Druhý a třetí člen v I(6.9) se tedy vzájemně vykompenzují; energii U lze pak vyjádřit rovnicí

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \mathbf{D} \, dV. \quad \text{I(6.11)}$$

Podstatné na tomto výrazu je, že k energii přispívá celá oblast pole, tedy i ta část prostoru, kde nejsou žádné náboje. To nám umožňuje interpretovat veličinu

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{D} \quad \text{I(6.12)}$$

jako *hustotu energie elektrického pole*. Energie elektrostatického působení tak „přesídlila“ z nábojů do celého prostoru, přičemž lze mluvit o hustotě elektrické energie v celém prostoru.

Pojem hustoty energie pole však nabude svého pravého smyslu a postavení až v časově proměnných polích, kdy lze mluvit nejen o hustotě energie, ale i o toku energie, tj. o stěhování energie pole od místa k místu.

Poznámka: Často se tvrdí, že výrazy I(6.8) a I(6.11) jsou matematicky ekvivalentní. K tomuto tvrzení je nutno připojit několik poznámek. Při transformaci výrazu I(6.8) jsme položili integrál $\int \Phi \mathbf{D} \, ds$ přes nekonečně vzdálenou plochu rovným nule. Tím jsme se fakticky omezili na pole, jež ubývají se vzdáleností dostatečně rychle $\Phi \sim r^{-1}$, $\mathbf{D} \sim r^{-2}$. Podstatné je, že existence takových polí není v rozporu s výchozími rovnicemi elektrostatiky, avšak neméně důležitou je skutečnost, že existence takových polí není automatickým (matematickým) důsledkem těchto rovnic. Při důkazu nulovosti uvedeného integrálu přes nekonečně vzdálený povrch jsme fakticky předpokládali soustředění nábojů v jisté konečné oblasti prostoru, což nelze pokládat za důsledek výchozích rovnic pole. Anulování povrchového integrálu lze tedy pokládat za podmínku prostorové lokalizace nábojů. Teprve tato dodatečná podmínka prostorové lokalizace nábojů vede k prostorové lokalizaci energie.

I.7 Magnetická indukce. Lorentzova síla

Magnetické jevy byly původně objeveny pomocí přírodních magnetů (magnetovec Fe_3O_4). Magnetovec má schopnost přitahovat železné piliny a některé jiné kovy

a slitiny. Toto magnetické působení se předvádí pomocí známých pilinových obrazců.

Přírodní (ani uměle zhotovené) magnety však nevykazují magnetické vlastnosti po celém povrchu stejně. Dvě místa, na nichž se tato vlastnost projevuje nejvýrazněji, se nazývají póly magnetu. Zatímco dvě souhlasně elektricky nabitá tělesa se vždycky od sebe odpuzují, u zmagnetovaných těles je tomu jinak: kterékoliv dva magnety se mohou buď přitahovat, nebo od sebe odpuzovat v závislosti na jejich vzájemné orientaci. Mezi elektrickými a magnetickými jevy existují i další rozdíly. Jestliže dva póly magnetu od sebe oddělíme tím, že magnet rozdělíme (rozložíme), vzniknou dva nové magnety, z nichž každý má opět dva opačné póly. V tomto dělení magnetu můžeme pokračovat až do molekulární nebo atomární úrovně; molekuly a atomy látky, z nichž se magnet skládá, se opět chovají jako miniaturní magnety — dipóly. Dnes víme, že i atomární částice (proton, neutron, elektron), jakož i řada tzv. elementárních částic mají magnetický dipólový moment. Izolovaný magnetický pól jednoho znaménka (obdoba elektrického náboje) — *magnetický monopol* — se doposud (1982) nepodařilo najít, proto je nutno z neexistence izolovaných magnetických nábojů vycházet při teorii magnetických jevů.

Dánský fyzik CHRISTIAN OERSTED (1777—1851) v roce 1820 zjistil, že magnetické pole lze také vytvořit elektrickým proudem: elektrický proud působí na permanentní magnety, popř. na jiné proudy. Oerstedův současník ANDRÉ MARIE AMPÈRE (1775—1836) z toho usoudil, že magnetické vlastnosti látek jsou určeny krouživými proudy v atomech a molekulách těchto látek.

Magnetické pole (nezávisle na tom, zdali se jedná o pole permanentního magnetu anebo magnetické pole elektrického proudu) se vyznačuje tím, že na elektrický náboj v klidu nepůsobí žádnou silou. (To je významný rozdíl oproti působení elektrického pole na náboj.) Při pohybu náboje v magnetickém poli rychlostí \mathbf{v} působí na náboj síla \mathbf{F} , která je úměrná náboji částice. Vychylování proudu nabitých částic magnetickým polem je základem činnosti mnoha známých technických zařízení.

V každém bodě magnetického pole lze najít dva navzájem opačné směry, které se vyznačují tím, že když se náboj pohybuje s nimi rovnoběžně, nepodléhá (ze strany magnetického pole) žádné síle. Při pohybu náboje stejnou rychlostí kolmo na tyto směry má vzniklá síla maximální hodnotu. Tato síla je úměrná rychlosti, je kolmá na rychlost náboje a na zmíněné význačné směry v daném bodě pole.

Vektor

$$\mathbf{B} = \frac{1}{ev^2} \mathbf{F} \times \mathbf{v} \quad \text{I(7.1)}$$

nazýváme *vektorem magnetické indukce* nebo zkráceně *magnetickou indukcí*. Jednotkou je indukce v tom bodě pole, v němž na bodový náboj 1 C pohybující se rychlostí 1 m/s působí síla 1 N. Tato jednotka — tesla — má rozměr $1 \text{ T} = \text{N A}^{-1} \text{ m}^{-1}$ (NIKOLA TESLA, 1856—1943).

Síla vystupující v I(7.1) je vždy kolmá na směr rychlosti, což vyjádříme rovnicí

$$\mathbf{Fv} = 0. \quad \text{I(7.2)}$$

Magnetická síla proto nekoná práci ($\mathbf{F} d\mathbf{r} = 0$), což je významný rozdíl oproti elektrické síle.

Rovnice I(7.1) a I(7.2) určují vektorový a skalární součin síly \mathbf{F} s rychlostí \mathbf{v} . Pomocí těchto rovnic lze řešit obrácenou úlohu: vyjádřit sílu \mathbf{F} pomocí indukce \mathbf{B} a rychlosti \mathbf{v} . Postup je jednoduchý. Rovnici I(7.1) vynásobíme zleva vektorově vektorem \mathbf{v} , což dá

$$e\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{v^2} \mathbf{v} \times [\mathbf{F} \times \mathbf{v}].$$

Pomocí vektorové identity

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b}(\mathbf{ca}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$$

pak s ohledem na I(7.2) dostaneme pro sílu \mathbf{F} vyjádření

$$\mathbf{F} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad \text{I(7.3)}$$

Vektor \mathbf{v} vystupující v této rovnici je (s ohledem na definiční vztah I(7.1)) kolmý na vektor indukce \mathbf{B} . Rovnice I(7.3) však platí při libovolné orientaci vektorů \mathbf{v} a \mathbf{B} . Libovolnou rychlost \mathbf{v} rozložíme na složku kolmou (\mathbf{v}_\perp) a paralelní (\mathbf{v}_\parallel) k vektoru indukce. Ve vektorovém součinu $\mathbf{v} \times \mathbf{B} = (\mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel) \times \mathbf{B} = \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}$ se uplatní pouze složka kolmá.

Rovnice I(7.3) představuje Lorentzovu sílu působící na elektrický náboj pohybující se rychlostí \mathbf{v} v magnetickém poli \mathbf{B} . S touto rovnicí se v dalším vícekrát setkáme, proto ji přepíšeme ještě v alternativním tvaru: na malý náboj $de = q dV$ bude v poli \mathbf{B} působit síla

$$d\mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} q dV. \quad \text{I(7.4)}$$

Veličina

$$\mathbf{j} = q\mathbf{v} \quad \text{I(7.5)}$$

představuje vektor proudové hustoty elektrického proudu. Síla $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dV$ působící na jednotkový objem je dána rovnicí

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad \text{I(7.6)}$$

Rovnice se často upravuje pro tzv. lineární vodič. Označíme-li Δq průřez tohoto vodiče a Δl jeho délkový element, pak objemový element $\Delta V = \Delta q \cdot \Delta l$. Vektor \mathbf{j} má v lineárním vodiči směr délkového elementu, takže je

$$\mathbf{j} dV = \mathcal{I} dl. \quad \text{I(7.7)}$$

Zde $\mathcal{I} = j\Delta q$ je konstantní proud protékající lineárním vodičem. Pomocí vztahů

I(7.6) a I(7.7) dostaneme pro sílu $d\mathbf{F}$ působící na délkový element $d\mathbf{l}$ vodiče vyjádření

$$d\mathbf{F} = -\mathcal{I}[\mathbf{B} \times d\mathbf{l}]. \quad \text{I(7.8)}$$

Poslední rovnici lze převést pomocí plošného integrálu (viz úlohy k této kapitole). Celková síla působící na vodič bude

$$\mathbf{F} = \mathcal{I} \int (d\mathbf{s} \text{ grad}) \mathbf{B}, \quad \text{I(7.9)}$$

popř. ve složkovém tvaru

$$F_i = \mathcal{I} \int ds_j (\partial B_i / \partial x_j). \quad \text{I(7.10)}$$

Celková síla působící na uzavřený vodič v homogenním magnetickém poli ($\nabla \mathbf{B} = 0$) je nulová. Pro moment síly se dá odvodit výraz

$$\mathbf{M} = \mathcal{I}[\mathbf{s} \times \mathbf{B}]. \quad \text{I(7.11)}$$

Odvození vzorců I(7.9) a I(7.11) je provedeno v úlohách k této kapitole.

Podobně jako pro elektrické pole zavádíme i magnetický indukční tok plochou \mathbf{s}

$$\psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}. \quad \text{I(7.12)}$$

Z experimentů plyne, že magnetický indukční tok libovolnou uzavřenou plochou je vždy roven nule

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0. \quad \text{I(7.13)}$$

Pomocí Gaussovy věty je $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \int dV \text{ div } \mathbf{B} = 0$, a tedy i

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad \text{I(7.14)}$$

Vztahy I(7.13) a I(7.14) platí v libovolném prostředí pro libovolné i časově proměnné pole a patří k základním rovnicím elektromagnetického pole. Tyto rovnice vyjadřují neexistenci izolovaných magnetických nábojů. Pro elektrickou indukci je $\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = e$, popř. $\text{div } \mathbf{D} = \rho$. Srovnání s magnetickou obdobou těchto rovnic vede k závěru, že magnetický náboj $e^{(m)}$ je v libovolném objemu vždy nulový.

Z rovnice I(7.13) plyne, že na rozhraní dvou prostředí jsou normálové komponenty vektoru \mathbf{B} spojitě

$$\text{Div } \mathbf{B} \equiv B_{1n} - B_{2n} = \mathbf{n}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0. \quad \text{I(7.15)}$$

I.8 Magnetické pole stacionárního proudu.

Vektor magnetizace a magnetické intenzity

Indukce \mathbf{B} magnetického pole vytvořeného elektrickým proudem závisí na tvaru vodičů, na protékajících proudech a na poloze bodu, v němž indukci \mathbf{B} měříme.

JEAN BAPTISTE BIOT (1774—1862) a FELIX SAVART (1791—1841) v roce 1820 zjistili, že magnetické indukční čáry v okolí dlouhého přímého vodiče protékaného stacionárním proudem \mathcal{I} jsou koncentrické kružnice se středem ve vodiči, přičemž B je přímo úměrné proudu \mathcal{I} a nepřímo úměrné vzdálenosti r od středu vodiče. Výsledky jejich měření lze shrnout do rovnice

$$B = k_1 \frac{\mathcal{I}}{r}. \quad \text{I(8.1)}$$

Konstanta úměrnosti k_1 závisí na prostředí obklopujícím vodiče a její číselná hodnota závisí na volbě měřicích jednotek.

Je-li v okolí vodičů vakuum, zapíšeme rovnici I(8.1) ve tvaru

$$B = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi r}. \quad \text{I(8.2)}$$

Univerzální konstanta μ_0 zvaná permeabilita vakua má v soustavě SI hodnotu

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1} \quad \text{I(8.3)}$$

Mezi konstantami ϵ_0 , μ_0 a rychlostí světla ve vakuu c platí definiční vztah jako důsledek definičních vztahů I(2.3) a I(8.3)

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1. \quad \text{I(8.4)}$$

Z rovnice I(8.2) plyne, že součin indukce B a délky kružnice $2\pi r$ je úměrný proudu \mathcal{I} . Tento výsledek přivádí k myšlence, že cirkulace vektoru \mathbf{B} podél libovolné křivky l obsahující vodiče ve svém vnitřku je přímo úměrná proudu protékajícímu ve vodičích. Tento předpoklad vyjádřený rovnicí

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \mathcal{I} \quad \text{I(8.5)}$$

se ukázal být správným (byl experimentálně ověřen) pro vodiče libovolných tvarů. Aby nedošlo k přehlédnutí, připomínáme ještě jednou, že rovnice I(8.5) platí pro pole \mathbf{B} , jež ve vakuu vytvoří soustava stacionárních proudů.

Integrální vztah I(8.5) lze nahradit jistou diferenciální rovnicí, kterou si nyní odvodíme. Proud \mathcal{I} vyjádříme integrálem přes průřez vodiče

$$\mathcal{I} = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}.$$

Jelikož \mathbf{j} je nenulové pouze uvnitř vodiče, lze v této rovnici integrovat přes libovolnou plochu, uvnitř níž leží vodiče. Levou stranu rovnice I(8.5) upravíme pomocí Stokesovy věty

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int d\mathbf{s} \cdot \text{rot } \mathbf{B}.$$

Poslední dvě rovnice nám umožňují převést I(8.5) na tvar

$$\int (\text{rot } \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{j}) \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Platnost této rovnice pro libovolnou plochu (obsahující vodiče ve svém vnitřku) vyžaduje, aby byla splněna diferenciální rovnice

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad \text{I(8.6)}$$

Zdrojem magnetického pole jsou obvykle elektrické proudy. V látkovém prostředí budou kromě proudů \mathbf{j} volných nábojů přispívat také vázané magnetizační proudy $\mathbf{j}^{(m)}$ tekoucí uvnitř atomů a molekul. Místo proudů $\mathbf{j}^{(m)}$ zavedeme vektor magnetizace \mathbf{M} vztahem (případ, kdy zdrojem pole nejsou proudy, zde neuvažujeme)

$$\mathbf{j}^{(m)} = \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad \text{I(8.7)}$$

V další části tohoto článku dáme vektoru \mathbf{M} jinou interpretaci.

Pro pole \mathbf{B} vytvořené soustavou proudů opět platí princip superpozice. Z toho důvodu budeme pole \mathbf{B} v látkovém prostředí popisovat rovnicí

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{j} + \mathbf{j}^{(m)}). \quad \text{I(8.8)}$$

Proudů $\mathbf{j}^{(m)}$ vyjádříme rovnicí I(8.7). Magnetické pole v látkovém prostředí bude vyhovovat rovnici

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}. \quad \text{I(8.9)}$$

Vektor

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{I(8.10)}$$

se z historických důvodů nazývá vektorem intenzity magnetického pole, ač toto označení by spíše patřilo vektoru \mathbf{B} , jenž určuje silové účinky.

Vektor \mathbf{M} není zatím určen jednoznačně, jelikož — s ohledem na identitu $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \equiv 0$ — lze místo \mathbf{M} vzít $\mathbf{M}' \equiv \mathbf{M} + \operatorname{grad} f$, kde f je libovolná diferencovatelná funkce.

S ohledem na pozdější reference uvedeme ještě integrální formu rovnice I(8.9)

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \mathcal{I}. \quad \text{I(8.11)}$$

(Při úpravě jsme užili Stokesovy věty.) Cirkulace vektoru \mathbf{H} podél libovolné křivky obklopující vodič je rovna proudu protékajícímu vodičem.

Výpočet vektoru \mathbf{M} je spojen s konkrétními představami (modelem) o molekulárních proudech. Tím se také získá vektor \mathbf{H} . V makroskopické teorii se bere mezi \mathbf{M} a \mathbf{H} nějaký experimentálně zjištěný vztah. Čtenář zajisté ví, že pro většinu látek (s výjimkou látek feromagnetických) lze použít lineárního vztahu

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad \text{I(8.12)}$$

kde χ je magnetická susceptibilita. (O jiných typech závislostí pojednáme podrobněji v následující kapitole.) Vztahy I(8.10) a I(8.12) pak vedou k lineárnímu

vztahu mezi vektory magnetické indukce a magnetické intenzity

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} \equiv \mu \mathbf{H}. \quad \text{I(8.13)}$$

Koeficient úměrnosti $\mu \equiv \mu_0 (1 + \chi)$ se nazývá permeabilitou prostředí, podíl

$$\mu^{(r)} \equiv \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi \quad \text{I(8.14)}$$

je relativní (vzhledem k vakuu) permeabilita prostředí. Látky s $\chi > 0$ nazýváme paramagnetické, při $\chi < 0$ jsou látky diamagnetické. Několik příkladů poskytneme představu o číselných hodnotách: $\chi(\text{N}) = 0,013 \cdot 10^{-6}$, $\chi(\text{A}) = 23 \cdot 10^{-6}$, $\chi(\text{Pt}) = 360 \cdot 10^{-6}$, $\chi(\text{H}) = -0,063 \cdot 10^{-6}$, $\chi(\text{Cu}) = -8,8 \cdot 10^{-6}$, $\chi(\text{Bi}) = -176 \cdot 10^{-6}$.

Rovnice I(8.6) a I(8.9) mohou platit pouze pro magnetické pole stacionárního proudu. Zapůsobíme-li na obě strany těchto rovnic operací divergence, pak s ohledem na identitu $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ musí také být $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, což je podmínkou I(1.10) stacionárnosti proudu. O významném Maxwellově zobecnění těchto rovnic pro nestacionární proudy a pole pojednáme v další části této kapitoly.

Nyní přejdeme k vyjasnění fyzikálního významu vektoru \mathbf{M} . Připomeneme si nejdříve, že magnetický dipólový moment vytvořený proudy \mathbf{j} je dán vztahem

$$\mathbf{m} \equiv \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}] \, dV. \quad \text{I(8.15)}$$

K odvození tohoto výrazu se ještě vrátíme. Zde si ukážeme, že v uvedeném výrazu je obsažena známá věta o ekvivalenci proudu a magnetické dvojvrstvy. Pro tenký vodič je (viz I(7.7)) $\mathbf{j} \, dV = \mathcal{I} \, d\mathbf{l}$, kde \mathcal{I} je celkový proud protékající vodičem a $d\mathbf{l}$ je délkový element vodiče. Dostáváme tak

$$\mathbf{m} = \frac{\mathcal{I}}{2} \oint [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}] = \mathcal{I} \mathbf{s}, \quad \text{I(8.16)}$$

jelikož $\mathbf{s} = \frac{1}{2} \oint [\mathbf{r} \times d\mathbf{l}]$ je plocha vytvořena vodičem. Obráceným postupem lze dospět k vyjádření I(8.15). Tolik nám pro ilustraci postačí k tomu, abychom mohli vyjasnit fyzikální smysl vektoru \mathbf{M} .

Magnetický dipólový moment vytvořený proudy $\mathbf{j}^{(m)}$ bude určen rovnicí

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{j}^{(m)}] \, dV = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{M}] \, dV. \quad \text{I(8.17)}$$

Pro i -tou složku vektoru $\mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{M}$ máme z definičních vztahů

$$[\mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{M}]_i = e_{ijk} x_j \operatorname{rot}_k \mathbf{M} = e_{ijk} e_{kls} x_j (\partial M_s / \partial x_l).$$

Pomocí vztahu

$$e_{ijk} e_{kls} = \delta_{il} \delta_{js} - \delta_{is} \delta_{jl}$$

po jednoduché úpravě dostaneme

$$[\mathbf{r} \times \operatorname{rot} \mathbf{M}]_i = 2M_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (\mathbf{r} \mathbf{M}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (M_i x_j). \quad \text{I(8.18)}$$

Tento vztah dosadíme do I(8.17). První člen na pravé straně dá k magnetickému momentu příspěvek $\int M_i dV$, popř. ve vektorovém zápisu $\int \mathbf{M} dV$. Druhý člen je i -tou složkou gradientu skalární funkce $\varphi \equiv \mathbf{M}r \equiv M_i x_j$. Ze vztahu

$$\int dV \nabla \varphi = \oint \varphi ds \quad \text{I(8.19)}$$

získáme vyjádření

$$\int \nabla(\mathbf{M}r) dV = \oint (\mathbf{M}r) ds.$$

Poslední člen má tvar divergence tenzoru $T_{ij} \equiv M_i x_j$. Ve shodě s matematickým teorémem I(5.9) platí

$$\int dV \frac{\partial}{\partial x_j} (M_i x_j) = \oint M_i x_j ds_j = \oint M_i(r ds).$$

Získali jsme tak integrální vztah

$$\int [\mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{M}] dV = 2 \int \mathbf{M} dV + \oint (\mathbf{M}r) ds - \oint \mathbf{M}(r ds).$$

Poslední dva členy na pravé straně lze sjednotit pomocí dvojitého vektorového součinu

$$\mathbf{r} \times [ds \times \mathbf{M}] = (\mathbf{M}r) ds - \mathbf{M}(r ds)$$

na konečný výsledek

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r} \times \text{rot } \mathbf{M}] dV = \int \mathbf{M} dV + \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times [ds \times \mathbf{M}]. \quad \text{I(8.20)}$$

Integrace v rovnici I(8.17) se provádí pouze přes oblast látkového prostředí, lze ji však rozšířit na celý prostor, jelikož tam je $\mathbf{M} = 0$ a $\mathbf{j}^{(m)} = 0$. Zvolíme-li integrační plochu vně látkových prostředí, povrchový integrál v I(8.20) dá nulu, takže pro magnetický moment (vytvořený vázanými proudy) platí

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dV. \quad \text{I(8.21)}$$

Vektor \mathbf{M} má tedy význam objemové hustoty magnetického dipólového momentu vytvořeného vázanými (molekulárními) proudy v látkovém prostředí.

Závěrem uvedeme hraniční podmínky pro vektor \mathbf{H} . Postup je stejný jako při odvozování rovnic I(3.12) a I(3.13). Integrační cestu v I(8.11) zvolíme ve tvaru malého obdélníku $\Delta l \gg \Delta h$, což vede ke vztahu

$$(H_{1t} - H_{2t})\Delta l = j\Delta l\Delta h = \Delta \mathcal{J} \equiv i\Delta l \cdot \Delta h,$$

kde $\Delta \mathcal{J}$ je proud protékající obdélníkem $\Delta l \cdot \Delta h$. Limitováním $\Delta h \rightarrow 0$ pak máme

$$H_{1t} - H_{2t} = i, \quad \text{I(8.22)}$$

kde $i = \lim(j\Delta h)$ je hustota plošného proudu tekoucího rozhraním. Ve vektorovém tvaru hraniční podmínka zní

$$\text{Rot } \mathbf{H} \equiv \mathbf{n} \times [\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2] = \mathbf{i}. \quad \text{I(8.23)}$$

I.9 Vektorový potenciál

Z rovnice I(7.14) plyne, že \mathbf{B} se dá vyjádřit jako rotace nějaké (zatím libovolné diferencovatelné) vektorové funkce $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r})$

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad \text{I(9.1)}$$

Z důvodů, které vysvitnou později, se vektor \mathbf{A} nazývá *vektorovým potenciálem*.

K vektoru \mathbf{A} lze přičíst gradient ∇f libovolné diferencovatelné skalární funkce, aniž by se při tom změnila indukce \mathbf{B} ($\text{rot grad } f \equiv 0$). Při kalibrační transformaci potenciálu

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \quad \text{I(9.2)}$$

se indukce $\mathbf{B}' = \text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$ nezmění. Při definici vektorového potenciálu máme tedy k dispozici diferencovatelnou funkci, kterou můžeme volit libovolně, aniž by se to odrazilo na indukci \mathbf{B} . Tuto nejednoznačnost pomocné veličiny \mathbf{A} využijeme k tomu, aby rovnice pro \mathbf{A} měla výhodný tvar.

Z rovnice I(9.2) plyne

$$\text{div } \mathbf{A}' = \text{div } \mathbf{A} + \nabla^2 f.$$

Výraz $\text{div } \mathbf{A}$ je skalární funkcí souřadnic. Doposud libovolnou kalibrační funkci f zvolíme tak, aby byla řešením rovnice

$$\nabla^2 f = -\text{div } \mathbf{A}.$$

Tato podmínka má tvar Laplaceovy—Poissonovy rovnice pro kalibrační funkci. Při zadaném $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r})$ takové řešení existuje. Nový vektorový potenciál pak bude vyhovovat vedlejší (kalibrační) podmínce $\text{div } \mathbf{A}' = 0$. Vynecháme-li čárku u označení potenciálu, zapíšeme vedlejší podmínku rovnicí

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad \text{I(9.3)}$$

Tato rovnice pro vektorový potenciál je speciálním případem obecnější *Lorentzovy podmínky*, s níž se seznámíme v kap. X.

K určení rovnice pro vektorový potenciál vyjdeme z rovnice I(8.9), kterou pro homogenní izotropní prostředí ($\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$) zapíšeme ve tvaru

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{j}. \quad \text{I(9.4)}$$

Po dosazení $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ a užití vektorové identity $\text{rot rot } \mathbf{A} \equiv \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$ získáme pro \mathbf{A} rovnici

$$\text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{j}. \quad \text{I(9.5)}$$

V této rovnici jsou komponenty vektoru \mathbf{A} promíchány, takže I(9.5) je soustava tří

vázaných rovnic. Nyní je vidět výhodnost podmínky I(9.3), která umožňuje napsat pro \mathbf{A} rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}. \quad \text{I(9.6)}$$

V kartézské soustavě máme tři separované rovnice pro složky A_x , A_y , A_z , přičemž pro každou složku platí rovnice Laplaceova—Poissonova typu.

S ohledem na analogii rovnic I(9.6) a I(3.8) můžeme vektorový potenciál vyjádřit rovnicí

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad \text{I(9.7)}$$

Přímým výpočtem (viz příklad k této kapitole) se přesvědčíme, že tento potenciál vyhovuje vedlejší podmínce $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Výhodnost této podmínky je také v tom, že je přirozeně kompatibilní s rovnicí kontinuity pro stacionární proud ($\text{div } \mathbf{j} = 0$): je-li $\text{div } \mathbf{A} = 0$, pak z I(9.6) plyne $\text{div } \mathbf{j} = 0$.

Rovnice I(9.7) platí za předpokladu lineárního vztahu $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Snadno lze odvodit rovnici nezávislou na tomto předpokladu. Klíčem je rovnice I(8.8), z níž snadno odvodíme řešení

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} d^3 r' + \int \frac{\text{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{R} d^3 r' \right]. \quad \text{I(9.8)}$$

Zde $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ a symbol rot' značí operaci rot podle čárkovaných souřadnic.

Z vyjádření I(9.7) pomocí vztahu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ po dalších jednoduchých úpravách získáme známý Biotův—Savartův zákon

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{1}{R^3} [\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}] d^3 r', \quad \text{I(9.9)}$$

kde \mathbf{R} je průvodič z bodu \mathbf{r}' do bodu pozorování \mathbf{r} . Pro tenké vodiče se nahradí $\mathbf{j} dV' = \mathcal{J} d\mathbf{l}'$, což dá

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu \mathcal{J}}{4\pi} \int \frac{1}{R^3} [d\mathbf{l}' \times \mathbf{R}]. \quad \text{I(9.10)}$$

Závěrem odvodíme slíbený výraz I(8.15) pro magnetický dipólový moment. V rovnici I(9.7) položíme $\mu = \mu_0$ a pro veliké vzdálenosti od proudů uijeme rozvoje I(4.1). Potenciál \mathbf{A} vyjádříme ve tvaru součtu

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)} + \mathbf{A}^{(1)} + \dots, \quad \text{I(9.11)}$$

kde

$$\mathbf{A}^{(0)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r', \quad \text{I(9.12)}$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \int (\mathbf{r}\mathbf{r}') \mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad \text{I(9.13)}$$

První člen je pro stacionární proudy roven nule. Zavedeme-li proudové trubice, pak $\mathbf{j} dV' = \mathcal{J} d\mathbf{l}'$ a dále

$$\int \mathbf{j} dV' = \mathcal{J} \oint d\mathbf{l}' = 0.$$

Tím je dokázáno, že

$$\mathbf{A}^{(0)} = 0. \quad \text{I(9.14)}$$

Prvním nenulovým členem může být $\mathbf{A}^{(1)}$, jehož i -tou složku vyjádříme rovnicí

$$A_i^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} x_k \int x'_k j'_i d^3 r', \quad \text{I(9.15)}$$

kde $\mathbf{j}' \equiv \mathbf{j}(\mathbf{r}')$. Pomocí vztahu (viz příklad I.10)

$$\int x'_k j'_i d^3 r' = - \int x'_i j'_k d^3 r' \quad \text{I(9.16)}$$

upravíme $A_i^{(1)}$ ve tvaru

$$A_i^{(1)} = \frac{\mu_0 x_k}{4\pi r^3} \frac{1}{2} \int (x'_k j'_i - x'_i j'_k) d^3 r'. \quad \text{I(9.17)}$$

Tento potenciál splňuje Lorentzovu podmínku

$$\text{div } \mathbf{A}^{(1)} \equiv (\partial A_i^{(1)} / \partial x_i) = 0.$$

Integrál v I(9.17) lze vyjádřit pomocí vektorového součinu

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')] d^3 r' \quad \text{I(9.18)}$$

a vyjádřit pak vektorový potenciál

$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [\mathbf{m} \times \mathbf{r}]. \quad \text{I(9.19)}$$

Po provedení rutinních výpočtů dostaneme pole $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ vytvořené magnetickým dipólovým momentem \mathbf{m}

$$\mathbf{B}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \{3(\mathbf{m}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{m}\}, \quad \text{I(9.20)}$$

kde $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ je jednotkový vektor ve směru průvodiče \mathbf{r} .

I.10 Energie magnetického pole

Na nabitou částici pohybující se rychlostí \mathbf{v} v magnetickém poli \mathbf{B} působí Lorentzova síla I(7.3). Tento výraz lze získat z lagrangianu

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + e \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad \text{I(10.1)}$$

Při kalibrační transformaci $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } f$ se lagrangián změní o úplnou časovou derivaci $e\mathbf{v} \text{ grad } f = e (df/dt)$, což se neprojeví na pohybových rovnicích

$$\frac{d}{dt} \frac{dL}{dq_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0. \quad \text{I(10.2)}$$

Veličiny $p_k = (\partial L / \partial \dot{q}_k)$ jsou složky zobecněných hybností. Pro částici popisovanou lagrangiánem I(10.1) je

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A}. \quad \text{I(10.3)}$$

Pro x -ovou složku platí

$$\frac{d}{dt} (mv_x + eA_x) = \frac{\partial L}{\partial x} = v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Jelikož $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t)$, bude ($v_i = \dot{x}_i$)

$$\frac{dA_x}{dt} = v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial A_x}{\partial z}.$$

Po přeskupení členů dostaneme

$$m\dot{v}_x = e \left[v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \right].$$

Výrazy v kulatých závorkách jsou podle I(9.1) složky B_z , B_y , takže je

$$m\dot{v}_x = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]_x.$$

Pro zbývající složky je postup stejný.

V mechanice je lagrangián definován jako rozdíl kinetické a interakční energie. Veličinu $W = -e\mathbf{v}\mathbf{A}$ můžeme interpretovat jako interakční lagrangián částice s daným (vnějším) magnetickým polem. Pro náboje s hustotou ρ bude $W = -\int \rho \mathbf{v}\mathbf{A} dV$. Jelikož $\rho \mathbf{v} = \mathbf{j}$ je vektor proudové hustoty, bude

$$W = -\int \mathbf{j}\mathbf{A} dV. \quad \text{I(10.4)}$$

Tento výraz reprezentuje interakční energii proudu \mathbf{j} v daném poli \mathbf{A} . Je-li však pole vytvořeno týmiž proudy \mathbf{j} , je nutno vzít

$$W = -\frac{1}{2} \int \mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r}) d^3r, \quad \text{I(10.5)}$$

abychom interakci proudových elementů nezapočítávali dvakrát. Nejlépe je to vidět, když za $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ dosadíme z I(9.7)

$$W = -\frac{1}{2} \mu \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r d^3r'. \quad \text{I(10.6)}$$

Veličinu $U = -W$ můžeme interpretovat jako práci potřebnou na vytvoření

magnetického pole, proto energie magnetického pole bude

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{j}\mathbf{A} dV. \quad \text{I(10.7)}$$

Tento výraz upravíme obdobně jako v čl. I.6 pro elektrické pole. K integrálu v I(10.7) přispívá pouze oblast proudů, proto lze integraci rozšířit na celý prostor. Proud \mathbf{j} vyjádříme rovnicí $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}$ a uijeme pak vektorové identity

$$\mathbf{A} \text{ rot } \mathbf{H} = \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{A} + \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}] = \mathbf{H}\mathbf{B} + \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}].$$

Integrál $\int \text{div}[\mathbf{A}, \mathbf{H}] dV$ upravíme pomocí Gaussovy věty, takže je

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}\mathbf{B} dV + \frac{1}{2} \oint [\mathbf{A}, \mathbf{H}] ds.$$

Jsou-li proudy soustředěny v konečné oblasti, pak pole na velikých vzdálenostech ubývají alespoň jako $A \sim 1/r$, $H \sim 1/r^2$, takže povrchový integrál přes nekonečně vzdálenou plochu vymizí.

Energie magnetického pole

$$U = \frac{1}{2} \int \mathbf{H}\mathbf{B} dV \quad \text{I(10.8)}$$

je rozložena v prostoru s hustotou

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{H}\mathbf{B}. \quad \text{I(10.9)}$$

Pro soustavu uzavřených lineárních proudů položíme $\int dV = \mathcal{I} dI$, takže

$$U = \frac{1}{2} \sum_K \mathcal{I}_K \oint (\mathbf{A} dI_K).$$

Veličina (užijeme Stokesovy věty)

$$\psi_K \equiv \oint \mathbf{A} dI_K = \int \mathbf{B} ds_K \quad \text{I(10.10)}$$

představuje magnetický indukční tok K -tou smyčkou. Je tedy energie magnetického pole

$$U = \frac{1}{2} \sum_K \mathcal{I}_K \psi_K. \quad \text{I(10.11)}$$

Indukční tok ψ_K ohraničený K -tou smyčkou lze složit z příspěvků magnetických polí vzbuzených jednotlivými proudokruhy. Jelikož \mathbf{B} je úměrné proudu, položíme

$$\psi_K = \sum_M L_{KM} \mathcal{I}_M, \quad \text{I(10.12)}$$

čímž pro energii U dostáváme

$$U = \frac{1}{2} \sum_K \sum_M L_{KM} \mathcal{I}_K \mathcal{I}_M. \quad \text{I(10.13)}$$

Toto vyjádření magnetické energie pomocí koeficientů indukčnosti L_{KM} se

v potřebném rozsahu probírá v úvodním kursu fyziky, proto se jím zde zabývat nebudeme.

Vyjádření koeficientů L_{AB} se snadno najde tak, že do I(10.10) dosadíme vyjádření pro vektorový potenciál

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{R} d^3r' = \frac{\mu \mathcal{J}}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}'}{R}$$

Odtud pro koeficienty vzájemné indukce L_{AB} ($A \neq B$) plyne

$$L_{AB} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{I_A} \oint_{I_B} \frac{d\mathbf{l}_A d\mathbf{l}_B}{R_{AB}} \quad \text{I(10.14)}$$

Koeficient samoindukce $L_{AA} \equiv L$ se vypočte z rovnice

$$L \equiv L_{AA} = \frac{1}{\mathcal{J}_A^2} \int_{V_A} \int_{V_A} \frac{\mathbf{j}_A(\mathbf{r}) \mathbf{j}_A(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r d^3r' \quad \text{I(10.15)}$$

Koeficienty L_{AB} jsou očividně symetrické

$$L_{AB} = L_{BA} \quad \text{I(10.16)}$$

I.11 Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Doposud jsme se zabývali pouze časově neproměnnými zdroji a časově neproměnnými elektrickými a magnetickými poli. Rovnice pro elektrické pole \mathbf{E} , \mathbf{D} jsou v tomto případě nezávislé na rovnicích pro pole magnetické \mathbf{B} , \mathbf{H} . Zkoumání časově proměnných polí však odhalilo vzájemnou souvislost elektrických a magnetických polí.

První krok učinil M. FARADAY, jenž roku 1831 objevil, že v uzavřené vodivé smyčce vzniká elektrický proud, když se v její blízkosti pohybuje magnet. Podrobnější zkoumání ukázalo, že jev závisí na časovém úbytku indukčního toku, tj. na veličině

$$-\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{I(11.1)}$$

Zatímco ve statickém případě je $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, v časově proměnných polích je veličina

$$\mathcal{U} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad \text{I(11.2)}$$

zvaná indukovaná elektromotorická síla nenulová. Tato veličina představuje práci vykonanou jednotkovým kladným nábojem po uzavřené křivce (I). Z Faradayových měření vyplynula rovnost veličin \mathcal{U} a $-d\psi/dt$, což vyjádříme rovnicí

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{I(11.3)}$$

Integrace na pravé straně se provádí přes plochu \mathbf{s} , která má křivku I za konturu.

Maxwell učinil podstatné zobecnění Faradayova experimentálního výsledku I(11.3) v tom smyslu, že platnost této rovnice není omezena na případ, kdy podél uzavřené křivky (I) běží vodivý drát, nýbrž že platí pro jakoukoliv i myšlenou křivku, a to v jakémkoliv prostředí, i ve vakuu. Tento Maxwellův předpoklad byl v plném rozsahu a ve všech svých důsledcích experimentálně potvrzen.

Je-li křivka nehybná, pak (po užití Stokesovy věty) z I(11.3) plyne

$$\int (\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}) \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Jelikož tato rovnice platí pro libovolnou plochu \mathbf{s} , musí být

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{I(11.4)}$$

Tato Maxwellova rovnice je obecným vyjádřením zákona elektromagnetické indukce; vyjadřuje tu skutečnost, že elektrické pole lze vytvořit časově proměnným polem magnetickým. Spolu s rovnicí

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{I(11.5)}$$

která zůstává v platnosti i pro časově proměnná pole, tvoří tzv. *druhou sérii* Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. (V části anglosaské literatury se tyto rovnice nazývají první sérií Maxwellových rovnic.)

I.12 Maxwellovo zobecnění Biotova—Savartova zákona. Maxwellův proud

Jak jsme již upozorňovali v čl. I.8, rovnice $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ může platit pouze pro stacionární proud, jelikož z této rovnice plyne $\text{div } \mathbf{j} = \text{div rot } \mathbf{H} = 0$. Rovnice tedy vyžaduje zobecnění (modifikaci) pro případ nestacionárního proudu.

Maxwell vyšel z předpokladu, že rovnice

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \text{I(12.1)}$$

která původně vznikla přepisem Coulombova zákona, zůstane v platnosti i pro nestacionární pole $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$. Rovnice kontinuity $(\partial \rho / \partial t) + \text{div } \mathbf{j} = 0$ pak vede ke vztahu

$$\text{div} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad \text{I(12.2)}$$

(Derivaci $\partial \rho / \partial t$ jsme vyjádřili pomocí I(12.1).) Odtud je vidět, že vektor $\mathbf{J} \equiv \mathbf{j} + (\partial \mathbf{D} / \partial t)$ má tu vlastnost, že jeho divergence je nulová; ve stacionárním případě se tento vektor redukuje na hustotu vodivého proudu \mathbf{j} . Tento vektor by mohl v nestacionárním poli nastoupit místo vektoru \mathbf{j} v rovnici I(8.9).

Ve shodě s touto Maxwellovou hypotézou položíme

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad \text{I(12.3)}$$

Tento Maxwellův předpoklad byl později jak přímo experimentálně, tak i ve všech svých důsledcích plně potvrzen, proto rovnice I(12.1) a I(12.3) patří k základním rovnicím elektromagnetického pole.

Rovnice I(12.1) a I(12.3) obsahující zdroje pole (ρ a \mathbf{j}) se obvykle nazývají první sérií Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. V části anglosaské literatury se užívá obrácené terminologie — druhá série Maxwellových rovnic. (Viz závěr článku I.11.)

Všimněme si nyní podrobněji rovnice I(12.3). Ta je v jistém smyslu partnerem, popř. doplňkem zákona I(11.4) elektromagnetické indukce, podle něhož elektrické pole může být vytvořeno časově proměnným polem magnetickým. Maxwellova rovnice I(12.3) zase praví, že magnetické pole lze vytvořit časově proměnným polem elektrickým. Názorně je to vidět v případě, kdy vodivý proud $\mathbf{j} = 0$. Veličina

$$\mathbf{j}^{(M)} \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{I(12.4)}$$

zvaná Maxwellův proud vystupuje v roli zdroje magnetického pole $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}^{(M)}$. Existenci tohoto magnetického pole lze snadno experimentálně dokázat, vložíme-li dovnitř kondenzátoru smyčku z feromagnetického drátu, jejíž rovina je rovnoběžná s deskami kondenzátoru. Je-li \mathbf{s} část roviny ohraničená touto smyčkou, pak z rovnice $\text{rot } \mathbf{H} = (\partial \mathbf{D} / \partial t)$ plyne

$$\oint \mathbf{H} \, d\mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{s}.$$

Magnetické pole se projeví (podélným) zmagnetováním feromagnetického drátu. Nejdůležitějším projevem Maxwellova proudu jsou však elektromagnetické vlny, s nimiž se podrobněji seznámíme v dalších kapitolách.

Maxwellův proud $\mathbf{j}^{(M)}$ je vytvořen dvěma členy, které získáme po dosazení $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$

$$\mathbf{j}^{(M)} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad \text{I(12.5)}$$

První člen $\epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$ existuje i v dokonalém vakuu, nesouvisí se žádným transportem elektrického náboje, a nemá proto také žádnou názornou interpretaci. Naproti

tomu člen $(\partial \mathbf{P} / \partial t)$ představuje skutečnou hustotu proudu vytvořeného posouváním vázaných nábojů v atomech a molekulách látkového prostředí. Tento polarizační proud

$$\mathbf{j}^{(p)} \equiv \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad \text{I(12.6)}$$

vyhovuje také obvyklé rovnici kontinuity. Ze vztahu $\rho^{(p)} = -\text{div } \mathbf{P}$ okamžitě plyne

$$\frac{\partial \rho^{(p)}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j}^{(p)} = 0. \quad \text{I(12.7)}$$

Spojením s rovnicí kontinuity I(1.9) dostáváme rovnici kontinuity pro celkový makroskopický transport (volného i vázaného) elektrického náboje

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho + \rho^{(p)}) + \text{div} (\mathbf{j} + \mathbf{j}^{(p)}) = 0. \quad \text{I(12.8)}$$

Naproti tomu pro člen $\mathbf{j}^{(0)} \equiv \epsilon_0 (\partial \mathbf{E} / \partial t)$, který by odpovídal „posuvnému proudu ve vakuu“, se dostane

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho + \rho^{(p)}) - \text{div } \mathbf{j}^{(0)} = 0.$$

K rovnici I(12.8) je nutno ještě připojit hraniční podmínky. Stejným postupem, jímž jsme z rovnice $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ odvodili I(5.15), získáme z rovnice $(\partial \rho / \partial t) + \text{div } \mathbf{j} = 0$ hraniční podmínku

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{j} = 0; \quad \text{I(12.9)}$$

a obdobně pro vázané náboje a proudy

$$\frac{\partial \eta^{(p)}}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{j}^{(p)} = 0, \quad \text{I(12.10)}$$

jakož i celkový transport náboje

$$\frac{\partial}{\partial t} (\eta + \eta^{(p)}) + \text{Div} (\mathbf{j} + \mathbf{j}^{(p)}) = 0. \quad \text{I(12.11)}$$

I.13 Soustava Maxwellových rovnic elektromagnetického pole a hraničních podmínek

Závěrem této úvodní kapitoly shrneme získanou soustavu rovnic elektromagnetického pole a provedeme její rozbor.

Rovnice

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad \text{I(13.1)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{I(13.2)}$$

tvoří první sérii Maxwellových rovnic. Druhá série je tvořena rovnicemi

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{I(13.3)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad \text{I(13.4)}$$

Zdroji elektromagnetického pole jsou náboje a proudy; tyto veličiny nejsou nezávislé, nýbrž platí mezi nimi zákon zachování elektrického náboje

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad \text{I(13.5)}$$

Rovnice I(13.1) až I(13.4) představují vázanou (simultánní) soustavu osmi parciálních diferenciálních rovnic pro celkem dvanáct komponent vektorů \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , takže soustava se zdá být nedostačující. K soustavě však nutno připojit definiční vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \end{aligned} \quad \text{I(13.6)}$$

kteří při teoreticky nebo experimentálně známých vektorech polarizace \mathbf{P} a magnetizace \mathbf{M} představují šest vztahů mezi vektory \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} . Zbývá tedy šest nezávislých veličin (např. komponenty vektorů \mathbf{E} , \mathbf{B}), pro něž máme celkem osm rovnic, takže soustava se zdá být přeúčtena. Nesmíme však zapomenout, že v rovnicích I(13.1) a I(13.3) se vyskytují časové derivace $(\partial \mathbf{D}/\partial t)$ a $(\partial \mathbf{B}/\partial t)$, takže k řešení soustavy je nutno zadat počáteční podmínky pro vektory \mathbf{D} a \mathbf{B} . Ukážeme nyní, že rovnice $\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ neobsahující časové derivace mají charakter univerzálních počátečních podmínek. Za tím účelem zapůsobíme na obě strany rovnice I(13.1) operací divergence; s ohledem na identitu $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ máme $\operatorname{div} \mathbf{j} = -\operatorname{div}(\partial \mathbf{D}/\partial t)$. Vyjádříme-li $\operatorname{div} \mathbf{j}$ pomocí I(13.5), dospějeme k rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho) = 0.$$

Odtud plyne, že $\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) - \rho(\mathbf{r}, t)$ nezávisí na čase; rovnice I(13.2) specifikuje, že rozdíl $\operatorname{div} \mathbf{D} - \rho$ je roven nule ve všech časech. Obdobně z rovnice I(13.3) dospějeme k rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

kteří praví, že $\operatorname{div} \mathbf{B}$ je konstanta nezávislá na čase. Rovnice I(13.4) pak praví, že tato konstanta je rovna nule.

Prostředí, v němž pole vyšetřujeme, nevyplňuje celý prostor a je obecně nehomogenní, proto je nutno k Maxwellově soustavě rovnic připojit odpovídající podmínky pro pole na rozhraní prostředí. Podmínkami, které musí pole splňovat na rozhraní, jsme se zabývali v úvodní části věnované statickým polím. Rovnice pro nestacionární pole se liší od statických rovnic pouze přídavnými členy $(\partial \mathbf{D}/\partial t)$ a $(\partial \mathbf{B}/\partial t)$, které jsou na rozhraní konečné, takže dřívější podmínky zůstanou v platnosti

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{Rot} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{Rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i}, & \operatorname{Div} \mathbf{D} &= \eta. \end{aligned} \quad \text{I(13.7)}$$

Pro úplnost je k tomu nutno ještě připojit rovnici pro proud $\operatorname{Div} \mathbf{j} = -(\partial \eta/\partial t)$. Ve výrazech I(13.7) plošné divergence Div a plošné rotace Rot jsou definovány vztahy

$$\begin{aligned} \operatorname{Div} \mathbf{V} &\equiv \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2), \\ \operatorname{Rot} \mathbf{V} &\equiv \mathbf{n} \times (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2), \end{aligned} \quad \text{I(13.8)}$$

kde jednotkový vektor normály \mathbf{n} k ploše rozhraní míří z prostředí (2) do prostředí (1).

I když hraniční podmínky I(13.7) jsou formálně stejné jako ve statickém případě, je zde podstatný rozdíl v tom, že nyní vektory \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , jakož i plošná hustota náboje η a hustota plošných proudů \mathbf{i} závisí také na čase. Tyto hraniční podmínky jsou stejně důležité jako samostatné rovnice pole; později uvidíme, že z těchto hraničních podmínek vyplývají zákony odrazu a lomu elektromagnetických vln a řada podobných jevů.

Závěrem uvedeme soustavu Maxwellových rovnic ve dvou nejčastěji užívaných soustavách křivočarých souřadnic. Uváděné vztahy se snadno získají přepisem rovnic I(13.1) až I(13.4) pomocí vztahů uvedených v dodatku I.

V cylindrických souřadnicích r , φ , z je

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} &= j_r + \frac{\partial D_r}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= j_\varphi + \frac{\partial D_\varphi}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} &= j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} + \frac{\partial B_r}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad \text{I(13.9)}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = 0, \quad \text{I(13.10)}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rD_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho, \quad \text{I(13.11)}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rB_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0. \quad \text{I(13.12)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rj_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0. \quad \text{I(13.13)}$$

Ve sférických souřadnicích r, ϑ, φ je

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (H_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial H_\vartheta}{\partial \varphi} \right] &= j_r + \frac{\partial D_r}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rH_\varphi)}{\partial r} \right] &= j_\vartheta + \frac{\partial D_\vartheta}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rH_\vartheta) - \frac{\partial H_r}{\partial \vartheta} \right] &= j_\varphi + \frac{\partial D_\varphi}{\partial t}, \end{aligned} \quad \text{I(13.14)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (E_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial E_\vartheta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial B_r}{\partial t} &= 0, \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (rE_\varphi)}{\partial r} \right] + \frac{\partial B_\vartheta}{\partial t} &= 0, \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rE_\vartheta) - \frac{\partial E_r}{\partial \vartheta} \right] + \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad \text{I(13.15)}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 D_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (D_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi} \right] = \rho \quad \text{I(13.16)}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 B_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (B_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right] = 0, \quad \text{I(13.17)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (j_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{\partial j_\varphi}{\partial \varphi} \right] = 0. \quad \text{I(13.18)}$$

Lorentzova teorie elektromagnetického pole

II.1 Základní představy Lorentzovy elektronové teorie

Látkové prostředí se skládá z atomových jader a elektronů, tj. velmi malých (elementárních) nábojů, které se velmi rychle pohybují. Proto v oblasti atomárních rozměrů se všechny elektromagnetické veličiny (pole, nábojové rozdělení a proudy) velmi rychle mění s časem i se vzdáleností.

Nás však obvykle nezajímá takový detailní obraz pole v látkovém prostředí. Při popisu vlastností makroskopických těles má jako vždy hlavní význam znalost středních hodnot těchto veličin na velkém počtu atomů. (V dalším budeme pro konkrétnost mluvit o atomech.) Například v mechanice používáme střední hustoty, kterou dostaneme tak, že vyčleníme jistý objem tělesa obsahující veliký počet atomů, určíme hmotnost v něm obsaženou a vydělíme ji tímto objemem. Tento objem musí být do té míry velký, aby se v něm neprojevovala mikroskopická (atomární) struktura prostředí, přičemž střední makroskopická hodnota dané veličiny je v tomto objemu konstantní. Konstantnost dané makroskopické veličiny můžeme prověřit takto: Nechť vydělený objem je libovolným způsobem rozdělen na dvě stejné části. Je-li střední hodnota dané veličiny jen málo odlišná od střední hodnoty téže veličiny v každé z těchto částí, můžeme danou makroskopickou veličinu v daném objemu pokládat za prostorově konstantní.

Takový objem, který je veliký ve srovnání s atomárními rozměry (obsahuje veliký počet atomů), avšak současně velmi malý vzhledem k celkovému objemu tělesa, se obvykle označuje jako fyzikálně nekonečně malý. Budeme jej značit V_0 na rozdíl od objemu V celého tělesa. Vezmeme-li všechny lineární rozměry V_0 velké ve srovnání s atomovými rozměry, pak střední hodnota nesmí záviset na tvaru plochy ohraničující objem V_0 .

Kromě středování podle objemu je nutno provést i středování podle času. Časový interval, přes který se střeďuje, musí být veliký ve srovnání s charakteristickými dobami atomových pohybů (dobou „oběhu“ elektronu kolem jádra apod.)

a musí být ještě do té míry malý, aby se (časově) střední hodnoty ve dvou polovinách intervalu $(-T/2, +T/2)$ příliš od sebe nelišily.

Jistého upřesnění vyžaduje také pojem nábojů a proudů v látkovém prostředí. Náboje rozdělíme na volné a na vázané neboli polarizační. V klasické teorii nazýváme volnými náboji takové náboje, které se mohou pod vlivem libovolných účinků pohybovat na makroskopické vzdálenosti — prakticky od jedné hranice tělesa k druhé. Takovými volnými náboji jsou např. elektrony v kovech (elektronový plyn) a ionty v plynech a elektrolytech. K volným nábojům patří také náboje zavedené do tělesa anebo na jeho povrch.

Vázanými neboli polarizačními jsou takové náboje, které se pod vlivem vnějších účinků mohou ze svých rovnovážných poloh přemísťovat pouze na vzdálenosti atomárních rozměrů. Atomová jádra kmitají kolem svých rovnovážných poloh a elektrony se pohybují kolem jader a vytvářejí (k atomu) vázané prostorové náboje a proudy. (Budeme je označovat — stejně jako v předešlé kapitole — horním indexem p v závorce.)

Je však třeba říci, že při dostatečně silném vnějším poli (vnějším z hlediska atomu) se mohou vázané náboje měnit na volné. Vlivem silného elektrického pole může dojít k vytržení elektronu z atomu, ultrafialové záření může vyvolat fotoelektrický jev, popř. jinou tvorbu volných nábojů. Dělení nábojů a proudů na volné a polarizační (vázané) je v jistém smyslu konvenční. Takové rozdělení lze považovat za dobře definované pouze v tom případě, kdy vnější účinky (např. vnější pole vytvořené v prostředí) jsou dostatečně slabé. V dalším budeme tento předpoklad považovat za splněný.

Změny pole v látkovém prostředí oproti poli ve volném prostoru (ve vakuu) jsou způsobeny existencí vázaných nábojů a proudů v látkovém prostředí a vlivem pole na tyto náboje a proudy.

Z toho H. A. LORENTZ usoudil, že k úplnému popisu mikroskopického elektromagnetického pole stačí dva vektory, které označíme $\mathbf{e} \equiv \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{h} \equiv \mathbf{h}(\mathbf{r}, t)$. Pro tyto okamžité hodnoty elektrického a magnetického pole v daném bodě látkového prostředí platí stejné rovnice jako ve vakuu.

Lorentzovy rovnice mikroskopického pole v látkovém prostředí mají tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho^{(0)}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \mathbf{j}^{(0)}, \quad \text{II(1.1)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0, \quad \text{II(1.2)}$$

kde $\rho^{(0)}$ a $\mathbf{j}^{(0)}$ je celková (totální) hustota náboje a proudu v daném bodě a v daném čase.

V další části této kapitoly si ukážeme jak středováním těchto Lorentzových

rovníc vznikne soustava rovnic makroskopické elektrodynamiky látkových prostředí, tj. rovnice I(13.1) až I(13.4). Nejdříve si však odvodíme některé vlastnosti středních hodnot.

II.2 Středování mikroskopických veličin

Máme-li nějakou funkci $f(x)$, pak její střední hodnotu $\langle f \rangle$ na intervalu $(-a/2, +a/2)$ definujeme rovnicí

$$\langle f(x) \rangle \equiv \frac{1}{a} \int_{x-a/2}^{x+a/2} f(x') dx'.$$

Substitucí $x' = x + \xi$ pak při daném x dostaneme

$$\langle f(x) \rangle \equiv \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x + \xi) d\xi.$$

Zobecní na případ více proměnných je nasnadě.

Střední hodnotou $\langle f \rangle \equiv \mathcal{F}(\mathbf{r}, t)$ v objemu V_0 a časovém intervalu T nazveme veličinu

$$\langle f \rangle = \frac{1}{V_0 T} \int_{V_0} \int_T d\xi d\eta d\zeta d\tau f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \tau). \quad \text{II(2.1)}$$

Integrační oblast lze vybrat např.

$$-\frac{a}{2} \leq \xi \leq \frac{a}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leq \eta \leq \frac{b}{2}, \quad -\frac{c}{2} \leq \zeta \leq \frac{c}{2}, \quad -\frac{T}{2} \leq \tau \leq \frac{T}{2},$$

pak objem $V_0 = abc$.

Pro takto definované střední hodnoty platí evidentní vztahy

$$\langle kf \rangle = k \langle f \rangle, \quad k = \text{konst.}, \quad \text{II(2.2)}$$

$$\langle f \pm g \rangle = \langle f \rangle \pm \langle g \rangle. \quad \text{II(2.3)}$$

Derivací rovnice II(2.1) podle x dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \frac{1}{V_0 T} \int_{V_0} \int_T d\xi d\eta d\zeta d\tau \frac{\partial}{\partial x} f(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, t + \tau).$$

Pravá strana této rovnice však představuje střední hodnotu $\langle \partial f / \partial x \rangle$ derivace $\partial f / \partial x$, takže platí

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x} \right\rangle \quad \text{II(2.4)}$$

a obdobné vztahy pro časovou derivaci

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle. \quad \text{II(2.5)}$$

Je-li f vektorem (označíme jej \mathbf{F}), pak podle II(2.4) a II(2.5) platí

$$\text{div} \langle \mathbf{F} \rangle = \langle \text{div} \mathbf{F} \rangle, \quad \text{II(2.6)}$$

$$\text{rot} \langle \mathbf{F} \rangle = \langle \text{rot} \mathbf{F} \rangle, \quad \text{II(2.7)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{F} \rangle = \left\langle \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right\rangle. \quad \text{II(2.8)}$$

Vztahy II(2.4) až II(2.8) vyjadřují komutativnost diferenciálních operací s operací středování.

II.3 Lorentzovo odvození rovnic makroskopické elektrodynamiky látkových prostředí

Podle Lorentzovy teorie jsou rovnice makroskopického pole v látkových prostředích středními hodnotami rovnic II(1.1) a II(1.2) pro mikroskopická pole, tj.

$$\text{div} \langle \mathbf{e} \rangle = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho^{(w)} \rangle, \quad \text{rot} \langle \mathbf{h} \rangle - \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{e} \rangle = \langle \mathbf{j}^{(w)} \rangle, \quad \text{II(3.1)}$$

$$\text{div} \langle \mathbf{h} \rangle = 0, \quad \text{rot} \langle \mathbf{e} \rangle + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{h} \rangle = 0. \quad \text{II(3.2)}$$

Při úpravě jsme užili vztahů II(2.6) až II(2.8).

Všimněme si nejdříve rovnic druhé série II(3.2). Abychom dostali Maxwellovy rovnice I(13.3) a I(13.4), je nutno položit

$$\mu_0 \langle \mathbf{h} \rangle = \mathbf{B}, \quad \text{II(3.3)}$$

$$\langle \mathbf{e} \rangle = \mathbf{E}. \quad \text{II(3.4)}$$

Střední hodnota $\langle \mathbf{e} \rangle$ mikroskopického elektrického pole je rovna makroskopické elektrické intenzitě \mathbf{E} a střední hodnota mikroskopického magnetického pole $\langle \mu_0 \mathbf{h} \rangle$ je rovna vektoru \mathbf{B} magnetické indukce.

Přejdeme k rozboru první rovnice série II(3.1). Celkovou mikroskopickou hustotu $\rho^{(w)}$ elektrického náboje vyjádříme jako součet mikroskopických hustot volného náboje ρ a polarizačního náboje $\rho^{(p)}$

$$\rho^{(w)} = \rho + \rho^{(p)}, \quad \text{II(3.5)}$$

resp. pro střední hodnoty

$$\langle \rho^{(w)} \rangle = \langle \rho \rangle + \langle \rho^{(p)} \rangle. \quad \text{II(3.6)}$$

Zůstanou-li atomy jako celek elektricky neutrální, vznik vázané hustoty $\rho^{(p)}$ vede pouze k přerozdělení celkového (nulového) náboje atomů. V matematickém zápisu to značí, že

$$\int_V \rho^{(p)} dV = 0. \quad \text{II(3.7)}$$

Integrace se zde vztahuje na celý objem tělesa, lze ji však rozšířit na celý prostor, v němž je $\rho^{(p)} = 0$. Mikroskopickou hustotu vyjádříme jako zápornou divergenci vektoru \mathfrak{P} , tj.

$$\rho^{(p)} = -\text{div} \mathfrak{P} \equiv -\partial \mathcal{P}_i / \partial x_i. \quad \text{II(3.8)}$$

Důvodem k takové volbě je princip superpozice (výsledné pole je rovno vektorovému součtu polí vytvořenými volnými a vázanými náboji), jenž má svůj matematický odraz v linearitě Lorentzových rovnic II(1.1) a II(1.2). Po dosazení II(3.8) do II(3.7) plyne vztah

$$\int_V \text{div} \mathfrak{P} dV = \oint_S \mathfrak{P} d\mathbf{s} = 0. \quad \text{II(3.9)}$$

Fyzikální význam vektoru \mathfrak{P} , popř. jeho střední hodnoty $\langle \mathfrak{P} \rangle$ najdeme obdobně jako v čl. I.5. Za tím účelem vypočteme střední elektrický dipólový moment objemové jednotky daného prostředí. Pro konkrétnost zvolíme oblast středování ve tvaru malého kvádrů o rozměrech a, b, c kolem daného bodu \mathbf{r} . Střední hodnotu $\mathbf{P} \equiv \langle \mathfrak{P} \rangle$ elektrického dipólového momentu objemové jednotky vyjádříme rovnicí

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{V_0 T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} dt' \int_{x-a/2}^{x+a/2} dx' \int_{y-b/2}^{y+b/2} dy' \int_{z-c/2}^{z+c/2} dz' \rho^{(w)}(\mathbf{r}', t') \mathbf{r}'. \quad \text{II(3.10)}$$

Zde \mathbf{r}' značí okamžitou polohu vázaného náboje $\rho^{(w)} dx' dy' dz'$. Po dosazení za $\rho^{(w)}$ z II(3.8) a přechodem ke složkovému zápisu bude $(dV' = dx' dy' dz')$

$$P_i = -\frac{1}{V_0 T} \int_T dt' \int_{V_0} x'_i (\partial \mathcal{P}_j / \partial x'_j) dV'. \quad \text{II(3.11)}$$

Integrand upravíme pomocí identity

$$x'_i \left(\frac{\partial \mathcal{P}_j}{\partial x'_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x'_j} (x'_i \mathcal{P}_j) - \mathcal{P}_i,$$

což vede k vyjádření

$$P_i = \frac{1}{V_0 T} \int_T dt' \int_{V_0} \mathcal{P}_i dV' - \frac{1}{V_0 T} \int_T dt' \int_{V_0} dV' \frac{\partial}{\partial x'_j} (x'_i \mathcal{P}_j).$$

První člen představuje střední hodnotu $\langle \mathcal{P}_i \rangle$, druhý upravíme pomocí Gaussovy věty. Objemový integrál má tvar divergence tenzoru $T_{ij} \equiv x'_i \mathcal{P}_j$, takže na základě I(5.9) bude

$$P_i \equiv \langle \mathcal{P}_i \rangle - \frac{1}{V_0 T} \int dt' \oint_{s_0} x'_i \mathcal{P}_j ds'_j,$$

kde se integrace provádí přes plošku s_0 obalující objem V_0 . Vázané náboje vykonávají ohraničený pohyb v malé oblasti atomárních rozměrů. Poněvadž pohyb nábojů lze pokládat za periodický, bude střední hodnota rovna nule

$$\frac{1}{V_0 T} \int_T dt' \oint_{s_0} x'_i \mathcal{P}_j ds'_j = 0.$$

(Čas T mnohonásobně převyšuje dobu atomárních period a integrand je ohraničený.) Dospěli jsme tak ke konečnému výsledku

$$\mathbf{P} = \langle \mathfrak{P} \rangle. \quad \text{II(3.12)}$$

Střední hodnota $\langle \mathfrak{P} \rangle$ vektoru \mathfrak{P} představuje makroskopickou polarizaci \mathbf{P} ; střední hodnota $\langle \rho^{(p)} \rangle$ vázaného náboje je

$$\langle \rho^{(p)} \rangle = \langle -\text{div} \mathfrak{P} \rangle = -\text{div} \mathbf{P}, \quad \text{II(3.13)}$$

což je v souladu s výsledky čl. I.5.

Zavedeme vyjádření II(3.13) do II(3.1); pro nový vektor

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{II(3.14)}$$

pak platí

$$\text{div} \mathbf{D} = \langle \rho \rangle, \quad \text{II(3.15)}$$

což je rovnice I(13.2) Maxwellovy makroskopické elektrodynamiky. (Tam použitý symbol ρ pro hustotu volných nábojů je nyní reprezentován střední hodnotou $\langle \rho \rangle$.)

Obdobně budeme postupovat i při mikroskopickém zdůvodnění druhé série Maxwellových rovnic v látkovém prostředí. Budeme předpokládat, že nedochází k přeměně vázaných nábojů na volné a naopak. Celkovou proudovou hustotu $\mathbf{j}^{(v)}$ vyjádříme jako součet proudové hustoty \mathbf{j} volných nábojů a $\mathbf{j}^{(p)}$ nábojů vázaných

$$\mathbf{j}^{(v)} = \mathbf{j} + \mathbf{j}^{(p)} \quad \text{II(3.16)}$$

a obdobný vztah pro střední hodnoty

$$\langle \mathbf{j}^{(v)} \rangle = \langle \mathbf{j} \rangle + \langle \mathbf{j}^{(p)} \rangle. \quad \text{II(3.17)}$$

Při uvedeném předpokladu platí pro volné i vázané náboje samostatné zákony zachování

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0, \quad \frac{\partial \rho^{(p)}}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j}^{(p)} = 0, \quad \text{II(3.18)}$$

popř. stejné rovnice pro střední hodnoty

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \text{div} \langle \mathbf{j} \rangle = 0, \quad \frac{\partial \langle \rho^{(p)} \rangle}{\partial t} + \text{div} \langle \mathbf{j}^{(p)} \rangle = 0. \quad \text{II(3.18')}$$

Do druhé rovnice II(3.18) dosadíme za $\rho^{(p)}$ vyjádření II(3.8), což vede k rovnici

$$\text{div} \left(\mathbf{j}^{(p)} - \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} \right) = 0.$$

Odtud plyne, že $\mathbf{j}^{(p)} - (\partial \mathfrak{P} / \partial t)$ je rotací jistého vektoru, který označíme \mathfrak{M}

$$\mathbf{j}^{(p)} = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t} + \text{rot} \mathfrak{M}. \quad \text{II(3.19)}$$

Pro střední hodnoty pak platí

$$\langle \mathbf{j}^{(p)} \rangle = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \text{rot} \mathbf{M}, \quad \text{II(3.20)}$$

kde \mathbf{P} je určeno vztahem II(3.12) a

$$\mathbf{M} \equiv \langle \mathfrak{M} \rangle = \frac{1}{V_0 T} \int_T dt' \int_{V_0} \mathfrak{M}(\mathbf{r}', t') d^3 \mathbf{r}' \quad \text{II(3.21)}$$

je střední (makroskopická) hodnota vektoru \mathfrak{M} . Význam tohoto vektoru si vysvětlíme v další části tohoto článku.

Jelikož vně látkového prostředí je $\mathbf{j}^{(p)}$ i $\langle \mathbf{j}^{(p)} \rangle$ rovno nule, naložíme na vektory \mathfrak{M} a \mathbf{M} podmínku, aby na vnější hranici (kde se předpokládá vakuum) byly tyto vektory rovny nule.

První člen souvisí s časovou změnou polarizace, proto se nazývá *polarizačním proudem*. Tento člen představuje skutečnou hodnotu elektrického proudu vytvořeného posouváním vázaných nábojů v atomech a molekulách.

Zavedeme nyní vyjádření II(3.20) do druhé rovnice II(3.1); při úpravě uijeme II(3.3), II(3.4) a II(3.14), čímž získáme rovnici

$$\text{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \langle \mathbf{j} \rangle. \quad \text{II(3.22)}$$

Nový vektor

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad \text{II(3.23)}$$

se nazývá vektorem (makroskopické) magnetické intenzity, ačkoliv by bylo vhodnější nazvat jej vektorem magnetické indukce. Z historických důvodů mají však vektory \mathbf{H} a \mathbf{B} názvy opačné než by odpovídalo jejich fyzikálnímu významu.

Fyzikální význam najdeme obdobně jako v čl. I.8. Výraz $\frac{1}{2}[\mathbf{r}, \mathbf{j}]$ má význam (objemové) hustoty magnetického dipólového momentu. Střední hodnota $\langle \mathbf{M} \rangle$ této veličiny je určena vztahem (z úvah vylučujeme feromagnetické a příbuzné látky, u nichž je magnetizace jiné povahy)

$$\langle \mathbf{M} \rangle \equiv \frac{1}{2V_0 T} \int_T dt' \int_{V_0} [\mathbf{r}', \mathbf{j}^{(p)}(\mathbf{r}', t')] dV'. \quad \text{II(3.24)}$$

Po dosazení za $\mathbf{j}^{(p)}$ z II(3.19) se $\langle \mathbf{M} \rangle$ rozpadne na dva členy

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \langle \mathbf{M} \rangle_P + \langle \mathbf{M} \rangle_M, \quad \text{II(3.25)}$$

kde

$$\langle \mathbf{M} \rangle_P \equiv \frac{1}{2V_0 T} \int_T dt' \int_{V_0} \left[\mathbf{r}', \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial t'} \right] dV', \quad \text{II(3.26)}$$

$$\langle \mathbf{M} \rangle_M \equiv \frac{1}{2V_0 T} \int_T dt' \int_{V_0} [\mathbf{r}', \text{rot}' \mathfrak{M}] dV'. \quad \text{II(3.27)}$$

Integrand v II(3.26) lze zapsat též ve tvaru $\partial/\partial t' [\mathbf{r}', \mathfrak{P}]$; po integraci přes čas vznikne $[\mathbf{r}', \mathfrak{P}]$. S ohledem na ohraničenost a periodičnost pohybu vázaných nábojů je střední hodnota tohoto výrazu rovna nule

$$\langle \mathbf{M} \rangle_P = 0. \quad \text{II(3.28)}$$

Integrand v II(3.27) upravíme pomocí vztahu I(8.18), což dá ($\mathcal{M}_i \equiv \mathfrak{M}_i$)

$$\langle \mathbf{M}_i \rangle_M = \langle \mathcal{M}_i \rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x'_i} (x'_j \mathcal{M}_j) \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x'_j} (x'_i \mathcal{M}_i) \right\rangle.$$

Ohraničenost a periodičnost pohybu vázaných nábojů vedou k tomu, že druhý a třetí člen dají nulu, takže je $\langle \mathbf{M}_i \rangle_M = \langle \mathcal{M}_i \rangle$, popř. ve vektorové formě

$$\langle \mathbf{M} \rangle = \langle \mathfrak{M} \rangle = \mathbf{M}. \quad \text{II(3.29)}$$

Vektor \mathbf{M} má tedy význam střední makroskopické hustoty magnetického dipólového momentu vytvořeného významnými proudy, a je tedy totožný s vektorem magnetizace Maxwellovy elektrodynamiky.

Tím je ukončeno odvození Maxwellových rovnic makroskopického elektromagnetického pole z Lorentzových rovnic mikroskopického pole.

II.4 Materiálové vztahy

V závěru první kapitoly (čl. I.13) jsme poukázali na to, že soustava rovnic elektromagnetického pole není úplná, poněvadž pro dvanáct veličin (složek vektorů $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$) dává pouze šest rovnic a dvě počáteční podmínky. Soustavu je

nutno doplnit o vztahy mezi vektory intenzit a vektory indukci. Konkrétní tvar těchto závislostí souvisí s chemickým složením dané látky, termodynamickým stavem apod. Teoretické určování těchto závislostí patří do teorie plynů, kapalin a pevných látek, kde se používají konkrétní představy o stavbě atomů a molekul a o jejich interakci s elektromagnetickým polem. (Několik ilustrativních příkladů je v řešených úlohách k této kapitole.) V makroskopické teorii se tyto materiálové vztahy (stavové rovnice) stanovují pro každý konkrétní systém empiricky. Zde si provedeme jistou klasifikaci těchto materiálových vztahů.

K vyjasnění charakteru možných závislostí je účelné vrátit se k definici vektorů $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ (popř. též \mathbf{P} a \mathbf{M}) jako středních hodnot jistých mikroskopických veličin. Při tomto středování se integrovalo jak přes prostorové okolí, tak přes časový interval. Tato skutečnost je pro další úvahy podstatná.

Začneme výkladem vztahu mezi vektorem polarizace \mathbf{P} a vektorem elektrické intenzity \mathbf{E} . Tento vztah má obvykle tvar funkční závislosti

$$\mathbf{P} = \mathbf{f}(\mathbf{E}). \quad \text{II(4.1)}$$

Konkrétní tvar této funkční závislosti je nutno pro danou látku najít buď experimentálně, anebo odvodit teoreticky z vhodného modelu dané látky. Nutno však upozornit na omezení, která stojí v pozadí předpokladu II(4.1). Pole \mathbf{E} je funkcí polohy \mathbf{r} a času t , totéž platí pro vektor polarizace \mathbf{P} . Zapišeme-li tyto závislosti explicitně, pak vztah II(4.1) vypadá takto

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad \text{II(4.2)}$$

Závislosti II(4.1), popř. II(4.2) tedy obsahují předpoklad, že polarizace \mathbf{P} v daném bodě \mathbf{r} a daném čase t závisí pouze na intenzitě \mathbf{E} v témže bodě a čase. Jinými slovy, vylučuje se vliv hodnot intenzity \mathbf{E} v *okolních bodech a předchozích časech* na hodnotu polarizace \mathbf{P} v bodě \mathbf{r} a čase t . Vztah II(4.2) je tedy *lokální* v prostoru i v čase. Pokud jde o časovou závislost ve vztahu II(4.2), pak *takový* systém reaguje pouze na *okamžitou* hodnotu pole \mathbf{E} a vůbec si nepamatuje *předchozí historii* (způsob, jímž pole \mathbf{E} vzniklo). Předpoklad II(4.2) je tedy vhodný pro systémy bez paměti.

Vztah II(4.2) může představovat dobré přiblížení pro takové situace, kdy pole \mathbf{E} je pomalu proměnné jak s místem, tak s časem. V takovém případě elementární dipóly v dané látce (a tedy i vektor polarizace \mathbf{P}) budou stačit sledovat tyto pomalé změny pole a přizpůsobovat se jim.

Látka může mít v různých směrech různé vlastnosti, tj. být *anizotropní*. V takových případech mají vektory polarizace a intenzity různé směry. Označíme-li složky vektorů indexy $i, j, \dots, = 1, 2, 3$, pak anizotropie značí, že obecně máme tři závislosti

$$P_i = f_i(E_1, E_2, E_3). \quad \text{II(4.3)}$$

Pro slabá pole lze použít mocninového rozvoje

$$P_i = f_i(0, 0, 0) + \left(\frac{\partial P_i}{\partial E_j}\right)_0 E_j + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 P_i}{\partial E_j \partial E_k}\right) E_j E_k + \dots,$$

v němž se při $\mathbf{E} \rightarrow 0$ omezíme na první dva členy

$$P_i = P_{0i} + \varepsilon_0 \chi_{ik} E_k. \quad \text{II(4.4)}$$

Zde

$$P_{0i} \equiv f_i(0, 0, 0) \quad \text{II(4.5)}$$

je *spontánní polarizace*, kterou má látka při nulovém poli $\mathbf{E} = 0$. Druhý člen v II(4.4) určuje (makroskopickou) polarizaci indukovanou elektrickým polem v daném prostředí. Derivace

$$\chi_{ik} \equiv \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial P_i}{\partial E_k}\right) \quad \text{II(4.6)}$$

mají transformační vlastnosti tenzoru druhého řádu a nazývají se *tenzorem elektrické susceptibility*. Později z termodynamických úvah ukážeme, že tento tenzor je symetrický

$$\chi_{ik} = \chi_{ki}. \quad \text{II(4.7)}$$

Dosadíme-li II(4.4) do definičního vztahu $D_i = \varepsilon_0 E_i + P_i$, bude platit

$$P_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik} E_k, \quad \text{II(4.8)}$$

kde $D_{0i} = P_{0i}$ a

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 (\delta_{ik} + \chi_{ik}) = \varepsilon_{ki} \quad \text{II(4.9)}$$

je *tenzor elektrické permitivity*. S ohledem na II(4.7) je také ε_{ik} symetrickým tenzorem.

Přejdeme ke speciálnímu případu vztahů II(4.4). Struktura většiny látek je taková, že nepřipouští existenci spontánní polarizace. V takovém případě je

$$P_i = \varepsilon_0 \chi_{ik} E_k, \quad \text{II(4.10)}$$

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k. \quad \text{II(4.11)}$$

Vhodnou volbou souřadné soustavy lze symetrický tenzor ε_{ik} redukovat k hlavním osám, takže zbydou pouze tři hlavní hodnoty $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$ tohoto tenzoru. U krystalů triklinické, monoklinické a romboické soustavy jsou všechny tři hlavní hodnoty různé (dvouosé krystaly). U jednoosých krystalů tetragonální, romboedrické a hexagonální soustavy jsou dvě ze tří hlavních hodnot stejné, takže dielektrické vlastnosti jsou určeny dvěma veličinami. U krystalů kubické soustavy a v izotropních prostředích jsou všechny tři hlavní hodnoty stejné, což vyjádříme vztahy

$$\chi_{ik} = \chi \delta_{ik}, \quad \varepsilon_{ik} = \varepsilon \delta_{ik}, \quad \text{II(4.12)}$$

z nichž plyne

$$\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \text{II(4.13)}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \text{II(4.14)}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi). \quad \text{II(4.15)}$$

Za obdobných předpokladů (slabá, pomalu se měnící pole) zapíšeme závislost magnetizace \mathbf{M} na intenzitě \mathbf{H}

$$\mathbf{M}_i = M_{0i} + \chi_{ik} H_k. \quad \text{II(4.16)}$$

Veličiny M_{0i} určují *spontánní magnetizaci*,

$$\chi_{ik} = \left(\frac{\partial M_i}{\partial H_k}\right) \quad \text{II(4.17)}$$

je *tenzor magnetické susceptibility*. Dá se dokázat, že tento tenzor je symetrický (viz čl. II.6)

$$\chi_{ik} = \chi_{ki}. \quad \text{II(4.18)}$$

Z definičního vztahu $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$ pak plyne

$$\mathbf{B}_i = B_{0i} + \mu_{ik} H_k, \quad \text{II(4.19)}$$

kde

$$\mu_{ik} = \mu_0 (\delta_{ik} + \chi_{ik}) = \mu_{ki} \quad \text{II(4.20)}$$

je (symetrický) *tenzor magnetické permeability*.

V izotropním prostředí je $\chi_{ik} = \chi \delta_{ik}$, a tedy

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}, \quad \text{II(4.21)}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \text{II(4.22)}$$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi). \quad \text{II(4.23)}$$

Pro silná pole nevystačíme s lineárními závislostmi typu II(4.8) a II(4.19), popř. jejich speciálními případy II(4.14) a II(4.22). Formálně můžeme zavést tenzory $\varepsilon_{ik}(\mathbf{E})$, $\mu_{ik}(\mathbf{H})$ závislé na poli, popř. $\varepsilon \equiv \varepsilon(\mathbf{E})$, $\mu \equiv \mu(\mathbf{H})$. Pro takové nelineární prostředí budou materiálové vztahy

$$\mathbf{D}_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik}(\mathbf{E}) E_k, \quad \text{II(4.24)}$$

$$\mathbf{B}_i = B_{0i} + \mu_{ik}(\mathbf{H}) H_k, \quad \text{II(4.25)}$$

popř. pro izotropní materiály

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{E})\mathbf{E}, \quad \text{II(4.26)}$$

$$\mathbf{B} = \mu(\mathbf{H})\mathbf{H}. \quad \text{II(4.27)}$$

Následkem těchto nelineárních vztahů (vazeb) se rovnice pole v látkovém prostředí stávají *nelineárními*.

Nyní si vysvětlíme modifikaci příslušných vztahů pro systémy s pamětí. Pro jednoduchost zápisu budeme uvažovat prostorově homogenní pole a izotropní prostředí, abychom nemuseli explicitně vypisovat závislost na souřadnicích, která je pro tyto úvahy nepodstatná.

Paměť systému označuje, že např. hodnota magnetizace $M(t)$ v čase t závisí na hodnotách pole H ve všech časech $t' \leq t$. Matematicky můžeme takovou závislost modelovat funkcí, což pro izotropní prostředí vyjádříme vztahem

$$M(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t')f[H(t')] dt'. \quad \text{II(4.28)}$$

Jelikož nám jde pouze o *ilustraci* matematického popisu takových látek, budeme pro jednoduchost předpokládat lineární závislost $f(H) = kH$, přičemž konstantu k zahrneme do $K(t-t')$. Budeme tedy uvažovat lineární závislost (funkcionál)

$$M(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t')H(t') dt'. \quad \text{II(4.29)}$$

Korelační funkce $K(t-t')$ určuje vliv minulosti ($t' \leq t$). Zavedeme-li místo t' novou proměnnou (t je dáno)

$$t' = t - \tau, \quad \text{II(4.30)}$$

pak II(4.29) přepíšeme ve tvaru

$$M(t) = \int_0^{\infty} K(\tau)H(t-\tau) d\tau. \quad \text{II(4.31)}$$

Připomeňme si ještě, že všude v těchto rovnicích se integruje v mezích $-\infty \leq t' \leq t$, resp. $0 \leq \tau \leq \infty$. Tím respektujeme *kauzalitu* v tom smyslu, že hodnota magnetizace $M(t)$ nemůže být ovlivněna magnetickým polem $H(t')$ v časech $t' > t$.

Je rozumné předpokládat, že funkce $K(\tau)$ bude s rostoucím τ dostatečně rychle klesat k nule. Funkci $H(t-\tau)$ v integrandu lze rozvinout v Taylorovu řadu; po jednoduché úpravě dostaneme

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k K_k \frac{d^k H}{dt^k}, \quad \text{II(4.32)}$$

kde K_k jsou tzv. momenty funkce $K(\tau)$

$$K_k \equiv \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} \tau^k K(\tau) d\tau. \quad \text{II(4.33)}$$

Z rovnice II(4.32) je vidět, že k zachycení vlivu magnetické historie je nutno znát nejen hodnotu $H(t)$ pole v daném čase, ale i všechny časové derivace dH/dt , d^2H/dt^2 , ...; přítomnost derivací lichého řádu *narušuje* invariantnost rovnice II(4.32) vůči časové inverzi $t \rightarrow -t$.

Především obecné úvahy proilustrujeme na příkladě

$$H(t) = H_0 \cos \omega t, \quad K(\tau) = K_0 \exp(-\nu\tau), \quad (\nu > 0). \quad \text{II(4.34)}$$

Po dosazení do II(4.31) a po provedení výpočtů, jež uvádíme v příkladech k této kapitole, dospějeme k závislosti

$$M(t) = \frac{K_0}{(\omega^2 + \nu^2)^{1/2}} H_0 \cos(\omega t - \alpha),$$

kde $\alpha \equiv \arctg(\omega/\nu)$ určuje zpoždění magnetizace M za polem H . Ve statickém případě ($\omega = 0$) je $\alpha = 0$, $M = (K_0/\nu)H_0$.

Závislostem typu II(4.31) lze dát také jinou užitečnou interpretaci. V případě vysokofrekvenčních polí (elektromagnetických vln) se zpravidla jedná o pole s malou intenzitou \mathbf{E} , takže lineární vztah mezi polarizací \mathbf{P} a polem \mathbf{E} lze pokládat za splněný

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} K(\tau)\mathbf{E}(t-\tau) d\tau.$$

Pro elektrickou indukci $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$ pak máme

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon_0\mathbf{E}(t) + \varepsilon_0 \int_0^{\infty} K(\tau)\mathbf{E}(t-\tau) d\tau. \quad \text{II(4.35)}$$

(Korelační funkci jsme označili $\varepsilon_0 K(\tau)$.)

Funkci $f(t)$ lze rozložit ve Fourierův integrál

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} f_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega,$$

kde f_{ω} jsou Fourierovy komponenty příslušné frekvenci ω . Vyjádříme tímto způsobem veličiny

$$\mathbf{D}(t) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} \mathbf{D}_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{E}(t-\tau) = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} \mathbf{E}_{\omega} e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega$$

a dosadíme do II(4.35). Poněvadž Fourierova báze $\exp(-i\omega t)$ je úplná, lze porovnat Fourierovy komponenty na levé a pravé straně rovnice, což vede ke vztahu

$$\mathbf{D}_{\omega} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_{\omega},$$

kde

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \int_0^\infty K(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right]. \quad \text{II(4.36)}$$

Veličina $\varepsilon(\omega)$ má význam dielektrické permitivity jako konstanty úměrnosti mezi *Fourierovými komponentami* vektorů \mathbf{D} a \mathbf{E} . Lineární závislost II(4.14) mezi vektory \mathbf{D} a \mathbf{E} je tak nahrazena lineární závislostí mezi *Fourierovými komponentami* \mathbf{D}_ω a \mathbf{E}_ω .

Závislost $\varepsilon \equiv \varepsilon(\omega)$ na frekvenci se obvykle nazývá *disperzním zákonem* nebo *disperzní relací* pro elektrickou permitivitu.

Veličina $\varepsilon(\omega)$ je obecně *komplexní* funkcí. Reálnou a imaginární část této funkce označíme ε' a ε'' , tj.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega). \quad \text{II(4.37)}$$

Z definice II(4.36) okamžitě plyne (hvězdičkou označujeme komplexní združení)

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega). \quad \text{II(4.38)}$$

Pro separaci reálné a imaginární části dostaneme vztahy

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad \text{II(4.39)}$$

$$\varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega). \quad \text{II(4.40)}$$

Reálná část ε' je tedy sudou a ε'' je lichou funkcí frekvence ω . V rozvoji $\varepsilon'(\omega)$ se tedy mohou vyskytovat pouze sudé mocniny ω , zatímco rozvoj $\varepsilon''(\omega)$ může obsahovat pouze liché mocniny ω . Později uvidíme, že reálná část $\varepsilon'(\omega)$ souvisí s rozptylem a imaginární část $\varepsilon''(\omega)$ s absorpcí elektromagnetických vln. Mezi oběma veličinami platí důležité integrální rovnice (Kramersovy—Kronigovy relace), o nichž pojednáme později.

Na základě obdobných argumentů můžeme dospět k frekvenční závislosti (disperzi) permeability

$$\mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega) \quad \text{II(4.41)}$$

a měrné vodivosti

$$\gamma(\omega) = \gamma'(\omega) + i\gamma''(\omega). \quad \text{II(4.42)}$$

II.5 Lokální tvar Ohmova zákona

Elektrické pole působí na náboje jistou silou, což se projeví v pohybu elektrického náboje, popř. ve vzniku elektrického proudu.

Tento vztah lze (pro pomalu s časem i místem se měnící pole \mathbf{E}) vyjádřit jako lokální závislost

$$\mathbf{j} = \mathbf{f}(\mathbf{E}), \quad \text{II(5.1)}$$

resp.

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad \text{II(5.2)}$$

V anizotropním prostředí mají vektory \mathbf{E} a \mathbf{j} různý směr, což vyjádříme vztahy

$$j_i = f_i(\mathbf{E}), \quad i = 1, 2, 3. \quad \text{II(5.3)}$$

Pro slabé pole ($\mathbf{E} \rightarrow 0$) budeme mít lineární závislost

$$j_i = \gamma_{ik} E_k. \quad \text{II(5.4)}$$

Veličiny γ_{ik} tvoří *tenzor měrné elektrické vodivosti*. Později uvidíme, že tento tenzor je symetrický

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}. \quad \text{II(5.5)}$$

V izotropním prostředí je

$$\gamma_{ik} = \gamma \delta_{ik}, \quad \text{II(5.6)}$$

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad \text{II(5.7)}$$

V závislosti II(5.7) je obsažen standardní makroskopický tvar Ohmova zákona. Vezmeme malý váleček o průřezu Δq a délce Δx . Podle Ohmova zákona platí $\Delta \mathcal{U} = \mathcal{R} \Delta \mathcal{I}$, kde \mathcal{R} je odpor daného válečku, $\Delta \mathcal{U}$ napětí (spád potenciálu) mezi konci válečku a $\Delta \mathcal{I}$ proud protékající tímto válečkem. Odpor \mathcal{R} je přímo úměrný délce a nepřímo úměrný průřezu vodiče. Označíme-li koeficient úměrnosti symbolem $1/\gamma$, pak je

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\gamma} \frac{\Delta x}{\Delta q}, \quad \Delta \mathcal{U} = \frac{\Delta x}{\gamma} \frac{\Delta \mathcal{I}}{\Delta q}.$$

Jelikož $j = (\Delta \mathcal{I} / \Delta q)$ a $E = (\Delta \mathcal{U} / \Delta x)$, je také $j = \gamma E$. Uvážíme-li vektorový charakter obou veličin, dospějeme k lineárnímu vztahu II(5.7).

S ohledem na tuto skutečnost se vztahy II(5.7), popř. II(5.4) nazývají *lokální* nebo též *diferenciální forma Ohmova zákona*. Výhodou tohoto zápisu Ohmova zákona je to, že spojuje vektor elektrické intenzity s vektorem proudové hustoty ve stejném bodě vodiče.

Elektrické pole \mathbf{E} však není jedinou příčinou vzniku elektrického proudu: elektrický proud může vznikat i při $\mathbf{E} = 0$ vlivem rozdílu koncentrací, rozdílu teplot apod. Označíme-li tuto neelektromagnetickou sílu symbolem \mathbf{E}' , pak rovnici II(5.7) nahradíme obecnějším vztahem

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{E}'). \quad \text{II(5.8)}$$

Ze závislosti II(5.7) lze odvodit, že *prostorové rozdělení volného náboje ve vodičích vymizí*. Zapišeme-li $(\partial \rho / \partial t) + \text{div } \mathbf{j} = 0$ a užijeme $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$, pak $(\partial \rho / \partial t) + \gamma \text{div } \mathbf{E} = 0$. Po dosazení $\text{div } \mathbf{E} = \rho / \varepsilon$ dostaneme pro prostorovou hustotu ρ

jednoduchou diferenciální rovnicí $(\partial \rho / \partial t) + (\gamma \rho / \epsilon) = 0$, jejíž řešení je

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) \exp(-t/\tau), \quad \text{II(5.9)}$$

kde

$$\tau = \epsilon / \gamma \quad \text{II(5.10)}$$

má význam relaxační doby. Pro dobré vodiče ($\gamma \cong 10^8 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$) je $\tau \cong 10^{-17} \text{ s}$, pro izolátory ($\gamma \cong 10^{-14} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$) je $\tau \cong 10^3 \text{ s}$.

Poznámka: Na první pohled by se mohlo zdát, že závislost II(5.9) je v rozporu se zákonem zachování elektrického náboje, jelikož náboj monotonně s časem ubývá stejným způsobem ze všech bodů vodiče. Nutno si však uvědomit, že vztah $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ připouští nenulovou hustotu proudu \mathbf{j} i v těch bodech, kde je $\rho = 0$. Pro tok náboje máme

$$\oint \mathbf{j} \, d\mathbf{s} = \gamma \oint \mathbf{E} \, d\mathbf{s} = \frac{\gamma}{\epsilon} e(t).$$

Z rovnice II(5.9) plyne

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV = -\frac{de}{dt} = \frac{\gamma}{\epsilon} \int \rho \, dV = \frac{\gamma}{\epsilon} e(t).$$

Náboj se tedy roztéká do nekonečna (sahá-li vodič až tam) anebo se usazuje na povrchu vodiče s plošnou hustotou η .

Pomocí lokálního tvaru Ohmova zákona upravíme na podobný tvar i Jouleův zákon pro vývin tepla při průchodu elektrického proudu. Množství tepla vyvinutého za jednotku času je dáno známým vztahem $\Delta \mathcal{P} \cdot \Delta \mathcal{U}$. Zapišeme $\Delta \mathcal{P} \cdot \Delta \mathcal{U} = \mathbf{jE} \Delta V$ (objem dané části vodiče $\Delta V = \Delta q \cdot \Delta x$).

Veličina

$$\mathcal{Q} = \mathbf{jE} \quad \text{II(5.11)}$$

určuje množství Jouleova tepla vytvořeného objemovou jednotkou vodiče za jednotku času. Při vyjádření j_i z II(5.4) máme

$$\mathcal{Q} = \gamma_{ik} E_i E_k. \quad \text{II(5.12)}$$

Výrazu II(5.11) lze dát také jednoduchou mikroskopickou interpretaci. Na nabitě částice v poli \mathbf{E} , \mathbf{B} působí objemová hustota síly

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{j}, \mathbf{B}].$$

V mikroskopické teorii je $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$. Skalární součin \mathbf{fv} představuje měrný výkon sil, tj. výkon objemové jednotky. Tento výkon \mathbf{fv} je roven $\rho \mathbf{vE} = \mathbf{jE}$.

II.6 Termodynamika látek v elektromagnetickém poli

Elektrické a magnetické pole ovlivňuje celkový makroskopický stav tělesa. Aby-

chom mohli aplikovat termodynamiku na tuto oblast jevů potřebujeme především určit práci, kterou systém vykoná při infinitezimální změně pole.

Termodynamické vlastnosti vodičů se v elektrickém poli nemění, jelikož (statické) elektrické pole do vodičů neproniká.

U dielektrik je situace jiná: elektrické pole proniká do hloubi dielektrik, a ovlivňuje tím jejich termodynamické vlastnosti.

Budeme předpokládat, že pole \mathbf{E} je časově konstantní, ne však nutně homogenní. Pro názornost si můžeme představit, že pole v dielektriku je vytvořeno soustavou vodičů (vně dielektrika) s náboji e_A a potenciály Φ_A . Dielektrikum společně se soustavou vodičů budeme pokládat za rozšířený termodynamický systém. Práce δW , kterou tento rozšířený systém vykoná při změně nábojů vodičů o infinitezimální hodnoty δe_A , se rovná

$$\delta W = - \sum_A \Phi_A \delta e_A. \quad \text{II(6.1)}$$

Pro stručnější vyjadřování budeme předpokládat, že pole v dielektriku je vytvořeno jediným vodičem, tj. položíme

$$\delta W = - \Phi \delta e. \quad \text{II(6.2)}$$

Označíme-li D_n projekci vektoru indukce \mathbf{D} do směru vnější normály dielektrika (tj. vnitřní normály vzhledem k vodiči), pak je

$$e = - \oint D_n \, ds = - \oint \mathbf{D} \, d\mathbf{s},$$

a tudíž

$$\delta e = - \oint d\mathbf{s} \cdot \delta \mathbf{D}.$$

Jelikož potenciál Φ je na povrchu vodiče konstantní, bude

$$\delta W = \oint d\mathbf{s} (\Phi \delta \mathbf{D}).$$

V nekonečnu je $\Phi = 0$, $\delta \mathbf{D} = 0$, a můžeme proto poslední integrál rozdělit na dva plošné integrály: integrál přes povrch vodiče a integrál přes nekonečně vzdálenou plochu. Pomocí Gaussovy věty máme

$$\delta W = \int dV \operatorname{div}(\Phi \delta \mathbf{D}).$$

Užijeme vektorovou identitu

$$\operatorname{div}(\Phi \delta \mathbf{D}) \equiv \Phi \operatorname{div}(\delta \mathbf{D}) + (\delta \mathbf{D} \cdot \nabla \Phi),$$

jakož i to, že vně vodičů je $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, $\operatorname{div}(\delta \mathbf{D}) = 0$. Po jednoduché úpravě dospějeme k rovnici ($\mathbf{E} = -\nabla \Phi$)

$$\delta W = - \int (\mathbf{E} \delta \mathbf{D}) \, dV, \quad \text{II(6.3)}$$

kde se integruje přes celý prostor, v němž je elektrické pole.

Práce $d\mathcal{W}$, kterou systém vykoná při infinitezimální změně $d\mathbf{D}$ na jednotkovém objemu, je dána vztahem

$$d\mathcal{W} = -\mathbf{E} d\mathbf{D}. \quad \text{II(6.4)}$$

(Práce, již je nutno dodat na tuto změnu je $-d\mathcal{W} = \mathbf{E} d\mathbf{D}$.)

Výpočet obdobné veličiny pro magnetické pole provedeme následující úvahou. Samo magnetické pole nevykonává na pohybujících se nábojích (proudech) žádnou práci, jelikož Lorentzova síla I(7.3) je kolmá na vektor rychlosti \mathbf{v} (proudovou hustotu \mathbf{j}). Při změně magnetické indukce o $\delta\mathbf{B}$ však obecně vzniká indukovaná elektromotorická síla. Elektrické pole \mathbf{E} a magnetická indukce \mathbf{B} spolu souvisí Faradayovým indukčním zákonem $\text{rot } \mathbf{E} = -(\partial\mathbf{B}/\partial t)$, popř.

$$\delta\mathbf{B} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \delta t = -\delta t \cdot \text{rot } \mathbf{E}. \quad \text{II(6.5)}$$

Indukované pole vykoná (za čas δt) na proudech práci

$$W = \delta t \cdot \int \mathbf{j} \mathbf{E} dV. \quad \text{II(6.6)}$$

Srovnáním s II(5.11) je vidět, že tato veličina souvisí s Jouleovým teplem, což se dalo očekávat.

Vyjádření II(6.5) upravíme pomocí rovnice pro stacionární pole $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{H}$ a vektorové identity $\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} = \mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$. Integrál z $\text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ opět vymizí, takže zbyde

$$\delta W = \delta t \cdot \int (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E}) dV.$$

Po dosazení do $(\delta t \cdot \text{rot } \mathbf{E})$ získáme konečný vztah

$$\delta W = -\int (\mathbf{H} \delta\mathbf{B}) dV. \quad \text{II(6.7)}$$

Práce $d\mathcal{W}$ vykonaná jednotkovým objemem systému při změně pole o $d\mathbf{B}$ je určena vztahem

$$d\mathcal{W} = -\mathbf{H} d\mathbf{B}. \quad \text{II(6.8)}$$

Čtenář si snadno porovná souvislost výrazů II(6.4) a II(6.8) s vyjádřením I(6.12) a I(10.9) pro hustotu energie elektrického a magnetického pole.

Je-li těleso v elektrickém a magnetickém poli, pak standardní termodynamické vztahy³⁾ je nutno doplnit o člen II(6.4) a II(6.7). Zde uvedeme odpovídající výraz pro hustotu (\mathcal{F}) volné energie

$$d\mathcal{F} = -\mathcal{S} d\mathcal{T} + \zeta d\tau + \mathbf{E} d\mathbf{D} + \mathbf{H} d\mathbf{B}. \quad \text{II(6.9)}$$

³⁾ Příslušné vztahy, jakož i rozbor termodynamických vlastností systémů v elektromagnetickém poli lze najít např. v učebnici KVASNICA J., Termodynamika, SNTL Praha 1965.

Zde \mathcal{S} je (objemová) hustota entropie, \mathcal{T} absolutní teplota, ζ chemický potenciál a τ hustota.

Z výrazu II(6.9) lze standardním postupem přejít k jiným proměnným. Tak pro funkci

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F} - \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) - \mathbf{P} \mathbf{E} - \mu_0 \mathbf{M} \mathbf{H} \quad \text{II(6.10)}$$

platí

$$d\mathcal{F}^* = -\mathcal{S} d\mathcal{T} + \zeta d\tau - \mathbf{P} d\mathbf{E} - \mu_0 \mathbf{M} d\mathbf{H}. \quad \text{II(6.11)}$$

Tento výraz použijeme k důkazu symetrie tenzorů elektrické a magnetické susceptibility. Rozepíšeme skalární součiny $\mathbf{P} d\mathbf{E} = P_i dE_i$ a $\mathbf{M} d\mathbf{H} = M_i dH_i$. Jelikož $d\mathcal{F}^*$ je úplným diferenciálem platí podmínky integrability

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}^*}{\partial E_i \partial E_k} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}^*}{\partial E_k \partial E_i}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}^*}{\partial H_i \partial H_k} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}^*}{\partial H_k \partial H_i},$$

které vedou ke vztahům

$$\frac{\partial P_i}{\partial E_k} = \frac{\partial P_k}{\partial E_i}, \quad \text{II(6.12)}$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial H_k} = \frac{\partial M_k}{\partial H_i}. \quad \text{II(6.13)}$$

Použijeme-li pro P_i, P_k vyjádření $P_i = P_{0i} + \epsilon_0 \kappa_{ik} E_k$, $P_k = P_{0k} + \epsilon_0 \kappa_{ki} E_i$, dostaneme $\kappa_{ik} = \kappa_{ki}$, tj. vztah II(4.7). Ze vztahů II(6.13) a II(4.17) okamžitě plyne symetrie tenzoru magnetické susceptibility.

Ve stavu termodynamické rovnováhy je entropie maximální, což odpovídá minimu volné energie. Z podmínek stability pak plynou jisté nerovnosti pro stavové parametry. Důkaz těchto nerovností se provádí v termodynamice; zde uvedeme pouze výsledky, jejichž důkaz lze najít v citované učebnici termodynamiky. Pro tenzor permitivity platí nerovnosti

$$\epsilon_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \text{II(6.14)}$$

popř. pro hlavní hodnoty

$$\epsilon^{(1)} > 0, \quad \epsilon^{(2)} > 0, \quad \epsilon^{(3)} > 0. \quad \text{II(6.15)}$$

Obdobné nerovnosti platí pro tenzor μ_{ik} .

Viděli jsme, že $\mathbf{j} \mathbf{E}$ je Jouleovo teplo vyvinuté v jednotkovém objemu vodiče za jednotku času. Vzpomeneme-li si na vztah mezi přírůstkem tepla a entropie, pak produkce entropie σ je dána výrazem (\mathcal{T} je absolutní teplota)

$$\sigma = \int \frac{1}{\mathcal{T}} \mathbf{j} \mathbf{E} dV = \int \frac{1}{\mathcal{T}} \gamma_{ik} E_i E_k dV.$$

Podle Onsagerovy teorie nevratných procesů jsou koeficienty γ_{ik} symetrické

$$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}. \quad \text{II(6.16)}$$

V případě přítomnosti magnetického pole je nutno tuto rovnost zaměnit následovně

$$\gamma_{ik}(\mathbf{B}) = \gamma_{ki}(-\mathbf{B}). \quad \text{II(6.17)}$$

Z této symetrie pak plyne existence Hallova jevu a různých termodynamických jevů. Čtenář zajímající se o tuto problematiku nalezne bližší poučení v citované literatuře (viz též čl. IV.5).

II.7 Prostorová a časová inverze vektorů elektromagnetického pole

Při rotaci souřadnicového systému

$$x'_i = a_{ik}x_k \quad \text{II(7.1)}$$

se vektory elektromagnetického pole ($\mathbf{V} \equiv \mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}, \mathbf{M}, \mathbf{P}, \mathbf{j}$) transformují stejně, tj.

$$V'_i = a_{ik}V_k. \quad \text{II(7.2)}$$

Vektory však mohou mít různé vlastnosti při operaci *prostorové inverze* (čas se při tom nemění)

$$\mathbf{r}' = -\mathbf{r}, \quad t' = t. \quad \text{II(7.3)}$$

Veličiny jako rychlost \mathbf{v} , hybnost \mathbf{p} a síla \mathbf{F} , se při zrcadlení chovají stejně jako souřadnice, tj. mění orientaci na opačnou

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{v}, \quad \mathbf{p}' = -\mathbf{p}, \quad \mathbf{F}' = -\mathbf{F}.$$

Takové vektory nazýváme *pravé* neboli *polární*. Naproti tomu moment síly $\mathfrak{R} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ a moment hybnosti $\mathfrak{C} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ se při prostorové inverzi nemění

$$\mathfrak{R}' = +\mathfrak{R}, \quad \mathfrak{C}' = +\mathfrak{C}.$$

Vektory tohoto typu nazýváme *axiální*.

Vyjasníme si nyní chování vektorů elektromagnetického pole při prostorové inverzi. Při prostorové inverzi se mění znaménko diferenciálních operací *div* a *rot*. Hustota ρ je pravý skalár a \mathbf{j} je zřejmě polární vektor, proto při prostorové inverzi je $\rho'(-\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{j}'(-\mathbf{r}, t) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, tj. zkráceně

$$\rho' = \rho, \quad \mathbf{j}' = -\mathbf{j}. \quad \text{II(7.4)}$$

První série Maxwellových rovnic I(13.1) a I(13.2) pak vyžaduje, aby se při transformaci II(7.3) vektory transformovaly (jako *důsledek definičních vztahů*) takto:

$$\mathbf{D}' = -\mathbf{D}, \quad \mathbf{H}' = +\mathbf{H}. \quad \text{II(7.5)}$$

Z druhé série I(13.3) a I(13.4), popř. přímo z *definic* plyne

$$\mathbf{E}' = -\mathbf{E}, \quad \mathbf{B}' = +\mathbf{B}, \quad \text{II(7.6)}$$

a tudíž také

$$\mathbf{P}' = -\mathbf{P}, \quad \mathbf{M}' = +\mathbf{M}. \quad \text{II(7.7)}$$

Vektorový potenciál ($\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$) je polárním vektorem

$$\mathbf{A}' = -\mathbf{A}. \quad \text{II(7.8)}$$

Rovnice mechaniky jsou invariantní vůči změně znaménka času, tj. vzhledem k záměně minulého a budoucího (počátečního a koncového stavu). To značí, že je-li možný nějaký pohyb podle rovnice mechaniky, pak je možný i obrácený pohyb, při němž systém projde stejnými stavy, avšak v obrácené posloupnosti.

Snadno se přesvědčíme, že totéž platí i pro rovnice elektromagnetického pole. Operaci *časové inverze* vyjádříme rovnicemi

$$\mathbf{r}'' = +\mathbf{r}, \quad t'' = -t. \quad \text{II(7.9)}$$

Stejným způsobem jako předešle najdeme odpovídající transformační zákony vektorů elektromagnetického pole

$$\rho'' = \rho, \quad \mathbf{j}'' = -\mathbf{j}, \quad \text{II(7.10)}$$

$$\mathbf{D}'' = +\mathbf{D}, \quad \mathbf{H}'' = -\mathbf{H}, \quad \text{II(7.11)}$$

$$\mathbf{E}'' = +\mathbf{E}, \quad \mathbf{B}'' = -\mathbf{B}, \quad \text{II(7.12)}$$

$$\mathbf{P}'' = +\mathbf{P}, \quad \mathbf{M}'' = -\mathbf{M}, \quad \text{II(7.13)}$$

$$\mathbf{A}'' = -\mathbf{A}. \quad \text{II(7.14)}$$

Z těchto vztahů lze najít transformační vlastnosti složitějších výrazů. Tak např. pro vektor $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ platí $\mathbf{S}' = -\mathbf{S}$. Skalární součin $\mathbf{E}\mathbf{H}$ mění znaménko ($\mathbf{E}'\mathbf{H}' = -\mathbf{E}\mathbf{H}$), a je tedy pseudoskalárem.

Metody řešení elektrostatického pole

III.1 Rovnice elektrostatického pole

Oblast elektrostatických jevů je charakterizována časovou nezávislostí všech veličin a neexistencí proudů ($\mathbf{j} = 0$).

Výchozí rovnice elektrostatického pole tedy zní

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \text{III(1.1)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad \text{III(1.2)}$$

K těmto rovnicím je nutno připojit hraniční podmínky (viz čl. I.13)

$$E_{1t} - E_{2t} = 0, \quad D_{1n} - D_{2n} = \eta, \quad \text{III(1.3)}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = 0, \quad B_{1n} - B_{2n} = 0. \quad \text{III(1.4)}$$

Poněvadž rovnice pole včetně hraničních podmínek se rozpadají na dvě nezávislé soustavy, lze elektrostatické pole zkoumat nezávisle na poli magnetickém.

Nebude-li řečeno jinak, budeme předpokládat materiálové vztahy

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}, \quad \text{III(1.5)}$$

čemuž odpovídají hraniční podmínky

$$E_{1t} - E_{2t} = 0, \quad \varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \eta. \quad \text{III(1.6)}$$

Jak jsme vysvětlili již v úvodní kapitole, řešení rovnic III(1.1) lze najít z Laplaceovy—Poissonovy rovnice pro potenciál

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad \text{III(1.7)}$$

Jelikož $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, podmínky III(1.6) lze nahradit odpovídajícími hraničními

podmínkami pro tečné ($\partial \Phi / \partial \tau$) a normálové ($\partial \Phi / \partial n$) derivace potenciálu na rozhraní

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \tau} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} = 0, \quad \varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \eta, \quad \text{III(1.8)}$$

kde ($\partial \Phi / \partial \tau$) značí derivaci ve směru libovolného tečného vektoru.

Podle definice elektrostatického pole je vektor proudové hustoty $\mathbf{j} = 0$. Ve spojení s Ohmovým zákonem (viz čl. II.5) $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ mohou existovat dva případy

$$\begin{aligned} \gamma = 0, & \quad \text{avšak } \mathbf{E} \neq 0 \quad \text{vně vodičů,} \\ \gamma \neq 0, & \quad \text{avšak } \mathbf{E} = 0 \quad \text{uvnitř vodičů.} \end{aligned}$$

Elektrostatické pole uvnitř vodičů je tedy rovno nule, a proto vymizí uvnitř vodičů i vektory \mathbf{P} a \mathbf{D}

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = 0. \quad \text{III(1.9)}$$

Poněvadž tyto rovnosti jsou splněny při libovolných (konečných) hodnotách κ a ε , nelze v elektrostatice připsat vodivému prostředí určitou hodnotu statické elektrické susceptibility nebo permitivity. Hodnota permitivity vodiče je nepodstatná a nemůže mít vliv na jakýkoliv výsledek elektrostatiky.

Jelikož uvnitř vodiče je $\mathbf{D} = 0$, je také ve všech bodech uvnitř vodiče $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, což dokazuje, že v elektrostatickém případě nemohou uvnitř vodiče existovat objemové náboje. Na hranicích vodiče platí hraniční podmínky III(1.6). Jelikož uvnitř vodiče je $\mathbf{E}_2 = 0$, je na rozhraní vodiče s dielektrikem

$$E_{1t} = 0, \quad E_{1n} = \frac{\eta}{\varepsilon_1}, \quad \text{III(1.10)}$$

kde ε_1 je permitivita prostředí obklopujícího vodiče. Intenzita \mathbf{E} elektrostatického pole je tedy kolmá k povrchu vodiče a je rovna η / ε_1 , tj. $\mathbf{E}_1 = \eta \mathbf{n} / \varepsilon_1$. Celkový náboj

$$e = \oint D_{1n} ds = \oint \eta ds.$$

U dielektrik jsou vektory \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{P} obecně nenulové uvnitř i na rozhraní, takže je nutno řešit Laplaceovu—Poissonovu rovnici III(1.7) spolu s hraničními podmínkami III(1.8). Pokud nepředpokládáme lineární vztahy III(1.9), je postup obdobný. V rovnici $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ zavedeme $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\rho^{(p)} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$, $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$; pro potenciál Φ máme pak rovnici

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho^{(p)}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \quad \text{III(1.11)}$$

kteřá je z matematického hlediska stejného typu jako rovnice III(1.7) — jedná se o záměnu

$$\frac{1}{\varepsilon_0} (\varrho + \varrho^{(p)}) \leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} \varrho, \quad \text{III(1.12)}$$

proto budeme v obecných úvahách vycházet z rovnice III(1.7).

S ohledem na reference uvedeme ještě hraniční podmínky pro vektor polarizace (viz čl. I.5)

$$P_{1n} - P_{2n} = \eta^{(p)}, \quad \text{III(1.13)}$$

$$\frac{P_{1t}}{P_{2t}} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}. \quad \text{III(1.14)}$$

Druhý z těchto vztahů plyne z $E_{1t} - E_{2t} = 0$ a $\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E}$.

III.2 Věta o jednoznačnosti řešení

Laplaceova—Poissonova rovnice je parciální diferenciální rovnicí eliptického typu

$$\nabla^2 u = f. \quad \text{III(2.1)}$$

Je třeba najít funkci u třídy $C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ vyhovující v oblasti G rovnici III(2.1) a hraniční podmínce na ploše s

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right)_s = v, \quad \text{III(2.2)}$$

kde α , β a v jsou zadané spojité funkce na s , přičemž

$$\alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0, \quad (\partial u / \partial n)_s \neq 0.$$

V teorii parciálních diferenciálních rovnic se dokazuje, že při daných hraničních podmínkách III(2.2) má rovnice III(2.1) jednoznačné řešení.

Hraniční podmínky prvního druhu

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad (u)_s = u_0 \quad \text{III(2.3)}$$

Představují *Dirichletovu úlohu* řešení Laplaceovy—Poissonovy rovnice.

Hraniční podmínky druhého druhu

$$\beta = 1, \quad \alpha = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_s = u_1 \quad \text{III(2.4)}$$

Odpovídají *Neumannově úloze*.

Hraniční podmínky třetího druhu zní

$$\beta = 1, \quad \alpha \geq 0, \quad \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial n} \right)_s = u_2. \quad \text{III(2.5)}$$

Věta o jednoznačnosti má velký praktický význam. Najdeme-li nějakou speciální metodou řešení dané úlohy, pak věta o jednoznačnosti nám garantuje, že je to správné hledané řešení, jelikož jiných řešení není.

Jak jsme již uvedli, jednoznačnost řešení se dokazuje se vši potřebnou matematickou důkladností v kurzech matematické fyziky. (Čtenář naleznе tyto důkazy v citované matematické literatuře.) Zde podáváme jednoduchou verzi důkazu dvou typů hraničních úloh.

Elektrostatický potenciál vně vodičů vyhovuje Laplaceově rovnici

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{III(2.6)}$$

a na povrchu vodičů je

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_s = \frac{\eta}{\varepsilon}. \quad \text{III(2.7)}$$

V první hraniční úloze elektrostatiky se zadá potenciál Φ_A na každém vodiči. Je třeba najít potenciál všude vně vodičů cestou řešení rovnice $\nabla^2 \Phi = -\varrho/\varepsilon$.

V jiné hraniční úloze je dán náboj na každém vodiči

$$e_A = -\varepsilon \int_{s_A} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \quad \text{III(2.8)}$$

a vně vodičů splňuje potenciál rovnici III(2.6).

Nejdříve dokážeme jednoznačnost první úlohy. Vyjdeme z vektorové identity

$$\operatorname{div}(w \nabla w) = w \nabla^2 w + (\nabla w)^2. \quad \text{III(2.9)}$$

Prointegroujeme tuto identitu přes oblast, v níž $\nabla^2 w = 0$ (tj. přes oblast mimo vodičů) a integrál $\int \operatorname{div}(w \nabla w) dV$ upravíme pomocí Gaussovy věty. Dostaneme tak tzv. *Greenovu formuli*

$$\int_V (\nabla w)^2 dV = \oint_s w \frac{\partial w}{\partial n} ds. \quad \text{III(2.10)}$$

Nechť existují dvě řešení Φ_1 a Φ_2 vyhovující Laplaceově rovnici $\nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 \Phi_2 = 0$ a stejným hraničním podmínkám. Zavedeme rozdíl $\Phi' = \Phi_1 - \Phi_2$, takže je také $\nabla^2 \Phi' = 0$ a na hranici $\Phi' = 0$. Položíme-li v III(2.9) $w = \Phi'$, pak je

$$\int (\nabla \Phi')^2 dV = 0.$$

Jelikož $(\nabla \Phi')^2$ je nezápornou funkcí $(\nabla \Phi')^2 \geq 0$, musí být $\nabla \Phi' = 0$, tj. $\Phi' = \text{konst.}$ Jelikož na hranici je $\Phi' = 0$, je také $\Phi_1 = \Phi_2$, čímž je dokázána jednoznačnost řešení dané úlohy.

Jednoznačnost řešení druhé úlohy se dokáže obdobně. Nechť existují dvě řešení

vyhovující hraniční podmínce

$$-\varepsilon \int \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = e$$

a rovnici $\nabla^2 \Phi = 0$. Rozdíl $\Phi' = \Phi_1 - \Phi_2$ vyhovuje nulové hraniční podmínce

$$\oint \frac{\partial \Phi'}{\partial n} ds = 0. \quad \text{III(2.11)}$$

V rovnici III(2.10) položíme $w = \Phi'$ a uvážíme konstantnost potenciálů na povrchu vodičů ($\Phi' = \text{konst}$); dospějeme tak k rovnici

$$\int_V (\nabla \Phi')^2 dV = \Phi' \oint_S \frac{\partial \Phi'}{\partial n} ds.$$

S ohledem na hraniční podmínku III(2.11) je pravá strana rovna nule, a tudíž $(\nabla \Phi') = 0$, $\Phi_1 - \Phi_2 = \text{konst}$. Při stejném normování potenciálů tomu odpovídá $\Phi_2 = \Phi_1$, což představuje jednoznačnost řešení dané úlohy.

V případě podmínek III(2.5) je postup obdobný, i když poněkud zdlouhavější. Integrací identity III(2.9) dostaneme

$$\oint w \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right) ds = \int w (\nabla^2 w) dV + \int (\nabla w)^2 dV.$$

Položíme $w = \Phi$, $\nabla^2 w = -\rho/\varepsilon$, což dá

$$\int (\nabla \Phi)^2 dV = \int \Phi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) ds + \int \frac{1}{\varepsilon} \rho \Phi dV.$$

První člen na pravé straně upravíme buď pomocí hraniční podmínky III(2.3), anebo III(2.4) a pak se jednoznačnost opět dokáže sporem. Čtenář si tyto úvahy provede sám anebo je najde ve specializovaných monografiích.

III.3 Greenova funkce Laplaceovy rovnice

Dříve než přejdeme k vlastnímu výkladu, chceme upozornit čtenáře, že potřebné vztahy pro Diracovu distribuci, Greenovu funkci a Fourierovu transformaci nalezneme v dodatcích II až IV.

Greenova funkce $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{R})$ vyhovuje rovnici

$$\nabla^2 G(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{R}), \quad \text{III(3.1)}$$

kde $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. K řešení použijeme Fourierovy transformace

$$G(\mathbf{R}) = (2\pi)^{-3} \int G_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}) d^3\mathbf{k} \quad \text{III(3.2)}$$

$$\delta(\mathbf{R}) = (2\pi)^{-3} \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}) d^3\mathbf{k}. \quad \text{III(3.3)}$$

Po dosazení těchto vyjádření do III(3.1) a porovnání koeficientů u $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{R})$ dostaneme Fourierovu komponentu

$$G_{\mathbf{k}} = -\frac{1}{k^2}. \quad \text{III(3.4)}$$

Tento výsledek dosadíme do III(3.2) a v integrandu položíme $\mathbf{k}\mathbf{R} = kR \cos \vartheta$, $d^3\mathbf{k} = k^2 \sin \vartheta dk d\vartheta d\varphi$; dostaneme tak

$$G(\mathbf{R}) = -(2\pi)^{-3} \int_0^\infty dk \int_0^\pi \sin \vartheta \exp(ikR \cos \vartheta) d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Integrál přes φ je triviální a integrál přes ϑ se přepíše ve tvaru

$$\int_0^\pi \sin \vartheta \exp(ikR \cos \vartheta) d\vartheta = -\frac{1}{kR} [\exp(ikR \cos \vartheta)]_0^\pi = \frac{2 \sin(kR)}{kR},$$

Greenova funkce je pak rovna

$$G(\mathbf{R}) = -\frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \frac{\sin(kR)}{k} dk = -\frac{1}{4\pi R}. \quad \text{III(3.5)}$$

Při poslední úpravě jsme využili známého výsledku

$$\int_0^\infty y^{-1} \sin y dy = \pi/2.$$

Výraz III(3.5) představuje singulární část Greenovy funkce, lze k ní připojit nesingulární funkci G_0 ($\nabla^2 G_0 = 0$), která se volí v závislosti na okrajových podmínkách.

Greenova funkce III(3.5) umožňuje najít řešení nehomogenní rovnice

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \text{III(3.6)}$$

a to vztahem

$$\Phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varepsilon} \int G(\mathbf{R}) \rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}',$$

což vede k výsledku

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}',$$

k němuž jsme v úvodní kapitole (čl. I.3) dospěli na základě fyzikálních argumentů.

V úlohách č. 18 a 19 k této kapitole je ukázáno, že Greenovy funkce jednorozměrné a dvourozměrné Laplaceovy rovnice jsou

$$G(x, x') = \begin{cases} x'(1-x), & (x > x'), \\ x(1-x'), & (x < x'), \end{cases} \quad \text{III(3.7)}$$

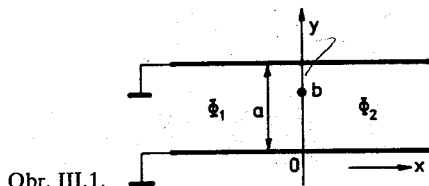
$$G(x, y; x', y') = \frac{1}{2\pi} \ln [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}. \quad \text{III(3.8)}$$

III.4 Metoda separace proměnných

Tato metoda řešení parciálních diferenciálních rovnic spočívá v tom, že parciální diferenciální rovnici nahrazuje odpovídající soustavou obyčejných rovnic.

V teorii potenciálu je tato metoda výhodná zejména v těch případech, kdy hraniční plocha odpovídá konstantní hodnotě jedné ze souřadnic, takže s hraničními podmínkami (spojitost potenciálu, skok jeho derivací apod.) se velice snadno pracuje.

Vysvětlíme si nyní podstatu metody na příkladě. Máme najít pole vytvořené lineárním nábojem (paralelním s osou z) mezi dvěma uzemněnými rovinnými paralelními vodiči (viz obr. III.1). Necht' roviny vodičů jsou $y=0$ a $y=a$ a necht' bodem $(0, b)$ prochází lineární vodič paralelní s osou z . Jedná se tedy o dvourozměrný problém, k jehož řešení je výhodné použít kartézské souřadnice.



Obr. III.1.

Řešení Laplaceovy rovnice

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \Phi = 0 \quad \text{III(4.1)}$$

budeme hledat v separovaném tvaru

$$\Phi(x, y) = X(x)Y(y). \quad \text{III(4.2)}$$

Po dosazení do III(4.1) dospějeme k rovnici

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Levá strana této rovnice závisí pouze na x , pravá pouze na y , což je možné pouze tehdy, když obě strany jsou rovny jedné a téže konstantě. Označíme-li tuto konstantu k^2 , pak máme dvě obyčejné diferenciální rovnice

$$X'' - k^2 X = 0, \quad Y'' + k^2 Y = 0. \quad \text{III(4.3)}$$

Obecné řešení těchto rovnic

$$X = A e^{kx} + B e^{-kx}, \quad Y = C \sin ky + D \cos ky \quad \text{III(4.4)}$$

nutno přizpůsobit hraničním podmínkám $\Phi = 0$ při $y=0$ a $y=a$ (uzemněné

vodiče), jakož i při $x = \pm\infty$. První dvě podmínky vyžadují, aby bylo $D=0$, $\sin(ka)=0$, tj.

$$k \equiv k_n = n \frac{\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots \quad \text{III(4.5)}$$

Hraniční podmínce při $x = \pm\infty$ vyhovíme tak, že zvláště zapíšeme řešení pro $x < 0$ a $x > 0$, tj.

$$\Phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{n\pi x/a} \sin(n\pi y/a), \quad (x \leq 0), \quad \text{III(4.6)}$$

$$\Phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a), \quad (x \geq 0). \quad \text{III(4.7)}$$

Koeficienty jsou zvoleny tak, aby zaručovaly spojitost potenciálu při $x=0$. Jejich konkrétní hodnoty určíme pomocí hraniční podmínky I(3.14), která má v daném případě tvar

$$\epsilon_0 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right]_{x=0} = \eta(y) = q\delta(y-b), \quad \text{III(4.8)}$$

kde q je náboj připadající na jednotku délky.

Po dosazení III(4.6) a III(4.7) do III(4.8) získáme pro koeficienty A_n podmínku

$$\sum_n 2A_n (n\pi a) \sin(n\pi y/a) = (q/\epsilon_0)\delta(y-b). \quad \text{III(4.9)}$$

Levá strana představuje rozvoj $\delta(y-b)$ podle trigonometrických funkcí. V dodatku II jsme ukázali, že $\delta(y-y')$ lze vyjádřit rovnicí

$$\delta(y-y') = \sum_n \varphi_n^*(y) \varphi_n(y'),$$

kde φ_n je ortonormální báze. Zvolíme-li

$$\varphi_n(y) = (2/a)^{1/2} \sin(n\pi y/a),$$

pak je

$$\delta(y-b) = \frac{2}{a} \sum_n \sin(n\pi y/a) \sin(n\pi b/a). \quad \text{III(4.10)}$$

Toto vyjádření dosadíme do III(4.9) a porovnáme koeficienty u $\sin(n\pi y/a)$. Výsledek zní

$$A_n = \frac{q}{n\pi\epsilon_0} \sin(n\pi b/a). \quad \text{III(4.11)}$$

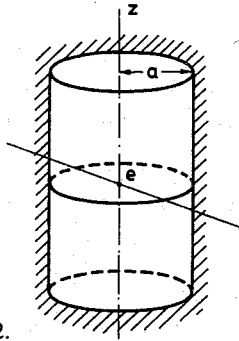
Tyto hodnoty A_n dosadíme do III(4.6) a III(4.7), čímž je postavený problém vyřešen.

Jedná-li se o problém s cylindrickou symetrií, je výhodné užít cylindrických souřadnic r, φ, z , v nichž Laplaceova rovnice zní

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad \text{III(4.12)}$$

Budeme hledat potenciál bodového náboje v uzemněném vodivém válci. Osu válce zvolíme ve směru osy z a bodový náboj na ose válce (viz obr. III.2.). Je zřejmé, že potenciál Φ nebude záviset na úhlu φ , proto položíme

$$\Phi = R(r)Z(z). \quad \text{III(4.13)}$$



Obr. III.2.

Po dosazení do III(4.12) separujeme rovnice pro R a Z

$$\frac{1}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2,$$

odkud plyne

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0, \quad \text{III(4.14)}$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z = 0. \quad \text{III(4.15)}$$

První z těchto rovnic představuje rovnici pro cylindrické funkce nultého řádu (viz dodatek VI) $J_0(kr)$ a $N_0(kr)$. Regulárním řešením při $r=0$ je Besselova funkce $J_0(kr)$, takže položíme

$$R = A J_0(kr).$$

Vzhledem k uzemnění vodiče je na jeho povrchu potenciál nulový, což vyžaduje, aby bylo (a je poloměr válce)

$$J_0(k_n a) = 0. \quad \text{III(4.16)}$$

Kořeny $k_n a$ Besselovy funkce tvoří diskretní množinu. Ujijeme vztahu (viz dodatek VI)

$$\int_0^a J_0(k_n r) J_0(k_m r) r dr = 0, \quad (m \neq n). \quad \text{III(4.17)}$$

Partikulární řešení rovnice III(4.15) jsou $\exp(\pm k_n z)$.

Analogicky předešlému příkladu zapíšeme řešení rovnice III(4.12) ve tvaru

$$\Phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) \exp(-k_n z), \quad (z \geq 0), \quad \text{III(4.18)}$$

$$\Phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) \exp(+k_n z), \quad (z \leq 0). \quad \text{III(4.19)}$$

Volba koeficientů zaručuje spojitost Φ při $z=0$.

Hraniční podmínky nyní zní

$$\epsilon_0 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right]_{z=0} = e \delta(r), \quad \text{III(4.20)}$$

kde $\delta(r)$ je Diracova distribuce normovaná vztahem

$$\int_0^a dr \int_0^{2\pi} \delta(r) r d\varphi = 1. \quad \text{III(4.21)}$$

V rovnici III(4.20) použijeme vyjádření III(4.18) a III(4.19), což po jednoduché úpravě přivede k rovnici

$$e \delta(r) = 2 \epsilon_0 \sum_n k_n A_n J_0(k_n r).$$

Tuto rovnici vynásobíme $r J_0(k_m r)$, prointegrujeme přes r v mezích $0 \leq r \leq a$, přičemž uijijeme ortogonálnost III(4.17). Po jednoduchém výpočtu dostaneme

$$A_n = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 k_n} \frac{J_0(0)}{\int_0^a [J_0(k_n r)]^2 r dr}.$$

Vzniklý integrál je znám z teorie Besselových funkcí. Po dosazení (J_1 je Besselova funkce prvního řádu)

$$\int_0^a [J_0(k_n r)]^2 r dr = \frac{1}{2} [a J_1(k_n a)]^2 \quad \text{III(4.22)}$$

pak dostaneme koeficienty (dosadíme $J_0(0) = 1$)

$$A_n = \frac{e}{2\pi\epsilon_0 k_n} \frac{1}{[a J_1(k_n a)]^2}. \quad \text{III(4.23)}$$

Tyto hodnoty koeficientů dosadíme do rovnic III(4.18) a III(4.19), čímž je potenciál dané úlohy úplně určen.

III.5 Metoda komplexních potenciálů

Dříve než přejdeme k vysvětlení této metody, připomeneme si některé výsledky teorie analytických funkcí, na nichž je daná metoda založena.

Mějme komplexní proměnnou

$$\zeta = x + iy \quad \text{III(5.1)}$$

a funkci $w \equiv w(\zeta)$ této komplexní proměnné. Po separaci reálné a imaginární části vyjádříme $w(\zeta)$ ve tvaru

$$w(\zeta) = u(x, y) + i v(x, y). \quad \text{III(5.2)}$$

Derivací $w'(\zeta)$ rozumíme limitu

$$w'(\zeta) = \lim_{\Delta\zeta \rightarrow 0} \frac{w(\zeta + \Delta\zeta) - w(\zeta)}{\Delta\zeta}, \quad \text{III(5.3)}$$

pokud tato existuje nezávisle na způsobu přibližování k bodu ζ . V prvním případě zvolíme $\Delta\zeta = \Delta x$, tj. paralelně s osou x Gaussovy (komplexní) roviny, což vede ke vztahu

$$w'(\zeta) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right],$$

resp.

$$w'(\zeta) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad \text{III(5.4)}$$

Ve druhém případě vypočteme limitu tak, že k bodu ζ se budeme blížit po cestě paralelní s osou y . Položíme-li $\Delta\zeta = i\Delta y$, pak stejným postupem dostaneme

$$w'(\zeta) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad \text{III(5.5)}$$

Srovnáním obou posledních výrazů dostáváme *Cauchyovy—Riemannovy podmínky* pro existenci derivace

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad \text{III(5.6)}$$

Zderivováním těchto podmínek se přesvědčíme o tom, že funkce $u(x, y)$ vyhovují dvourozměrné Laplaceově rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \quad \text{III(5.7)}$$

Budeme zkoumat elektrostatické pole \mathbf{E} , které nezávisí na z , a proto je stačí vyšetřovat v rovině $z=0$, tj. v rovině (x, y) . Ve vakuu vyhovuje toto pole obvyklým rovnicím

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad \text{III(5.8)}$$

První z těchto rovnic identicky vyhovuje gradient libovolné skalární funkce (potenciálu). Abychom zachovali standardní matematické označení, zavedeme pro potenciál $\Phi(x, y) \equiv u(x, y)$, tj. položíme

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad \text{III(5.9)}$$

S ohledem na identitu $\text{div rot} \equiv 0$ můžeme řešení druhé rovnice zapsat ve tvaru $\mathbf{E} = -\text{rot } \mathbf{v}$. (To je elektrická analogie magnetického vektorového potenciálu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$.) Nový vektor \mathbf{v} můžeme kalibrační transformací $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \text{grad } f$ zvolit tak, aby měl pouze z -ovou složku, tj. $\mathbf{v} \equiv (0, 0, v)$. K tomu stačí zvolit f tak, aby bylo

$$v'_x + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad v'_y + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Rovnice $\mathbf{E} = -\text{rot } \mathbf{v}$ pak poskytuje pro E_x, E_y vyjádření

$$E_x = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad E_y = \frac{\partial v}{\partial x}. \quad \text{III(5.10)}$$

Srovnání III(5.9) a III(5.10) vede ke Cauchovým—Riemannovým podmínkám III(5.6) pro funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$.

Zavedeme proto funkci w komplexní proměnné $\zeta = x + iy$ vztahem III(5.2). Reálná část $\text{Re } w = u$ je potenciálem příslušné dvourozměrné úlohy. Ekvipotenciální čáry se určí z rovnice

$$u(x, y) = \text{konst}, \quad \text{III(5.11)}$$

popř.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0. \quad \text{III(5.12)}$$

Imaginární část $v = \text{Im } w$ souvisí s rovnicí siločar. Použijeme-li v rovnici siločar

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}$$

vyjádření III(5.10), dospějeme k rovnici

$$\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \equiv dv = 0, \quad \text{III(5.13)}$$

z nichž plyne

$$v(x, y) \equiv \text{Im } w = \text{konst.} \quad \text{III(5.14)}$$

Siločáry jsou místa konstantních hodnot imaginární části komplexního potenciálu $w = u + iv$. Vzájemná ortogonalita siločar a ekvipotenciálních siločar je vyjádřena rovnicí

$$(\nabla u \cdot \nabla v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \text{III(5.15)}$$

kteřá je automaticky splněna díky podmínkám III(5.6).

Jelikož obě funkce u i v vyhovují Laplaceově rovnici III(5.7), lze kteroukoli z nich vzít v roli potenciálu. Vezmeme-li za potenciál $\text{Im } w$, pak siločáry budou dány rovnicí $\text{Re } w = \text{konst.}$

Vztah $w \equiv w(\zeta)$ představuje *konformní zobrazení* roviny komplexní proměnné ζ do roviny komplexní proměnné w . Vysvětlíme si použití metody konformního zobrazení na jednoduchém příkladě. Necht C je obrys (kontura) průřezu vodiče v rovině x, y a necht u_0 je potenciál tohoto vodiče. K tomu, abychom našli pole $u(x, y)$ vytvořené tímto vodičem, potřebujeme najít takovou funkci $w(\zeta)$, která by zobrazovala křivku C v rovině ζ na přímku $w = u_0$ rovnoběžnou s reálnou osou komplexní roviny w . Reálná část $u \equiv \text{Re } w$ pak určuje potenciál pole.

Řešení konkrétních úloh touto metodou vyžaduje dosti rozsáhlých znalostí teorie analytických funkcí, což přesahuje rámec této učebnice. Čtenáře zajímavajícího se o tuto metodu odkazujeme na citovanou monografickou literaturu. Jednoduché ilustrace této metody jsou v řešených úlohách k této kapitole.

III.6 Metoda nábojového zobrazení a metoda inverze

Existuje řada způsobů, jimiž můžeme jednu elektrostatickou úlohu nahradit jinou. Uvedeme některé příklady.

Mějme dva stejně veliké nesouhlasné bodové náboje e umístěné ve vakuu v bodech $x = y = 0, z = \pm a$. Potenciál $\Phi(\mathbf{r})$ vytvořený v bodě \mathbf{r} touto soustavou nábojů bude

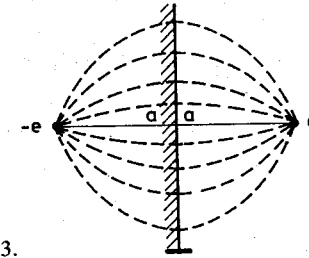
$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right), \quad \text{III(6.1)}$$

kde R, R' jsou vzdálenosti bodu pozorování od nábojů e a $e' = -e$, tj.

$$R = [h^2 + (z - a)^2]^{1/2}, \quad R' = [h^2 + (z + a)^2]^{1/2}. \quad \text{III(6.2)}$$

Symbolem h jsme označili $h \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$. Potenciál je nulový v bodech $R = R'$, tj. v rovině $z = 0$. Rovina $z = 0$, tj. rovina (x, y) je tedy ekvipotenciální plochou

nulového potenciálu. Tuto rovinu lze tedy nahradit uzemněnou vodivou plochou (viz obr. III.3), přičemž potenciál po obou stranách této plochy zůstane nezměněn. (Elektrostatické pole neproniká na druhou stranu vodiče.)



Obr. III.3.

Došli jsme tak k závěru, že elektrostatické pole vytvořené nábojem vně uzemněné vodivé roviny je ekvivalentní poli dvou nábojů umístěných symetricky vzhledem k této rovině. (Využívá se při tom jednoznačnosti řešení Laplaceovy—Poissonovy rovnice.) Tento fiktivní náboj $e' = -e$ se nazývá *zobrazením* náboje e . Potenciál pole náboje e a jeho obrazu je dán rovnicí III(6.1). Na uzemněné ploše (tj. na rozhraní $R' = R$) je skutečně $\Phi = 0$, takže hraniční podmínka je splněna. Na hraniční ploše se indukují povrchové náboje s hustotou

$$\eta = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{e}{2\pi} \frac{a}{(h^2 + a^2)^{3/2}}. \quad \text{III(6.3)}$$

Plošný element roviny vyjádříme jako plošku infinitezimálního mezikruží $ds = 2\pi h dh$. Elementární integrace pak poskytne výsledek

$$\int \eta ds = -\frac{ea}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2\pi h dh}{(h^2 + a^2)^{3/2}} = -e. \quad \text{III(6.4)}$$

Podobně postupujeme i v případě dielektrického rozhraní. Mějme elektrické náboje rozdělené s hustotou ρ v obou dielektrických prostředích, mezi nimiž je rozhraní. Máme najít potenciály v obou prostředích. Na rozhraní platí hraniční podmínky

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad \epsilon_1 (\partial \Phi_1 / \partial n) = \epsilon_2 (\partial \Phi_2 / \partial n). \quad \text{III(6.5)}$$

Způsob řešení spočívá v tom, že zavedeme *fiktivní náboje* (zobrazení skutečných nábojů), a to tak, že při určování potenciálu Φ_1 kromě nábojů s hustotou ρ_1 v prvním prostředí zavedeme fiktivní hustotu ρ_1' nábojů umístěných (zobrazených) v prostředí 2. Podobně při určování potenciálu Φ_2 zavedeme fiktivní hustotu ρ_2' .

Potenciály jsou pak vyjádřeny rovnicemi

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \int \frac{\rho_1(\mathbf{r}') + \rho_1'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}', \quad \text{III(6.6)}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \int \frac{\rho_2(\mathbf{r}') + \rho_2'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'. \quad \text{III(6.7)}$$

Zatím neurčené fiktivní hustoty ρ_1' , ρ_2' nutno zvolit tak, aby na rozhraní platily podmínky III(6.5).

Aplikujeme nyní tuto metodu na určení pole vytvořené bodovým nábojem e umístěným ve vzdálenosti a od rovinného rozhraní dvou dielektrik. Hustota skutečného náboje je

$$\begin{aligned} \rho_1(\mathbf{r}') &= e\delta(x')\delta(y')\delta(z' - a), \\ \rho_2(\mathbf{r}') &= 0. \end{aligned}$$

Hustoty fiktivních nábojů vezmeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \rho_1'(\mathbf{r}') &= e'\delta(x')\delta(y')\delta(z' + a), \\ \rho_2'(\mathbf{r}') &= e''\delta(x')\delta(y')\delta(z' - a). \end{aligned}$$

Po dosazení těchto hustot do III(6.6) a III(6.7) dostaneme potenciály

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_1} \left(\frac{e}{R} + \frac{e'}{R'} \right), \quad \text{III(6.8)}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_2} \frac{e''}{R}. \quad \text{III(6.9)}$$

Symbole R a R' mají stejný význam jako v rovnici III(6.2). Z hraničních podmínek III(6.5) pak plynou vztahy

$$e + e' = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} e'', \quad e - e' = e'',$$

z nichž získáme fiktivní náboje

$$e' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e, \quad e'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e. \quad \text{III(6.10)}$$

Tyto hodnoty pak dosadíme do III(6.8) a III(6.9), čímž je hledaný potenciál zcela určen.

Metoda inverze je založena na jistých invariantních vlastnostech Laplaceovy rovnice, jež ve sférických souřadnicích r , ϑ , φ zní

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right] = 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že tato rovnice se nezmění, když místo proměnné r zavedeme novou proměnnou r' tzv. transformací inverze

$$rr' = a^2 \quad \text{III(6.11)}$$

a současně zaměníme $\Phi(r, \vartheta, \varphi)$ novou funkcí

$$\Phi' \equiv \Phi'(r', \vartheta, \varphi) = \frac{a}{r'} \Phi \left(\frac{a^2}{r'}, \vartheta, \varphi \right). \quad \text{III(6.12)}$$

To znamená, že je-li Φ řešením Laplaceovy rovnice, pak funkce Φ' je také řešením této rovnice.

Smysl transformace inverze III(6.11) je následující. Je-li bod (náboj) uvnitř koule o poloměru inverze a , pak transformovaný bod (náboj) r' bude vně této koule.

Odpovídající transformaci (inverzi) nábojů najdeme následující úvahou. Mějme bodový náboj e v bodě \mathbf{r}_0 ; potenciál tohoto náboje v bodě $\mathbf{r} \equiv (r, \vartheta, \varphi)$ je

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0 |\delta\mathbf{r}|}.$$

V blízkosti náboje je $\delta\mathbf{r}$ malé. Náboj lokalizovaný v bodě \mathbf{r}_0 se transformací inverze přemístí do $\mathbf{r}'_0 = (a^2/r_0^2)\mathbf{r}_0$. Diferencováním rovnice $\mathbf{r}' = (a/r)^2\mathbf{r}$ dostaneme

$$|\delta\mathbf{r}| = \left(\frac{a}{r_0} \right)^2 |\delta\mathbf{r}'| = \left(\frac{r_0}{a} \right)^2 |\delta\mathbf{r}'|^2.$$

Potenciál Φ pak bude

$$\Phi = \frac{ea^2}{4\pi\epsilon_0 r_0^2 |\delta\mathbf{r}'|}.$$

Ve shodě s III(6.12) při $r' \rightarrow r_0$ je $\Phi' = (a/r_0)\Phi$, což po jednoduché úpravě dá

$$\Phi' = \frac{ea}{4\pi\epsilon_0 r_0 |\delta\mathbf{r}'|}.$$

Srovnáním s potenciálem $\Phi' = e/(4\pi\epsilon_0 |\delta\mathbf{r}'|)$ dostaneme transformační zákon nábojů

$$e' = \frac{ea}{r_0}. \quad \text{III(6.13)}$$

Transformací III(6.11) se mění tvary těles a jejich vzájemné vzdálenosti. Z této transformace se snadno odvodí transformační zákony pro objem a hustotu nábojů.

Obdobné transformace inverze lze získat i pro jiné souřadné soustavy. Čtenář zajímavější se o tyto klasické metody výpočtu elektrických polí najde bližší poučení ve speciální monografické literatuře.

III.7 Multipólový rozvoj elektrostatického pole

Často potřebujeme znát pole na vzdálenostech značně převyšujících rozměry oblasti, v níž jsou soustředěny náboje budící toto pole. Atomové jádro má lineární rozměry řádově 10^{-15} m. Pole vytvořené atomovým jádrem závisí na rozdělení elektrického náboje uvnitř jádra. Toto pole působí na elektronový obal nalézající se v průměrné vzdálenosti 10^{-10} m od atomového jádra, což značně převyšuje rozměry atomového jádra. V závislosti na tomto poli se budou měnit i energetické hladiny atomu. Z energetických hladin atomu lze získávat informace o rozdělení elektrického náboje v atomovém jádře. Po těchto úvodních poznámkách přejdeme ke kvantitativnímu řešení pole na velikých vzdálenostech.

Mějme soustavu nabitých těles s prostorovou hustotou náboje $\rho \equiv \rho(\mathbf{r})$; vně těles předpokládáme vakuum. Potenciál $\Phi(\mathbf{r})$ je určen vztahem

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \text{III(7.1)}$$

a náboje nechť jsou rozloženy v jisté konečné části prostoru $a \leq r' \leq b$. Budeme zkoumat potenciál Φ v oblastech hodně vzdálených od nábojů, čemuž odpovídá zesílená nerovnost

$$r' \ll r, \quad (r'/r) \ll 1. \quad \text{III(7.2)}$$

Za těchto předpokladů lze jmenovatele $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ rozvinout v řadu podle mocnin r'

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} x'_i x'_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots$$

V zápisu je užito Einsteinovy sumační konvence. Při úpravě derivací použijeme vztahu

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}, \quad \text{III(7.3)}$$

jenž okamžitě plyne z derivace výrazu $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Ve shodě s tím je

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{n_i}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} (3n_i n_j - \delta_{ij}),$$

kde

$$n_i = x_i/r \quad \text{III(7.4)}$$

jsou složky jednotkového vektoru průvodiče \mathbf{r} bodu, v němž určujeme pole.

Rozvoj $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ lze zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} n_i x'_i + \frac{1}{2r^2} (3n_i n_j - \delta_{ij}) x'_i x'_j + \dots \quad \text{III(7.5)}$$

Po dosazení tohoto rozvoje do III(7.1) dostaneme pro potenciál $\Phi(\mathbf{r})$ vyjádření

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi^{(l)}(\mathbf{r}), \quad \text{III(7.6)}$$

kde jednotlivé členy mají následující význam.

První člen

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \rho(\mathbf{r}') d^3r' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{III(7.7)}$$

je potenciál náboje e sídlícího v počátku souřadné soustavy. Omezíme-li se v rozvoji III(7.6) pouze na tento první člen, znamená to záměnu skutečného rozdělení náboje bodovým nábojem v počátku souřadnic. Je-li soustava elektricky neutrální ($e = 0$), tento člen dá nulový příspěvek. S touto situací se setkáváme např. u elektrického pole neutrálních atomů.

Druhý člen $\Phi^{(1)}$ je dán vztahem

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} (\mathbf{p}\mathbf{n}), \quad \text{III(7.8)}$$

kde

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3r' \quad \text{III(7.9)}$$

je *elektrický dipólový moment* soustavy. Všimněme si některých důležitých vlastností této veličiny. Pro soustavu *bodových* nábojů

$$\rho(\mathbf{r}') = \sum_A e_A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_A) \quad \text{III(7.10)}$$

je \mathbf{p} dáno výrazem

$$\mathbf{p} = \sum_A e_A \mathbf{r}_A \quad \text{III(7.11)}$$

známým z úvodního kursu fyziky. Takto definovaný dipólový moment obecně závisí na volbě počátku souřadné soustavy. Z článku I.4 víme, že pro soustavu elektricky neutrální \mathbf{p} na volbě počátku nezávisí.

S ohledem na pozdější reference uvedeme výraz pro elektrický dipólový moment dvou stejně velikých nesouhlasných nábojů ($e_1 = -e_2 \equiv e$)

$$\mathbf{p} = e_1 \mathbf{r}_1 + e_2 \mathbf{r}_2 = e(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv e\mathbf{r}. \quad \text{III(7.12)}$$

V případě většího počtu nábojů označíme kladné náboje $e_A^{(+)}$ a záporné $-e_B^{(-)}$ a jejich polohové vektory $\mathbf{r}_A^{(+)}$, $\mathbf{r}_B^{(-)}$. Elektrický dipólový moment bude vyjádřen rovnicí

$$\mathbf{p} = \sum_A e_A^{(+)} \mathbf{r}_A^{(+)} - \sum_B e_B^{(-)} \mathbf{r}_B^{(-)}. \quad \text{III(7.13)}$$

Je výhodné zavést „elektrický střed“ kladných a záporných nábojů

$$\mathbf{R}^{(+)} = \frac{\sum_A e_A^{(+)} \mathbf{r}_A^{(+)}}{\sum_A e_A^{(+)}} , \quad \mathbf{R}^{(-)} = \frac{\sum_B e_B^{(-)} \mathbf{r}_B^{(-)}}{\sum_B e_B^{(-)}} , \quad \text{III(7.14)}$$

což je obdoba hmotného středu („těžiště“) soustavy. Vyjádření elektrického dipólového momentu III(7.13) pak získá tvar

$$\mathbf{p} = e^{(+)} \mathbf{R}^{(+)} - e^{(-)} \mathbf{R}^{(-)}, \quad \text{III(7.15)}$$

kde

$$e^{(+)} \equiv \sum_A e_A^{(+)}, \quad e^{(-)} = \sum_B e_B^{(-)} \quad \text{III(7.16)}$$

jsou celková množství kladných a záporných nábojů. Je-li soustava elektricky neutrální ($e^{(+)} = e^{(-)} = e$), pak III(7.15) získá jednoduchý tvar

$$\mathbf{p} = e \mathbf{R}, \quad (e^{(+)} = e^{(-)}), \quad \text{III(7.17)}$$

kde

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{(+)} - \mathbf{R}^{(-)}$$

je průvodič od středu záporných nábojů ke středu kladných nábojů. Výraz III(7.17) má stejný tvar jako rovnice III(7.12) pro elektrický dipólový moment neutrální soustavy dvou nábojů.

Často se setkáváme se soustavou nábojů, jejichž měrný náboj (podíl náboje a hmotnosti částice) e_A/m_A je stejný

$$\frac{e_A}{m_A} = \text{konst} \equiv \frac{e_0}{m_0}. \quad \text{III(7.18)}$$

S touto situací se nejčastěji setkáváme u soustav stejných částic. Za předpokladu III(7.18) bude

$$\mathbf{p} = \sum_A \frac{e_A}{m_A} m_A \mathbf{r}_A = \frac{e_0}{m_0} \sum_A m_A \mathbf{r}_A,$$

jelikož konstantní faktor e_A/m_A lze vyjmout před sumační znak. Zavedeme-li vektor \mathbf{R}_0 hmotného středu vztahem

$$m \mathbf{R}_0 = \sum_A m_A \mathbf{r}_A,$$

kde $m = \sum_A m_A$ je celková hmotnost soustavy částic, pak

$$\mathbf{p} = \frac{e_0}{m_0} m \mathbf{R}_0. \quad \text{III(7.19)}$$

Elektrický dipólový moment soustavy částic se stejným měrným nábojem je přímo úměrný polohovému vektoru \mathbf{R}_0 hmotného středu. Tento výsledek má závažné důsledky pro charakter elektromagnetického záření takových soustav, jak o tom pojednáme v kapitole XI.

Po těchto vysvětlivkách přejdeme k výpočtu pole $\mathbf{E}^{(1)}$ vytvořeného elektrickým dipólem. Ze vztahu $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, a tedy i $\mathbf{E}^{(1)} = -\nabla \Phi^{(1)}$ získáme po jednoduché úpravě hledaný vztah

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}], \quad \text{III(7.20)}$$

k němuž jsme dospěli již v úvodní kapitole.

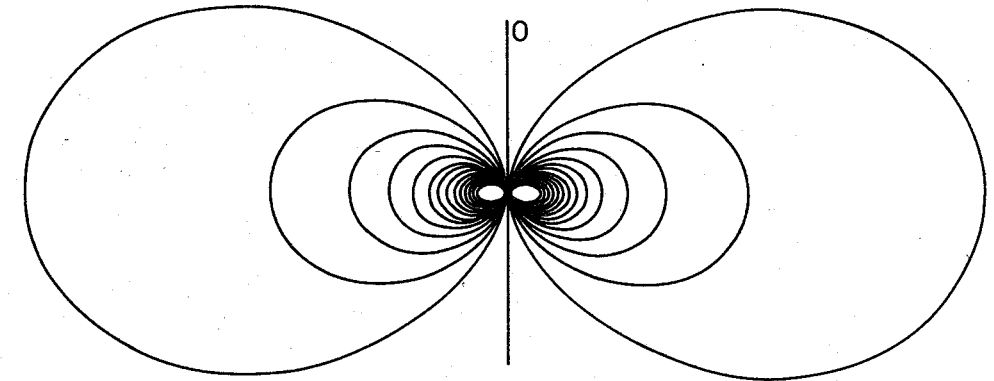
Nechť dipól je orientován ve směru osy z ($p_x = p_y = 0$, $p_z = p$) a necht' ϑ je úhel mezi \mathbf{p} a \mathbf{r} . Složky pole jsou

$$E_r = \frac{2p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \quad \text{III(7.21)}$$

Rovnice silokřivek $(dr/E_r) = (r d\vartheta/E_\vartheta)$ má pak řešení

$$r = C \sin^2 \vartheta, \quad \text{III(7.22)}$$

kde C je integrační konstanta. Změnou této konstanty dostáváme svazek křivek, jejichž tvar je na obr. III.4.



Obr. III.4. Elektrické siločáry elektrického dipólu

Je-li rozložení náboje zrcadlově symetrické, tj. je-li $\rho(-\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$, pak elektrický dipólový moment takové soustavy je roven nule. Integrand v III(7.9) je antisymetrickou funkcí a příslušný integrál je identicky roven nule.

Následující člen rozvoje potenciálu III(7.6) má tvar

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6r^3} \int (3x'_i x'_j)(3n_i n_j - \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Kvůli symetrii odečteme od tohoto výrazu nulový člen

$$0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6r^3} \int r'^2 \delta_{ij} (3n_i n_j - \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') d^3 r'.$$

Anulování tohoto výrazu plyne z identity $\delta_{ij}(3n_i n_j - \delta_{ij}) \equiv 0$. Člen $\Phi^{(2)}$ pak zapíšeme ve tvaru

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{6r^3} Q_{ij} (3n_i n_j - \delta_{ij}). \quad \text{III(7.23)}$$

Veličina

$$Q_{ij} = \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{r}') d^3 r' \quad \text{III(7.24)}$$

se nazývá *tenzor elektrického kvadrupólového momentu*. Tento tenzor je očividně symetrický

$$Q_{ij} = Q_{ji} \quad \text{III(7.25)}$$

a součet jeho diagonálních elementů (stopa, Spur, Trace) je roven nule (nezávisle na volbě souřadnicové soustavy)

$$\text{Sp } Q \equiv \text{Tr } Q \equiv Q_{ii} = 0. \quad \text{III(7.26)}$$

Ze vztahů III(7.25) a III(7.26) plyne, že tenzor Q_{ij} má obecně pět ($9 - 3 - 1 = 5$) nezávislých komponent. Ve vhodně zvolené soustavě lze tento počet komponent zredukovat na dvě. Jako každý symetrický tenzor lze i Q_{ij} redukovat k hlavním osám, tj. najít takovou souřadnou soustavu, v níž jsou všechny nediagonální ($i \neq j$) komponenty rovny nule. Nenulové jsou pak pouze diagonální komponenty. Vztah III(7.26) pak vede k závěru, že elektrické kvadrupólové pole je popsáno dvěma parametry charakterizujícími rozdělení nábojů.

Je-li rozdělení nábojů sféricky symetrické $\rho(\mathbf{r}) = \rho(r)$, pak integrace výrazu $(3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij})$ přes úhlové proměnné dá identickou nulu, a tudíž i kvadrupólový tenzor je roven nule. Tenzor elektrického kvadrupólového momentu je tedy mírou odchylky od sférické symetrie rozdělení nábojů.

Při *axiální symetrii* $\rho(\mathbf{r}) = \rho(x^2 + y^2, z)$ budou hlavní hodnoty Q_{11} a Q_{22} stejné, takže III(7.26) dá $2Q_{11} + Q_{33} = 0$. V takovém případě máme pouze jednu nezávislou komponentu, např. $Q_{33} \equiv Q$, zvanou *elektrický kvadrupólový moment*. Získané poznatky vyjádříme rovnicemi

$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_{33} = -\frac{1}{2} Q. \quad \text{III(7.27)}$$

Nyní přejdeme k úpravě výrazu III(7.23). Jelikož $Q_{ij} \delta_{ij} = Q_{ii} = 0$, bude platit

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} Q_{ij} n_i n_j. \quad \text{III(7.28)}$$

Tento výraz je součinem (úžením, kontrakcí) dvou tenzorů druhého řádu Q_{ij} a $n_i n_j$, a je tudíž invariantem nezávislým na volbě souřadné báze. Zvolíme-li bázi hlavních os tenzoru Q_{ij} , pak je

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} (Q_{11} n_1^2 + Q_{22} n_2^2 + Q_{33} n_3^2).$$

Jednu z komponent, např. Q_{22} , lze vyloučit pomocí vztahu III(7.26). Pro axiální symetrické rozdělení nábojů uijeme III(7.27), což spolu se vztahem $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ dá

$$\Phi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{16\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \quad \text{III(7.28')}$$

kde $n_3 = \cos \vartheta$. Elektrickou intenzitu určíme ze vztahů $E_r = -\partial\Phi/\partial r$, $rE_\vartheta = -\partial\Phi/\partial\vartheta$, což poskytne vyjádření

$$E_r = \frac{3Q}{16\pi\epsilon_0 r^4} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \quad E_\vartheta = \frac{3Q}{16\pi\epsilon_0 r^4} \sin 2\vartheta. \quad \text{III(7.29)}$$

Z těchto rovnic jsou vidět *směrové charakteristiky* (směrová závislost) pole. Rovnice siločar je odvozena v řešených úlohách k této kapitole.

S ohledem na další reference uvedeme ještě výraz pro tenzor Q_{ij} soustavy bodových nábojů e_A . V definičním vztahu III(7.24) uijeme vyjádření III(7.10) pro hustotu soustavy bodových nábojů. Podle pravidel o integraci výrazů s delta distribucí okamžitě získáme vyjádření

$$Q_{ij} = \sum_A e_A (3x_{iA} x_{jA} - r_A^2 \delta_{ij}), \quad \text{III(7.30)}$$

kde x_{iA} je i -tá složka průvodiče A -tého náboje, $r_A = |\mathbf{r}_A|$.

Rozbor dalších členů rozvoje III(7.6) v kartézských souřadnicích je málo přehledný. Obecný člen rozvoje lze snadno vyjádřit pomocí sférických funkcí (viz dodatek V). Při $r' < r$ uijeme rozvoje

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r} \sum_l \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \gamma), \quad \text{III(7.31)}$$

kde $\cos \gamma = \mathbf{nn}'$ určuje úhel mezi vektory \mathbf{r} a \mathbf{r}' ($\mathbf{n}' = \mathbf{r}'/r'$). Legendreův polynom $P_l(\cos \gamma) \equiv P_l(\mathbf{nn}')$ lze vyjádřit pomocí sférických funkcí $Y_m(\mathbf{n})$, $Y_m(\mathbf{n}')$ vztahujících se k pozorovacímu bodu a k náboji. Příslušný vztah zvaný *adiční teorém* zní

$$P_l(\mathbf{nn}') = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_m^*(\mathbf{n}) Y_m(\mathbf{n}').$$

Rozvoj

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \frac{4\pi}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{1}{2l+1} \left(\frac{r'}{r}\right)^l Y_{lm}^*(\mathbf{n}) Y_{lm}(\mathbf{n}'). \quad \text{III(7.32)}$$

dosadíme do III(7.1). Potenciál Φ vyjádříme řadou

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi^{(l)}(\mathbf{r}),$$

kde

$$\Phi^{(l)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{+l} \mathcal{Q}_{lm} Y_{lm}^*(\mathbf{n}), \quad \text{III(7.33)}$$

kde

$$\mathcal{Q}_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int (r')^l \rho(r') Y_{lm}(\mathbf{n}') d^3r' \quad \text{III(7.34)}$$

určuje $2l+1$ veličin elektrického momentu l -tého řádu. V teorii záření se elektrické momenty l -tého řádu označují symbolem El . Vyjádření \mathcal{Q}_{lm} pro soustavu bodových nábojů je

$$\mathcal{Q}_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_A e_A r_A^l Y_{lm}(\mathbf{n}_A). \quad \text{III(7.35)}$$

III.8 Soustava nábojů

ve vnějším elektrostatickém poli

Mějme soustavu (bodových) nábojů e_A v bodech \mathbf{R}_A . Potenciál vnějšího pole, do něhož je tato soustava nábojů vložena, označíme symbolem Φ . Náboje nabudou v poli potenciální energii

$$U = \sum_A e_A \Phi(\mathbf{R}_A). \quad \text{III(8.1)}$$

Vezmeme-li nějaký bod \mathbf{r} uvnitř soustavy nábojů, vyjádříme polohu \mathbf{R}_A ve tvaru

$$\mathbf{R}_A = \mathbf{r} + \mathbf{r}_A.$$

Výraz $\Phi(\mathbf{R}_A) = \Phi(\mathbf{r} + \mathbf{r}_A)$ rozvedeme v řadu podle mocnin \mathbf{r}_A a získáme rozvoj

$$U = \sum_A U^{(l)}, \quad \text{III(8.2)}$$

kde první členy jsou

$$U^{(0)} = \left(\sum_A e_A \right) \Phi(\mathbf{r}), \quad \text{III(8.3)}$$

$$U^{(1)} = \sum_A e_A (\mathbf{r}_A \nabla) \Phi(\mathbf{r}), \quad \text{III(8.4)}$$

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_A e_A (\mathbf{r}_A \nabla) (\mathbf{r}_A \nabla) \Phi(\mathbf{r}). \quad \text{III(8.5)}$$

Je-li soustava elektricky neutrální, pak $U^{(0)} = 0$ a první nenulový příspěvek může dát $U^{(1)}$. Položíme-li $\nabla \Phi = -\mathbf{E}$, pak je

$$U^{(1)} = -\mathbf{p} \mathbf{E}, \quad \text{III(8.6)}$$

kde $\mathbf{p} = \sum_A e_A \mathbf{r}_A$ je elektrický dipólový moment soustavy. Vzorec III(8.6) určuje potenciální energii elektrického dipólu \mathbf{p} vloženého do elektrického pole \mathbf{E} . Síla $\mathbf{F}^{(1)}$ působící na dipól se vypočte ze vztahu $\mathbf{F} = -\nabla U$, což v daném případě dá

$$\mathbf{F}^{(1)} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}, \quad \text{III(8.7)}$$

popř. ve složkovém zápisu

$$F_i^{(1)} = p_j (\partial E_i / \partial x_j). \quad \text{III(8.8)}$$

V homogenním elektrostatickém poli tedy na dipól síla nepůsobí.

Moment sil působící na dipól jsme odvodili v kapitole I (čl. I.4). K tomu výsledku lze dospět též následující úvahou. Síla působící na náboj e_A je $e_A \mathbf{E}$ a moment sil

$$\mathfrak{R} = \sum_A [\mathbf{r}_A, e_A \mathbf{E}],$$

tj.

$$\mathfrak{R} = [\mathbf{p}, \mathbf{E}].$$

Výraz pro $U^{(2)}$ lze standardní úpravou převést na tvar

$$U^{(2)} = \frac{1}{2} Q_{ij} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}. \quad \text{III(8.9)}$$

Tento vzorec je výchozím vztahem pro spektroskopické určování elektrického kvadrupólového momentu atomových jader. Při $Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_{33} \equiv -\frac{1}{2} Q$ je

$$U^{(2)} = \frac{1}{4} Q \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{1}{4} Q \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \text{III(8.10)}$$

kde Φ je potenciál vytvořený elektronovým obalem atomu. Energetické hladiny elektronů se změní o střední hodnotu $\Delta \mathcal{E} \equiv \langle U^{(2)} \rangle$. Změřením tohoto posuvu energetických hladin získáme Q , a tím i informace o tvaru atomového jádra. Podrobnosti se probírají v kursech atomové a jaderné fyziky.

S ohledem na reference uvedeme elektrický kvadrupólový moment rovnoměrně

nabitého elipsoidu s poloosami a, b, c

$$Q_{11} = \frac{e}{5}(2a^2 - b^2 - c^2), \quad Q_{22} = \frac{e}{5}(2b^2 - a^2 - c^2), \quad Q_{33} = \frac{e}{5}(2c^2 - a^2 - b^2),$$

III(8.11)

kde $e = \frac{4}{3}\pi abcq$ je náboj elipsoidu. Ve speciálním případě rotačního elipsoidu ($a = b$) je $Q = \frac{2}{3}e(c^2 - a^2)$. Odvození III(8.11) je v příkladě III(12) k této kapitole.

III.9 Fourierův rozklad elektrostatického pole

Pro potenciál $\Phi(\mathbf{r})$ vytvořený bodovým nábojem e sídlícím v počátku souřadnic platí Laplaceova—Poissonova rovnice

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -\frac{e}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}).$$

III(9.1)

Použijeme Fourierovy transformace (viz dodatek IV)

$$\Phi(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int \Phi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k},$$

$$\delta(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k}.$$

Z těchto vztahů plyne

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = -(2\pi)^{-3} \int k^2 \Phi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k},$$

což dá pro Fourierovu komponentu $\Phi_{\mathbf{k}}$ potenciálu

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{\epsilon_0} \frac{1}{k^2}.$$

III(9.2)

Intenzitu můžeme rovněž vyjádřit pomocí Fourierova integrálu

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k}.$$

III(9.3)

Ze vztahu $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$, tj.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -i(2\pi)^{-3} \int \mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k},$$

pak plyne pro Fourierovu komponentu pole $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ vyjádření

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}} = -\frac{ie}{\epsilon_0} \frac{\mathbf{k}}{k^2}.$$

III(9.4)

Fourierův obraz elektrostatické intenzity je *paralelní* s vektorem \mathbf{k} , proto říkáme, že v \mathbf{k} -prostoru je elektrostatické pole *podélné* (longitudinální).

Pro soustavu bodových nábojů, popř. jiné rozdělení nábojů je postup stejný, proto jej nebudeme provádět.

III.10 Kapacitní a influenční koeficienty

Energie elektrostatického pole soustavy nabitých vodičů je dána vztahem

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \mathbf{E}^2 dV.$$

III(10.1)

Víme, že tento výraz lze vyjádřit též ve tvaru

$$U = \frac{1}{2} \sum_A e_A \Phi_A,$$

III(10.2)

kde e_A je náboj A -tého tělesa a Φ_A je potenciál vytvořený (v místě sídla náboje e_A) všemi ostatními náboji.

Budeme zkoumat variaci (změnu) energie U . Z III(10.1) získáme

$$\delta U = \epsilon_0 \int \mathbf{E} \delta \mathbf{E} dV.$$

III(10.3)

(V případě dielektrického prostředí je ve shodě s II(6.3) $\delta U = \int \mathbf{E} \delta \mathbf{D} dV$.) V rovnici III(10.3) položíme $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ a integrand upravíme pomocí vektorové identity

$$\operatorname{div}(\Phi \delta \mathbf{E}) \equiv \Phi \operatorname{div}(\delta \mathbf{E}) + \nabla\Phi \cdot \delta \mathbf{E} = \Phi \operatorname{div}(\delta \mathbf{E}) - \mathbf{E} \delta \mathbf{E}.$$

Ve vodičích sídlí elektrický náboj pouze na povrchu vodičů, prostorová hustota ρ je nulová, a tudíž

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}(\delta \mathbf{E}) = 0.$$

S ohledem na tyto skutečnosti je $\mathbf{E} \delta \mathbf{E} = -\operatorname{div}(\Phi \delta \mathbf{E})$, což po dosazení do III(10.3) dá

$$\delta U = -\epsilon_0 \int \operatorname{div}(\Phi \delta \mathbf{E}) dV.$$

Objemový integrál převedeme pomocí Gaussovy věty na integrál přes nekonečně vzdálenou plochu (dá nulu) a integrály přes povrchy jednotlivých vodičů. Uvážíme-li změnu orientace vektoru normály při přechodu z vnější plochy na povrch vodičů, budeme mít

$$\delta U = \sum_A \Phi_A \oint_{s_A} \epsilon_0 \delta \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_A.$$

Jelikož $\oint \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_A = e_A$, $\oint \epsilon_0 \delta \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}_A = \delta e_A$, je

$$\delta U = \sum_A \Phi_A \delta e_A.$$

III(10.4)

Můžeme však postupovat také tak, že v III(10.3) položíme $\delta \mathbf{E} = -\nabla(\delta \Phi)$ a použijeme identity $\operatorname{div}(\mathbf{E} \delta \Phi) = \mathbf{E} \nabla(\delta \Phi) + \delta \Phi \cdot \operatorname{div} \mathbf{E} = -\mathbf{E} \delta \mathbf{E}$, jelikož $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Po dosazení $\mathbf{E} \delta \mathbf{E} = -\operatorname{div}(\mathbf{E} \delta \Phi)$ do III(10.3) a provedení obdobných úprav jako předešle, dostaneme

$$\delta U = \sum_A \delta \Phi_A \cdot \oint_{S_A} \epsilon_0 \mathbf{E} \, ds_A,$$

resp.

$$\delta U = \sum_A e_A \delta \Phi_A. \quad \text{III(10.5)}$$

Ze vztahů III(10.4) a III(10.5) plyne rovnice

$$\Phi_A = \frac{\partial U}{\partial e_A}, \quad e_A = \frac{\partial U}{\partial \Phi_A}. \quad \text{III(10.6)}$$

Víme, že potenciál Φ je úměrný náboji tělesa. Na povrchu vodiče je potenciál konstantní, proto podíl

$$C = \frac{e}{\Phi} \quad \text{III(10.7)}$$

zvaný kapacita vodiče, je veličina nezávislá na náboji vodiče. (Kapacita závisí na geometrickém tvaru vodiče.) V případě většího počtu nábojů potenciál Φ_A na povrchu A-tého vodiče vyjádříme rovnicí

$$\Phi_A = \sum_B (C^{-1})_{AB} e_B. \quad \text{III(10.8)}$$

Řešení této rovnice vzhledem k nábojům e_A je

$$e_A = \sum_B C_{AB} \Phi_B. \quad \text{III(10.9)}$$

Koeficienty C_{AA} jsou kapacitní koeficienty a nediagonální prvky C_{AB} ($B \neq A$) jsou indukční neboli influenční koeficienty. Jednotkou kapacita je jeden farad $F = CV^{-1}$.

Ve spojení s III(10.8) a III(10.9) vyjádříme energii pole jedním ze vztahů

$$U = \frac{1}{2} \sum_{A,B} C_{AB} \Phi_A \Phi_B = \frac{1}{2} \sum_{A,B} (C^{-1})_{AB} e_A e_B. \quad \text{III(10.10)}$$

Jelikož výraz III(10.1) je pozitivně definitní, budou platit Sylvestrový nerovnosti

$$C_{11} > 0, \quad C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} > 0, \dots$$

Snadno dokážeme, že matice koeficientů C_{AB} je symetrická. Z III(10.6) a III(10.10) plyne

$$\frac{\partial e_A}{\partial \Phi_B} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Phi_B \partial \Phi_A} = C_{AB}.$$

Změnou pořadí derivací bychom dostali C_{BA} , takže je

$$C_{BA} = C_{AB}. \quad \text{III(10.11)}$$

Pravidla skládání kapacit při paralelním a sériovém zapojení kondenzátorů se probírají již ve středoškolské fyzice, proto je zde nebudeme odvozovat.

Pole stacionárního proudu

IV.1 Základní rovnice

V předešlé kapitole jsme se zabývali polem vytvořeným nehybnými (klidovými) elektrickými náboji. Nyní přejdeme ke zkoumání pole vytvořeného stacionárním pohybem elektrických nábojů.

Základní rovnice pro tuto oblast jeví získáme ze série Maxwellových rovnic, v níž položíme všechny časové derivace rovny nule.

Rovnice kontinuity pro stacionární proud $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}(\mathbf{r})$ zní

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \text{resp.} \quad \oint \mathbf{j} \, ds = 0. \quad \text{IV(1.1)}$$

Magnetické pole je určeno rovnicemi

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad \text{IV(1.2)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad \text{IV(1.3)}$$

Elektrické pole uvnitř vodiče, v němž teče stacionární proud, je potenciální a vyhovuje rovnici

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad \text{IV(1.4)}$$

V homogenním izotropním vodiči lze použít lineárního Ohmova zákona

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}. \quad \text{IV(1.5)}$$

Z rovnice IV(1.1) pak plyne pro elektrické pole ($\gamma = \text{const}$)

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad \text{IV(1.6)}$$

K těmto rovnicím nutno připojit hraniční podmínky na rozhraní dvou prostředí. Z rovnice IV(1.1) plyne spojitost normálových komponent vektoru proudové hustoty

$$j_{1n} - j_{2n} = 0. \quad \text{IV(1.7)}$$

Na hranici vodiče s nevodičem je $j_n = 0$. Spojením rovnic IV(1.5) a IV(1.7) získáme vztah pro normálové komponenty elektrického pole

$$\gamma_1 E_{1n} = \gamma_2 E_{2n}. \quad \text{IV(1.8)}$$

K tomu je nutno připojit spojitost tečných komponent, jež plyne z IV(1.4),

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad \text{IV(1.9)}$$

což ve spojení s IV(1.5) implikuje odpovídající vztah pro tečné komponenty vektoru proudové hustoty

$$\gamma_1 j_{2t} = \gamma_2 j_{1t}. \quad \text{IV(1.10)}$$

Budeme dále předpokládat lineární vztah mezi vektorem indukce \mathbf{B} a vektorem intenzity \mathbf{H}

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad \text{IV(1.11)}$$

Rovnice IV(1.3) implikuje spojitost normálových komponent

$$B_{1n} - B_{2n} = 0, \quad \text{IV(1.12)}$$

zatímco z IV(1.2) plyne

$$H_{1t} - H_{2t} = i, \quad \text{IV(1.13)}$$

kde i je hustota plošných proudů. Nejsou-li na rozhraní plošné proudy ($i = 0$), jsou tečné komponenty vektoru \mathbf{H} spojitě.

IV.2 Multipólový rozvoj pole stacionárního proudu

Pole na velikých vzdálenostech od proudů lze počítat stejně jako v elektrostatice (viz čl. III.7). V rovnici I(9.7) použijeme rozvoje III(7.32). Po jednoduchých úpravách dostaneme pro pole ve vakuu rozvoj

$$\mathbf{A} = \sum \mathbf{A}^{(l)}, \quad \text{IV(2.1)}$$

kde

$$\mathbf{A}^{(l)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^{l+1}} \sum_{m=-l}^{+l} \mathcal{M}_{lm} Y_{lm}^*(\mathbf{n}). \quad \text{IV(2.2)}$$

Soubor $2l + 1$ veličin

$$\mathcal{M}_{lm} = \frac{4\pi}{2l+1} \int (r')^2 j(r') Y_{lm}(\mathbf{n}') d^3 r' \quad \text{IV(2.3)}$$

představuje komponenty magnetického multipólu l -tého řádu. Magnetický multipól l -tého řádu (2^l -pól) se zpravidla označuje symbolem M_l .

V článku I.9 jsme ukázali, že první člen $\mathbf{A}^{(0)} = 0$, jelikož pro stacionární proudy je $\int \mathbf{J}(r) d^3 r = 0$. Rozvoj tedy začíná magnetickým dipólovým členem $\mathbf{A}^{(1)}$.

IV.3 Magnetický dipólový moment soustavy nábojů

V článku I.9 jsme pro první nenulový člen rozvoje IV(2.2) našli vyjádření ($\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$)

$$\mathbf{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} [\mathbf{m}, \mathbf{n}], \quad \text{IV(3.1)}$$

kde magnetický dipólový moment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int [\mathbf{r}', \mathbf{J}(\mathbf{r}')] d^3 r'. \quad \text{IV(3.2)}$$

Nyní použijeme alternativního postupu, který je aplikací Lorentzovy metody středování elektromagnetických veličin.

Mějme soustavu bodových nábojů e_A pohybujících se rychlostmi \mathbf{v}_A . Vektor proudové hustoty \mathbf{J} bude

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \sum_A e_A \mathbf{v}_A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_A). \quad \text{IV(3.3)}$$

Po dosazení tohoto výrazu do IV(1.17) získáme vektorový potenciál

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_A \frac{e_A \mathbf{v}_A}{R_A}, \quad \text{IV(3.4)}$$

kde $\mathbf{R}_A = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A$ je průvodič z místa A -tého náboje do bodu pozorování. Rychlosti \mathbf{v}_A a polohové vektory \mathbf{R}_A jsou funkcemi času, proto je nutno „mikroskopické“ pole vystředovat přes časový interval τ , jenž je hodně veliký vzhledem k charakteristickým periodám finitních pohybů nábojů e_A , tj.

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_A e_A \left\langle \frac{\mathbf{v}_A}{R_A} \right\rangle. \quad \text{IV(3.5)}$$

Položíme (pro $r \gg r_A$)

$$\frac{1}{R_A} \cong \frac{1}{r} + \frac{r r_A}{r^3},$$

což dá

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_A e_A \langle \mathbf{v}_A \rangle + \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \sum_A e_A \langle \mathbf{v}_A (n r_A) \rangle.$$

První člen obsahuje časovou derivaci

$$\sum_A e_A \mathbf{v}_A = \frac{d}{dt} \sum_A e_A \mathbf{r}_A,$$

jejíž střední hodnota je rovna nule. Je totiž

$$\left\langle \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{d\mathbf{f}}{dt} dt = \frac{1}{\tau} [\mathbf{f}(\tau) - \mathbf{f}(0)].$$

Při finitním pohybu a finitních hodnotách $f(t)$ pro $\tau \rightarrow \infty$ je

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = 0. \quad \text{IV(3.6)}$$

Jelikož $\dot{r}_A = \mathbf{v}_A$, zapíšeme druhý člen takto

$$\begin{aligned} \sum_A e_A \mathbf{v}_A (nr_A) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_A e_A r_A (nr_A) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_A e_A [\mathbf{v}_A (nr_A) - r_A (n\mathbf{v}_A)] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_A e_A r_A (nr_A) + \frac{1}{2} \sum_A e_A [\mathbf{r}_A, \mathbf{v}_A] \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

První člen na pravé straně poslední rovnice dá s ohledem na IV(3.6) nulu. Zavedeme vektor

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_A e_A [\mathbf{r}_A, \mathbf{v}_A], \quad \text{IV(3.7)}$$

pomocí něhož dostaneme vektorový potenciál

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} [\langle \mathbf{m} \rangle, \mathbf{n}]. \quad \text{IV(3.8)}$$

Pro veličiny IV(3.2) a IV(3.7) jsme užili stejného označení. Důvod je v tom, že když v IV(3.2) vyjádříme vektor proudové hustoty vztahem IV(3.3) dospějeme k rovnici IV(3.7). Výrazem IV(3.7) je tedy definován magnetický dipólový moment soustav bodových nábojů.

Ze vztahu $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ dostaneme pole magnetického dipólu

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \{3(\mathbf{m}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{m}\}, \quad \text{IV(3.9)}$$

kde jsme pro stručnost vynechali označení střední hodnoty, jak je v makroskopické elektrodynamice zvykem.

Všimněme si některých důležitých vlastností magnetického dipólového momentu. Je vidět, že \mathbf{m} nezávisí na volbě počátku souřadné soustavy. Při posunutí počátku je nutno \mathbf{r} zaměnit na $\mathbf{r}' + \boldsymbol{\alpha}$, kde $\boldsymbol{\alpha}$ je konstantní vektor. S ohledem na $\int \mathbf{J}(\mathbf{r}') d^3 r' = 0$ nemá toto posunutí vliv na hodnotu magnetického dipólového momentu.

Je-li měrný náboj všech částic stejný $(e_A/m_A) = \text{konst} \equiv (e_0/m_0)$, pak IV(3.7) vede k závažnému výsledku

$$\mathbf{m} = \frac{e_0}{2m_0} \mathfrak{C}, \quad \text{IV(3.10)}$$

kde

$$\mathfrak{C} = \sum_A [\mathbf{r}_A, \mathbf{p}_A] \quad \text{IV(3.11)}$$

je moment hybnosti soustavy. Klasická fyzika vede tedy k obecnému závěru, že v soustavě částic se stejným měrným nábojem je podíl magnetického momentu hybnosti soustavy konstantní a je roven polovině měrného náboje jedné částice. Podíl magnetického momentu a momentu hybnosti se nazývá *gyromagnetický faktor* (zkráceně *gyrofaktor*) soustavy. U částic s vlastním momentem hybnosti (spinem) je tento faktor odlišný od $e_0/(2m_0)$; v takovém případě budeme psát

$$\mathbf{m} = g \mathfrak{C}, \quad \text{IV(3.12)}$$

kde g je zmíněný gyrofaktor.

Z článku II.6 víme, že při změně pole a $d\mathbf{B}$ se na magnetickém dipólu vykoná práce $\mathbf{m} \cdot d\mathbf{B}$, kterou můžeme interpretovat jako úbytek (potenciální) energie $dU = -\mathbf{m} \cdot d\mathbf{B}$. Je-li magnetický moment \mathbf{m} na poli nezávislý, pak je

$$U = -\mathbf{m}\mathbf{B}. \quad \text{IV(3.13)}$$

Zpravidla se jedná o dipól ve vakuu ($\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$), proto

$$U = -\mu_0 \mathbf{m}\mathbf{H}. \quad \text{IV(3.14)}$$

Nechť dipól \mathbf{m}_1 vytvoří pole \mathbf{B} dané vzorcem IV(3.9). Do tohoto pole vložený dipól \mathbf{m}_2 nabude energii $U = -\mathbf{m}_2 \mathbf{B}$, takže interakční energie dvou magnetických dipólů je

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \{(\mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2) - 3(\mathbf{m}_1 \mathbf{n})(\mathbf{m}_2 \mathbf{n})\}. \quad \text{IV(3.15)}$$

Z rovnice IV(3.13) plyne pro sílu $\mathbf{F} = -\nabla U$ působí na magnetický dipól v poli \mathbf{B}

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}. \quad \text{IV(3.16)}$$

Zapíšeme-li $U = -mB \cos \vartheta$, pak moment síly $K = \partial U / \partial \vartheta$, tj.

$$\mathfrak{K} = [\mathbf{m}, \mathbf{B}] \quad \text{IV(3.17)}$$

Síla působící na magnetický dipól v *homogenním* magnetickém poli \mathbf{B} je nulová; na dipól pak působí *pouze moment sil* $\mathfrak{K} = [\mathbf{m}, \mathbf{B}]$.

IV.4 Larmorův teorém

Vzorec IV(3.13) lze odvodit následujícím instruktivním postupem. Z článku I.9 víme, že Lorentzovu sílu působící na nabitou částici v magnetickém poli \mathbf{B} lze

odvodit z lagrangiánu

$$L = e\mathbf{A}\mathbf{v}.$$

Vektorový potenciál homogenního magnetického pole vezmeme ve tvaru

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathbf{B}, \mathbf{r}],$$

což vede k lagrangiánu pro soustavu částic

$$L = \frac{1}{2} \sum_A e_A [\mathbf{r}_A, \mathbf{v}_A] \cdot \mathbf{B}. \quad \text{IV(4.1)}$$

S ohledem na definici magnetického dipólového momentu IV(3.7) pak platí

$$L = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B} \quad \text{IV(4.2)}$$

Záporně vzatý člen $U = -L$ pak představuje interakční energii magnetického dipólu s polem \mathbf{B} .

Z mechaniky je známo, že časová změna momentu hybnosti je rovna momentu působících sil ($d\mathcal{C}/dt = \mathfrak{M}$). Pro magnetický dipól \mathbf{m} v poli \mathbf{B} je ve shodě s IV(3.17)

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = [\mathbf{m}, \mathbf{B}].$$

Je-li měrný náboj všech částic stejný (fakticky se jedná o soustavu stejných částic), pak mezi \mathbf{m} a \mathcal{C} platí IV(3.10), což vede k rovnici

$$\frac{d\mathcal{C}}{dt} = -[\mathbf{\Omega}, \mathcal{C}], \quad \text{IV(4.3)}$$

kde

$$\mathbf{\Omega} = \frac{e_0}{2m_0} \mathbf{B} \quad \text{IV(4.4)}$$

je vektor *Larmorovy úhlové rychlosti*. Stejná rovnice platí i pro magnetický moment

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = -[\mathbf{\Omega}, \mathbf{m}]. \quad \text{IV(4.5)}$$

Moment hybnosti a spolu s ním i magnetický dipólový moment (soustavy částic se stejným měrným nábojem) rotuje s úhlovou rychlostí $\mathbf{\Omega}$ kolem směru pole (*Larmorova precese*); absolutní hodnota $|\mathcal{C}|$ a $|\mathbf{m}|$ se při tom nemění.

Poslední část tvrzení plyne z toho, že po vynásobení IV(4.5) skalárně vektorem \mathbf{m} vznikne smíšený součin $\mathbf{m} \cdot [\mathbf{\Omega}, \mathbf{m}] = 0$, a tudíž

$$\mathbf{m} \frac{d\mathbf{m}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m^2 \right) = 0,$$

čímž je tvrzení dokázáno.

IV.5 Hallův jev

Budeme se zabývat vlivem vnějšího magnetického pole \mathbf{B} na vedení elektrického proudu ve vodičích.

Ohmův zákon

$$j_i = \gamma_{ik} E_k \quad \text{IV(5.1)}$$

zůstane v platnosti, avšak tenzor měrné vodivosti bude záviset na poli \mathbf{B} . Vysvětlíme si důsledky, k nimž tato závislost přivádí.

Veličina

$$\mathbf{jE} = j_i E_i = \gamma_{ik} E_i E_k$$

představuje množství tepla vyvinutého v jednotkovém objemu za jednotku času, což je až na faktor absolutní teploty produkce entropie. Podle Onsagerovy teorie nevratných procesů⁴⁾ jsou koeficienty γ_{ik} symetrické $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$. V přítomnosti magnetického pole je nutno tyto Onsagerovy relace reciprocity modifikovat

$$\gamma_{ik}(\mathbf{B}) = \gamma_{ki}(-\mathbf{B}). \quad \text{IV(5.2)}$$

Tenzor γ_{ik} lze (jako každý jiný tenzor) rozdělit na část symetrickou $s_{ik} = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} + \gamma_{ki}) = s_{ki}$ a antisymetrickou $a_{ik} = \frac{1}{2}(\gamma_{ik} - \gamma_{ki}) = -a_{ki}$. Položíme

$$\gamma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}, \quad \text{IV(5.3)}$$

přičemž podle definice platí

$$s_{ik}(\mathbf{B}) = s_{ki}(\mathbf{B}), \quad a_{ik}(\mathbf{B}) = -a_{ki}(\mathbf{B}), \quad \text{IV(5.4)}$$

což ve spojitosti s Onsagerovými relacemi IV(5.2) implikuje vztahy

$$s_{ik}(\mathbf{B}) = s_{ki}(-\mathbf{B}) = s_{ik}(-\mathbf{B}), \quad \text{IV(5.5)}$$

$$a_{ik}(\mathbf{B}) = a_{ki}(-\mathbf{B}) = -a_{ik}(-\mathbf{B}). \quad \text{IV(5.6)}$$

Symetrická část s_{ik} tenzoru měrné vodivosti je sudou funkcí magnetického pole \mathbf{B} a její rozvoj podle mocnin \mathbf{B} může obsahovat pouze sudé mocniny \mathbf{B} . Antisymetrická část a_{ik} je lichou funkcí pole \mathbf{B} , takže příslušný rozvoj může obsahovat pouze liché mocniny \mathbf{B} .

Antisymetrický tenzor $a_{ik} = -a_{ki}$ má tři nezávislé složky, které lze interpretovat jako složky jistého axiálního vektoru \mathbf{a} , přičemž

$$a_1 = a_{23}, \quad a_2 = a_{31}, \quad a_3 = a_{12}, \quad \text{IV(5.7)}$$

⁴⁾ Viz např. KVASNICA J.: Termodynamika, SNTL Praha 1965, nebo KVASNICA J.: Statistická fyzika, Academia Praha 1983.

což lze pomocí jednotkového tenzoru e_{ikl} vyjádřit rovnicí

$$a_{ik} = e_{ikl}a_l. \quad \text{IV(5.8)}$$

Po dosazení rovnic IV(5.3) a IV(5.8) do IV(5.1) získáme pro proud vyjádření

$$j_i = s_{ik}E_k + e_{ikl}E_k a_l = s_{ik}E_k + [\mathbf{E}, \mathbf{a}]_i. \quad \text{IV(5.9)}$$

K Jouleovu teplu přispívá pouze symetrická část ($[\mathbf{E}, \mathbf{a}] \cdot \mathbf{E} = 0$)

$$\mathbf{jE} = s_{ik}E_i E_k. \quad \text{IV(5.10)}$$

Druhý člen v IV(5.9), pocházející od antisymetrické části γ_{ik} , popisuje proud kolmý k elektrickému poli \mathbf{E} . Pro slabé magnetické pole lze použít lineárního vztahu

$$a_i = b_{ik}B_k, \text{ popř. } \mathbf{a} = b\mathbf{B}. \quad \text{IV(5.11)}$$

Vznikající proud je tedy kolmý k elektrickému poli \mathbf{E} (a též k magnetickému poli \mathbf{B}), což představuje známý *Hallův jev*. Je však užitečné poznamenat, že v anizotropním prostředí může dát složku proudu kolmou k \mathbf{E} i člen $s_{ik}E_k$, avšak s_{ik} nemůže obsahovat lineární členy pole \mathbf{B} , čímž se dá tato část proudu odlišit od specifického *Hallova jevu*.

Hallovu jevu lze dát také jinou interpretaci, která je výhodná hlavně při experimentálním výzkumu tohoto jevu. Označíme-li inverzní matici koeficientů γ_{ik} symbolem $(\gamma^{-1})_{ik} \equiv \rho_{ik}$, pak řešení rovnice IV(5.1) vzhledem k poli \mathbf{E} zní

$$E_i = \rho_{ik}j_k. \quad \text{IV(5.12)}$$

Tenzor měrného odporu ρ_{ik} lze opět rozdělit na část symetrickou $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ a antisymetrickou $\alpha_{ik} = -\alpha_{ki}$. Místo antisymetrické části zavedeme duální vektor \mathbf{h} vztahem $\alpha_{ik} = e_{ikl}h_l$. Po dosazení $\rho_{ik} = \sigma_{ik} + \alpha_{ik}$ do IV(5.12) dospějeme k rovnici

$$E_i = \sigma_{ik}j_k + [\mathbf{j}, \mathbf{h}]_i. \quad \text{IV(5.13)}$$

V izotropním vodiči lze položit

$$\mathbf{h} = -R\mathbf{B}, \quad \text{IV(5.14)}$$

což dá pro *Hallovo pole* $\mathbf{E}^{(H)}$ vztah

$$\mathbf{E}^{(H)} = -R[\mathbf{j}, \mathbf{B}]; \quad \text{IV(5.15)}$$

s tímto polem je spojeno dodatečné napětí $\int \mathbf{E}^{(H)} d\mathbf{l}$.

Hallovu jevu lze dát jednoduchou mikroskopickou interpretaci. Na nositele náboje působí v poli \mathbf{E}, \mathbf{B} síla $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$. Při vykompenzování elektrické a magnetické části této síly je $\mathbf{F} = 0$, a tudíž

$$e\mathbf{E} = -e[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Po vynásobení této rovnice hustotou n nábojů a zavedení proudové hustoty $\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$ dospějeme k rovnici

$$\mathbf{E} = -R[\mathbf{j}, \mathbf{B}],$$

kde

$$R = \frac{1}{ne}.$$

Pokud jsou nositeli proudu elektrony ($e = -e_0$), je $R < 0$. V případě jiných mechanismů elektrické vodivosti je

$$R = \frac{1}{\sum_A n_A e_A}.$$

Ze znaménka *Hallovy konstanty* R lze usuzovat na převládající mechanismus elektrické vodivosti dané látky.

Kvazistacionární elektromagnetické pole

V.1 Rovnice kvazistacionárního pole

Dříve než přejdeme ke zkoumání obecných časově proměnných elektromagnetických polí, probereme jistý mezičlánek mezi statickými a obecnými časově proměnnými poli. Jedná se o takovou oblast časově proměnných polí, v níž lze zanedbat vliv Maxwellova proudu $\partial \mathbf{D}/\partial t$. Najdeme příslušné kvantitativní kritérium.

V Maxwellově rovnici

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

dosadíme $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ a přejdeme k Fourierovým komponentám, tj. položíme $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \exp(-i\omega t)$, $(\partial \mathbf{D}/\partial t) = -i\omega \mathbf{E}$. Při $\omega \epsilon E \ll \gamma E$, tj. při zesílené nerovnosti

$$\frac{\gamma}{\epsilon \omega} \gg 1, \quad \text{V(1.1)}$$

lze zanedbat Maxwellův proud oproti vodivostnímu proudu, což vymezuje oblast kvazistacionárnosti. U dobrých vodičů je toto kritérium splněno ve velice širokém rozmezí frekvencí, zpravidla až do infračervené oblasti spektra.

Tím jsme získali první Maxwellovu rovnici pro kvazistacionární pole

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E}. \quad \text{V(1.2)}$$

Tato rovnice je formálně stejná jako rovnice IV(1.2) pro stacionární pole, avšak nyní je $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(r, t)$, $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}(r, t)$.

Rovnice

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{V(1.3)}$$

je univerzálně platná, proto je nutno ji zachovat i v kvazistacionárním případě.

Rovněž rovnici

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{V(1.4)}$$

je nutno zachovat v obecné formě. Při úplném zanedbání $(\partial \mathbf{B}/\partial t)$ bychom se vrátili ke statickému poli. O možnostech zanedbání vždy rozhoduje relativní velikost veličin. U časově proměnných polí jsou $|\operatorname{rot} \mathbf{E}|$ a $|\partial \mathbf{B}/\partial t|$ srovnatelné. Rovnice V(1.2) je s ohledem na identitu $\operatorname{div} \operatorname{rot} \equiv 0$ konzistentní s rovnicí

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \quad \text{V(1.5)}$$

K rovnicím V(1.2) až V(1.5) je nutno připojit odpovídající hraniční podmínky. Pro magnetické pole je

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1t} = H_{2t}. \quad \text{V(1.6)}$$

Pro většinu látek je relativní permeabilita μ/μ_0 velice blízká k jedničce. (Výjimku tvoří pouze látky feromagnetické a jim příbuzné.) V takovém případě lze V(1.6) nahradit vektorovou rovnicí

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2. \quad \text{V(1.7)}$$

Z V(1.5) plyne spojitost normálových komponent elektrického pole

$$E_{1n} - E_{2n} = 0. \quad \text{V(1.8)}$$

To je ve shodě s rovnicí $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, $j_{1n} - j_{2n} = 0$. Je-li vně vodiče dielektrikum (izolátor), je na rozhraní vodiče

$$j_n = 0, \quad E_n = 0. \quad \text{V(1.9)}$$

Z indukčního zákona V(1.4) plyne spojitost tečných komponent vektoru \mathbf{E}

$$E_{1t} - E_{2t} = 0, \quad \text{V(1.10)}$$

což lze ve spojení s V(1.2) nahradit odpovídající podmínkou pro magnetické pole

$$\frac{1}{\gamma_1} (\operatorname{rot} \mathbf{H})_{1t} = \frac{1}{\gamma_2} (\operatorname{rot} \mathbf{H})_{2t}, \quad \text{V(1.11)}$$

popř.

$$\frac{1}{\gamma_1 \mu_1} (\operatorname{rot} \mathbf{B})_{1t} = \frac{1}{\gamma_2 \mu_2} (\operatorname{rot} \mathbf{B})_{2t}. \quad \text{V(1.12)}$$

Po těchto poznámkách přejdeme k odvození rovnic pro kvazistacionární elektromagnetické pole. Rovnici V(1.2) přepíšeme ve tvaru $\operatorname{rot} \mathbf{B} = \gamma \mu \mathbf{E}$. Aplikujeme na obě strany této rovnice operaci rotace, užijeme vektorovou identitu $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$, jelikož $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Je tedy $-\nabla^2 \mathbf{B} = \gamma \mu \operatorname{rot} \mathbf{E}$. Pravou

stranu vyjádříme pomocí V(1.4), což vede k hledané rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \gamma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{V(1.13)}$$

Aplikací operace rotace na rovnici V(1.4) a provedením obdobných úprav dospějeme k rovnici pro kvazistacionární elektrické pole

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{V(1.14)}$$

Rovnice V(1.13) a V(1.14) mají tvar rovnice difúze $(\partial c/\partial t) = D\nabla^2 c$ pro koncentraci $c \equiv c(\mathbf{r}, t)$, proto se mluví o difúzi kvazistacionárního pole do prostředí. Úlohu koeficientu difúze zastupuje veličina $1/(\gamma\mu)$.

Z matematického hlediska se jedná o parabolickou parciální diferenciální rovnici, jejíž řešení se probírá v kursech matematické fyziky. Základní ideu řešení vysvětlíme v následujícím článku, zde probereme jednoduchý ilustrativní příklad.

Mějme vodivé prostředí zaplňující poloprostor $z > 0$. Pole bude záviset pouze na souřadnici z a na čase t . Z rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$ pak plyne $(\partial B_z/\partial z) = 0$, tj. $B_z = \text{konst.}$ Je-li na hranici $B_z = 0$, je B_z rovno nule všude a pole \mathbf{B} má složky pouze v rovině (x, y) .

V případě harmonické závislosti

$$\mathbf{B}(z, t) = \mathbf{b}(z) e^{-i\omega t} \quad \text{V(1.15)}$$

získáme z V(1.13) pro $\mathbf{b}(z)$ rovnici

$$\frac{\partial^2 \mathbf{b}}{\partial z^2} + k^2 \mathbf{b} = 0, \quad \text{V(1.16)}$$

kde

$$k = (i\gamma\mu\omega)^{1/2} = (1+i) \left(\frac{\gamma\mu\omega}{2}\right)^{1/2} \quad \text{V(1.17)}$$

Řešení klesající při $z \rightarrow \infty$ k nule zní

$$\mathbf{B}(z, t) = \mathbf{B}_0 e^{-z/\delta} \exp \left[i \left(\frac{z}{\delta} - \omega t \right) \right], \quad \text{V(1.18)}$$

kde

$$\delta = \left(\frac{2}{\gamma\mu\omega} \right)^{1/2} \quad \text{V(1.19)}$$

určuje hloubku průniku pole do vodiče. Pro informaci uvedeme několik hodnot pro měď ($\gamma^{-1} \approx 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$), při frekvenci $\nu = (\omega/2\pi) = 10^3 \text{ Hz}$ je $\delta \approx 2 \text{ mm}$, při $\nu = 10^5 \text{ Hz}$ je $\delta \approx 0,2 \text{ mm}$, při $\nu = 10^7 \text{ Hz}$ je $\delta \approx 0,02 \text{ mm}$.

Elektrické pole určíme z rovnice V(1.2), tj. $\mathbf{E} = (\gamma\mu)^{-1} \text{rot } \mathbf{B}$. Po dosazení za \mathbf{B} řešení V(1.18) dostaneme

$$\mathbf{E} = \left(\frac{\omega}{2\gamma\mu} \right)^{1/2} (1-i) [\mathbf{B}, \mathbf{n}], \quad \text{V(1.20)}$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor ve směru osy z .

Od komplexního zápisu přejdeme k reálným částem. Jelikož

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}} = \exp(-i\pi/4),$$

bude

$$B_y \equiv B = B_0 e^{-z/\delta} \cos \left(\frac{z}{\delta} - \omega t \right), \quad \text{V(1.21)}$$

$$E_x \equiv E = \left(\frac{\omega}{\gamma\mu} \right)^{1/2} B_0 e^{-z/\delta} \cos \left(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{\pi}{4} \right). \quad \text{V(1.22)}$$

Foucaultovy proudy jsou pak určeny vztahem $j = \gamma E_x$. Oscilující proudová hustota není v daném okamžiku ve všech hloubkách vodiče stejná. Označíme-li hodnotu fáze z_0/δ , pak místa stejné fáze jsou určena rovnicí $(z/\delta) - \omega t = (z_0/\delta)$. Místa stejné fáze postupují rychlostí $v = \omega\delta$. Je-li na povrchu $\cos(z/\delta - \omega t) = \cos(\omega t)$, pak v hloubce $z = \pi\delta$ je $\cos(z/\delta - \omega t) = -\cos(\omega t)$. Proudová hustota proniká dovnitř vodiče jako postupná příčná exponenciálně tlumená vlna.

V.2 Řešení rovnic kvazistacionárního pole

Rovnice typu V(1.13) budeme řešit následujícím způsobem. Položíme $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r}) \exp(-at)$; po dosazení do V(1.13) dostaneme pro $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{b} = -\lambda \mathbf{b}, \quad \text{V(2.1)}$$

kde

$$\lambda = \gamma\mu\alpha. \quad \text{V(2.2)}$$

Rovnici V(2.1) nutno řešit s ohledem na tvar vodiče a hraniční podmínky na rozhraní vodiče. Jedná se tudíž o nalezení příslušného spektra Laplaceova operátoru. Jednoduchou úvahou se přesvědčíme, že všechna vlastní čísla $\lambda_N > 0$, a tudíž

$$\alpha_N > 0. \quad \text{V(2.3)}$$

Důkaz je snadný. Rovnici V(2.1) nahradíme ekvivalentní rovnicí

$$\text{rot rot } \mathbf{b} = \lambda \mathbf{b}.$$

Vynásobíme rovnici komplexně sdruženou funkcí \mathbf{b}^* ; po jednoduché úpravě dospějeme k rovnici

$$\lambda \int |\mathbf{b}|^2 dV = \int \mathbf{b}^* \cdot \text{rot rot } \mathbf{b} dV = \int |\text{rot } \mathbf{b}|^2 dV,$$

z níž je evidentní, že $\lambda > 0$, a tudíž i $\alpha > 0$. Operátor ∇^2 je lineární a hermiteovský (samoadjungovaný), jeho vlastní funkce b_N jsou ortonormální

$$\int \mathbf{b}_M^* \mathbf{b}_N dV = \delta_{MN}. \quad V(2.4)$$

Řešení rovnice V(1.13) se vyjádří pomocí vlastních čísel α_N a vlastních funkcí \mathbf{b}_N řadou

$$\mathbf{B}(r, t) = \sum_N a_N \mathbf{b}_N(r) \exp(-\alpha_N t). \quad V(2.5)$$

Koeficienty a_N se určí z počátečních podmínek. Při $t = 0$ je $\mathbf{B}(r, 0) \equiv \mathbf{B}_0(r)$, a tudíž

$$\mathbf{B}_0(r) = \sum_N a_N \mathbf{b}_N(r). \quad V(2.6)$$

Vynásobíme obě strany této rovnice vektorem \mathbf{b}_M^* a užitíme V(2.4), což dá pro a_N vyjádření

$$a_N = \int \mathbf{B}_0(r) \mathbf{b}_N^*(r) d^3r.$$

Při zadaném počátečním poli $\mathbf{B}_0(r)$ se koeficienty a_N určí integrací, a tím je v principu řešen i rozvoj V(2.5).

Rychlost poklesu pole s časem je určena nejmenším z vlastních čísel α_{\min} . Veličina $\tau = 1/\alpha_{\min}$ pak představuje dobu útlumu pole.

V.3 Skinový jev

Z článku 5.1 víme, že kvazistacionární pole proniká do vodivého prostředí do hloubky řádově δ , která je tím menší, čím vyšší je frekvence pole (viz vzorec V(1.19)). Na základě toho lze očekávat, že i elektrický proud bude soustředěn na povrchu vodiče a v malé hloubce δ pod jeho povrchem. Takový průběh časově proměnného pole ve vodičích se obvykle nazývá *povrchovým* neboli *skinovým jevem*. (Název pochází z anglického slova skin = pokožka, slupka.)

Budeme zkoumat pole v přímém vodiči kruhového průřezu, jímž protéká proud ve směru osy vodiče (vále). Zvolíme-li osu válcovitého vodiče ve směru osy z , pak ze vztahu $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ plyne, že pole \mathbf{E} bude mít nenulovou pouze složku E_z , která bude záviset na vzdálenosti r od středu vodiče, tj. za předpokladu harmonické časové závislosti

$$E_z = E(r) e^{-i\omega t}. \quad V(3.1)$$

Převedením rovnice V(1.14) do cylindrických souřadnic (viz dodatek I) dostaneme pro $E(r)$ rovnici

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE}{dr} \right) + k^2 E = 0,$$

tj.

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE}{dr} + k^2 E = 0, \quad V(3.2)$$

kde

$$k = \frac{1+i}{\delta}. \quad V(3.3)$$

Srovnáme-li V(3.2) s Besselovou rovnicí (viz dodatek VI)

$$w''(z) + \frac{1}{z} w'(z) + \left(k^2 - \frac{n^2}{z^2} \right) w(z) = 0,$$

vidíme, že řešení je superpozicí Besselovy funkce $J_0(kr)$ a Neumannovy funkce $N_0(kr)$. Neumannova funkce však není regulární při $r = 0$ (ve středu vodiče), proto

$$E_z = E_0 J_0(kr) e^{-i\omega t}. \quad V(3.4)$$

Proud je rozdělen ve vodiči podle zákona $j_z = \gamma E_z = \gamma E_0 J_0(kr) \exp(-i\omega t)$.

V statickém případě jsou indukční čáry přímého válcovitého vodiče koncentrické kružnice se středem na ose vodiče. (Tomu odpovídá nenulová složka B_φ .) Obdobná situace nastává i v kvazistacionárním případě. V rovnici V(1.4) vezmeme φ -tou složku, což vede ke vztahu

$$i\omega \mathbf{B}_\varphi = (\text{rot } \mathbf{E})_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r} E_z.$$

Elektrické pole vyjádříme pomocí V(3.4) a derivaci Besselovy funkce upravíme pomocí známého vztahu $J_0'(z) = -J_1(z)$. Po provedení naznačených úprav dostaneme

$$\mathbf{B}_\varphi = -i \left(\frac{i\gamma \mu}{\omega} \right)^{1/2} E_0 J_1(kr) e^{-i\omega t}. \quad V(3.5)$$

Konstantu E_0 určíme z podmínky, že na povrchu vodiče je $B = \mu \mathcal{I} / (2\pi a)$, kde \mathcal{I} je proud tekoucí vodičem a a je poloměr vodiče. (Tato podmínka plyne z vyjádření I(8.2) pro pole v okolí přímého vodiče.)

V případě nízkých a vysokých hodnot lze použít asymptotických vzorců pro Besselovy funkce.

Při $|kr| \equiv z \ll 1$ lze použít rozvoje $J_0(z) \approx 1 - (z^2/4)$, tj.

$$E_z = \left[1 - \frac{i}{2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 \right] E_0 e^{-i\omega t}.$$

Tento vztah lze použít při $(a/\delta) \ll 1$, tj. hloubka průniku je mnohem větší než je poloměr vodiče. Absolutní hodnota elektrického pole (a s ní i absolutní hodnota proudové hustoty) je úměrná $[1 + r^4/(4\delta^4)]^{1/2}$.

Při $|z| \gg \delta$ lze užít asymptotického vztahu

$$J_0(z) \cong \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right),$$

což pro oblast frekvencí ohraničenou nerovností $a \gg \delta$ dá

$$J_0(kr) \cong \left[\frac{(1-i)\delta}{4\pi r}\right]^{1/2} e^{(1-i)r/\delta}.$$

Po dosazení tohoto vztahu do V(3.4) a přechodem k reálné části dostaneme

$$E_z = \frac{\beta}{\sqrt{r}} e^{-(a-r)/\delta} \cos\left(\frac{r}{\delta} + \omega t + \frac{\pi}{8}\right), \quad \text{V(3.6)}$$

kde

$$\beta \cong E_0 \left(\frac{\delta}{2\pi\sqrt{2}}\right)^{1/2} e^{a/\delta}. \quad \text{V(3.7)}$$

Proudová hustota je $j \equiv j_z = \gamma E_z$. Proud \mathcal{I} tekoucí vodičem pak vypočteme ze vztahu

$$\mathcal{I} = \int_0^a j \, 2\pi r \, dr = 2\pi\beta\gamma \int_0^a r^{1/2} e^{-(a-r)/\delta} \cos\left(\frac{r}{\delta} + \omega t + \frac{\pi}{8}\right) dr.$$

Jelikož integrand velmi rychle klesá s rostoucí vzdáleností od povrchu vodiče, lze \sqrt{r} nahradit hodnotu na povrchu \sqrt{a} . Integrace je pak elementární; po zanedbání malých členů řádu $\exp(-a/\delta)$ dostaneme

$$\mathcal{I} = \pi\beta\gamma a^{1/2} \left[\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{8}\right) \right] \delta. \quad \text{V(3.8)}$$

Střední hodnotu $\langle \mathcal{I}^2 \rangle$ za jednu periodu vypočteme tak, že střední hodnoty $\sin^2(\omega t + \pi/8)$ a $\cos^2(\omega t + \pi/8)$ nahradíme $1/2$. Smíšený člen $2 \sin(\omega t + \pi/8) \cos(\omega t + \pi/8) = \sin(2\omega t + \pi/4)$ dá při středování nulu, takže výsledný vztah zní

$$\langle \mathcal{I}^2 \rangle = \pi^2 \beta^2 \gamma^2 a \delta^2. \quad \text{V(3.9)}$$

Střední množství Jouleova tepla vyvinutého v jednotkové délce vodiče na jednotku času je dáno integrálem

$$Q = \int_0^a \gamma^{-1} \langle j_z^2 \rangle 2\pi r \, dr.$$

Při středování přes jednu periodu nahradíme $\cos^2\left(\omega t + \frac{r}{\delta} + \frac{\pi}{8}\right)$ střední hodnotou $(1/2)$, což vede k vyjádření

$$Q = \frac{1}{2} \pi \gamma \beta^2 \delta. \quad \text{V(3.10)}$$

Při výpočtu byl zanedbán malý člen $\exp(-2a/\delta) \ll 1$.

Podíl

$$\mathcal{R} \equiv \frac{Q}{\langle \mathcal{I}^2 \rangle} = \frac{1}{2\pi a} \left(\frac{\omega\mu}{2\gamma}\right)^{1/2} \quad \text{V(3.11)}$$

se nazývá *ohmickým* neboli *wattovým odporem* (jednotkové délky) vodiče. Při konstantním proudu je $\langle \mathcal{I}^2 \rangle = \mathcal{I}^2$, takže V(3.11) je přirozeným zobecněním Jouleova zákona $Q = \mathcal{R}\mathcal{I}^2$. (Přechod $\omega \rightarrow 0$ v V(3.11) nelze provést, jelikož vzorec V(3.6) a následné vzorce platí pro $(a/\delta) \gg 1$, tj. pro vysoké frekvence.)

V.4 Komplexní odpor

Mějme střídavý proud v obvodě s ohmickým odporem, kapacitou a samoindukcí (viz obr. V.1). Jelikož kapacita C i samoindukce L představují další zdroje



elektromotorické síly, $\mathcal{U}_C = e/C$, $\mathcal{U}_L = -L(d\mathcal{I}/dt)$, bude proud \mathcal{I} splňovat rovnici

$$\mathcal{R}\mathcal{I} = \frac{e}{C} - L \frac{d\mathcal{I}}{dt} + \mathcal{U}(t), \quad \text{V(4.1)}$$

kde $\mathcal{U}(t)$ je vtištěné napětí. Rovnici V(4.1) proderivujeme podle času, dosadíme $(de/dt) = -\mathcal{I}$, čímž získáme rovnici

$$L \frac{d^2 \mathcal{I}}{dt^2} + \mathcal{R} \frac{d\mathcal{I}}{dt} + \frac{\mathcal{I}}{C} = \frac{d\mathcal{U}}{dt}. \quad \text{V(4.2)}$$

Budeme předpokládat harmonické vtištění napětí

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 e^{-i\omega t} \quad \text{V(4.3)}$$

a ustálené řešení rovnice V(4.2) budeme rovněž hledat v harmonickém tvaru

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 e^{-i\omega t}. \quad \text{V(4.4)}$$

Po jednoduché úpravě získáme vztah

$$\mathcal{U} = \mathcal{Z}\mathcal{I}, \quad \text{V(4.5)}$$

kde

$$\mathcal{Z} = \mathcal{R} + i \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right) \quad \text{V(4.6)}$$

je tzv. *komplexní odpor*. Absolutní hodnota

$$|\mathcal{Z}| = \left[R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{V(4.7)}$$

je *impedance* obvodu. Komplexní veličinu \mathcal{Z} lze zapsat ve tvaru

$$\mathcal{Z} = |\mathcal{Z}| e^{-i\varphi}, \quad \text{V(4.8)}$$

kde úhel φ je určen rovnicí

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad \text{V(4.9)}$$

Vyjádření V(4.8) dosadíme do V(4.5); přechodem k reálnému formalismu dostaneme

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{U}_0}{|\mathcal{Z}|} \cos(\omega t - \varphi). \quad \text{V(4.10)}$$

Proud je opožděn oproti vtištěnému napětí o úhel φ určený rovnicí V(4.9). Úhel φ je nulový a $|\mathcal{Z}|$ minimální (tj. proud \mathcal{I} je maximální) při $\omega L - (\omega C)^{-1} = 0$, tj. při

$$\omega = (CL)^{-1/2}. \quad \text{V(4.11)}$$

Obvod je pak v rezonanci a proud je určen Ohmovým zákonem

$$\mathcal{I} = (\mathcal{U}/R) = (\mathcal{U}_0/R) \cos(\omega t).$$

Rovnici V(4.1) lze upravit tak, že ji vynásobíme proudem \mathcal{I} , což po jednoduché úpravě dá vztah

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L \mathcal{I}^2 + \frac{e^2}{2C} \right) + R \mathcal{I}^2 = \mathcal{U} \mathcal{I} \quad \text{V(4.12)}$$

vyjádřující zákon zachování energie pro daný obvod: výkon vtištěných sil je roven časovému vzrůstu magnetické ($L \mathcal{I}^2/2$) a elektrické ($e^2/2C$) energie soustavy a Jouleovu teple vyvinutému za jednotku času v proudovodičích.

Zde jsme pojem komplexního odporu zavedli pomocí jistého speciálního elektrického obvodu. K pojmu komplexního odporu lze však dospět i úvahou podobné té, která nás přivedla k rovnici II(4.35) mezi Fourierovými komponentami vektoru elektrické intenzity a indukce. Jelikož postup je v podstatě stejný, provedeme výklad mnohem stručněji.

Pokud je frekvence proměnného proudu dostatečně malá, okamžitá hodnota proudu $\mathcal{I}(t)$ v lineárním obvodu je určeno hodnotou napětí $\mathcal{U}(t)$ ve stejném okamžiku vztahem $\mathcal{U}(t) = R \mathcal{I}(t)$, kde R je elektrický odpor při konstantním proudu.

Při vysokých frekvencích (rychle proměnných proudech) bude $\mathcal{U}(t)$ záviset na

$\mathcal{I}(t)$ ve všech předchozích časech $-\infty \leq t' \leq t$. Tento vztah vyjádříme lineárním funkcionálem

$$\mathcal{U}(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t') \mathcal{I}(t') dt' = \int_0^{\infty} K(\tau) \mathcal{I}(t-\tau) d\tau. \quad \text{V(4.13)}$$

Zavedeme Fourierovy komponenty \mathcal{U}_ω , \mathcal{I}_ω stejně jako v čl. II.4, tj. položíme

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{U}_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad \mathcal{I}(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int \mathcal{I}_\omega e^{-i\omega(t-\tau)} d\omega.$$

Po dosazení do V(4.13) dostaneme vztah

$$\mathcal{U}_\omega = \mathcal{Z}(\omega) \mathcal{I}_\omega, \quad \text{V(4.14)}$$

kde

$$\mathcal{Z}(\omega) = \int_0^{\infty} K(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \equiv K_\omega \quad \text{V(4.15)}$$

je komplexní odpor, představující Fourierovu komponentu K_ω korelační funkce.

Při užívání komplexní symboliky typu $\exp(-i\omega t)$ je nutno v konečných formulích přejít k reálné části příslušných výrazů. U binárních výrazů typu $\mathcal{U} \mathcal{I}$ použijeme následujícího postupu. Disipace energie Q je

$$Q = (\operatorname{Re} \mathcal{U}) \cdot (\operatorname{Re} \mathcal{I}) = \frac{1}{2} (\mathcal{U} + \mathcal{U}^*) \frac{1}{2} (\mathcal{I} + \mathcal{I}^*). \quad \text{V(4.16)}$$

Při časovém středování výrazy typu $\exp(\pm 2i\omega t)$ dají nulu (tj. výrazy $\mathcal{U} \mathcal{I}$, $\mathcal{U}^* \mathcal{I}^*$); nenulový příspěvek dají pouze členy $\mathcal{U} \mathcal{I}^*$ a $\mathcal{U}^* \mathcal{I}$, takže střední disipace energie za jednotku času bude

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{4} (\mathcal{U} \mathcal{I}^* + \mathcal{U}^* \mathcal{I}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\mathcal{U} \mathcal{I}^*). \quad \text{V(4.17)}$$

Jak již bylo uvedeno, v tomto vzorci jsou \mathcal{U} a \mathcal{I} vyjádřeny v komplexním tvaru V(4.3) a V(4.4).

Ve vzorci V(4.17) užitíme vztahu V(4.5), resp. V(4.14) a v komplexním odporu \mathcal{Z} oddělíme reálnou (\mathcal{Z}') a imaginární (\mathcal{Z}'') část

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}' + i \mathcal{Z}'' \quad \text{V(4.18)}$$

Střední disipace energie za jednotku času pak bude

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{Z}' |\mathcal{I}|^2. \quad \text{V(4.19)}$$

Při harmonické závislosti je $\frac{1}{2} |\mathcal{I}|^2 = \langle \mathcal{I}^2 \rangle$, takže konečný výsledek lze vyjádřit rovnicí

$$\langle Q \rangle = \mathcal{Z}'(\omega) \langle \mathcal{I}^2 \rangle. \quad \text{V(4.20)}$$

Ve speciálním případě V(4.6) to dá známý vztah $Q = R \mathcal{I}^2$.

Při zavádění vztahů V(4.5) a V(4.6) jsme předpokládali, že v obvodu působí

jediné vtištěné napětí a v obvodu s jediným odporem \mathcal{R} , jednou indukčností L a jednou kapacitou C teče jediný proud \mathcal{I} . V případě většího počtu prvků v obvodu bude

$$\mathcal{U}_A = \sum_B \mathcal{L}_{AB} \mathcal{I}_B, \quad \text{V(4.21)}$$

kde matice \mathcal{L}_{AB} komplexního odporu je

$$\mathcal{L}_{AB} = \left(\mathcal{R}_A + \frac{i}{\omega C_A} \right) \delta_{AB} - i\omega L_{AB}. \quad \text{V(4.22)}$$

K těmto vztahům dospějeme tak, že V(4.1) nahradíme zřejmým zobecněním

$$\mathcal{U}_A = \mathcal{R}_A \mathcal{I}_A + \frac{d}{dt} \sum_B L_{AB} \mathcal{I}_B - \frac{e_A}{C_A}. \quad \text{V(4.23)}$$

Derivací podle času dostaneme odpovídající zobecnění rovnice V(4.2)

$$\frac{d\mathcal{U}_A}{dt} = \mathcal{R}_A \frac{d\mathcal{I}_A}{dt} + \sum_B L_{AB} \frac{d^2 \mathcal{I}_B}{dt^2} + \frac{\mathcal{I}_A}{C_A}, \quad \text{V(4.24)}$$

což v případě harmonické časové závislosti \mathcal{U}_A a \mathcal{I}_B dá

$$\mathcal{U}_A = \left(\mathcal{R}_A + \frac{i}{\omega C_A} \right) \mathcal{I}_A - i\omega \sum_B L_{AB} \mathcal{I}_B. \quad \text{V(4.25)}$$

Odtud okamžitě plynou vztahy V(4.21) a V(4.22).

Vlastní frekvence soustavy proudů se získají z V(4.21) při $\mathcal{U}_A = 0$, což vede k anulování determinantu

$$\det(\mathcal{L}_{AB}) = 0. \quad \text{V(4.26)}$$

Pro pozdější reference uvedeme výsledek V(4.17) pro libovolné dvě veličiny a, b závislé harmonicky $\exp(-i\omega t)$ na čase. Časově střední hodnota součinu $\langle(ab)\rangle$ dvou takových veličin se dá vyjádřit rovnicí

$$\langle ab \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(ab^*). \quad \text{V(4.27)}$$

V.5 Pohyb vodiče v magnetickém poli

V materiálových $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ a podobných vztazích (viz články II.4 a II.5) jsme mlčky předpokládali, že prostředí je v klidu vůči souřadné soustavě S , v níž jsou určeny vektory pole. V případě pohybujících se prostředí je nutno tyto vztahy modifikovat. Obecnou metodu pro toto zobecnění materiálových vztahů poskytuje teorie relativity (viz kap. XIII).

Zde se budeme zabývat odpovídající modifikací Ohmova zákona $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$, který

platí pro klidové vodiče. Vztah mezi proudovou hustotou \mathbf{j} a elektromagnetickým polem v pohybujícím se vodiči najdeme tak, že od souřadné soustavy S přejdeme k soustavě S' , v níž je vodič v daném okamžiku v klidu. V takovém případě je

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}', \quad \text{V(5.1)}$$

kde \mathbf{E}' je vektor elektrické intenzity v soustavě S' . Transformační zákony mezi vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} v obou soustavách se odvozují v relativistické elektrodynamice (viz též kap. XIII). Při rychlosti v velmi malé ve srovnání s rychlostí světla c ($v \ll c$) je

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad \text{V(5.2)}$$

kde \mathbf{v} je vektor rychlosti soustavy S' vůči S , tj. rychlost vodiče. Ke vzorci V(5.2) lze dospět i následující úvahou. Na částici s nábojem e pohybující se rychlostí \mathbf{v} v poli \mathbf{E} , \mathbf{B} působí síla

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

V klidové soustavě působí na částici síla $e\mathbf{E}'$. Srovnáním obou výrazů dospějeme ke vztahu V(5.2).

Spojením vztahů V(5.1) a V(5.2) dostaneme Ohmův zákon pro vodiče pohybující se rychlostí \mathbf{v}

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]). \quad \text{V(5.3)}$$

Tento vztah je nutno použít v rovnici $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ pro kvazistacionární pole. Rovnice

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]) \quad \text{V(5.4)}$$

je zobecněním rovnice V(1.2).

Skalární rovnice V(1.2)

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{V(5.5)}$$

zůstane beze změny. Faradayův indukční zákon $\mathcal{U} = -(d\psi/dt)$, kde $\psi = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$ je indukční tok, vede k Maxwellově rovnici

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad \text{V(5.6)}$$

Odpovídající zobecnění rovnice V(1.13) na pohybující se vodiče dostaneme tak, že z V(5.4) vyjádříme vektor \mathbf{E} , jenž pak dosadíme do V(5.6). Výsledkem standardních úprav je rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma\mu} \nabla^2 \mathbf{B} + \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad \text{V(5.7)}$$

Hlavní aplikace těchto rovnic jsou v teorii pohybujících se vodivých tekutin (tekutých kovů, ionizovaných plynů apod.). S některými aplikacemi se seznámíme v kap. XII věnované magnetohydrodynamice.

Zákony zachování v elektrodynamice

VI.1 Zákon zachování energie

Už v úvodní kapitole jsme se seznámili s výrazy pro energii elektrického a magnetického pole. V případě časově proměnných polí vystupuje do popředí vzájemná vazba mezi vektory elektromagnetického pole (např. ve Faradayově zákoně elektromagnetické indukce) jakož i přenos energie pole, proto odvodíme obecný výraz pro energetickou bilanci energie elektromagnetického pole.

Vyjdeme z úplné soustavy Maxwellových rovnic v látkovém prostředí

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad \text{VI(1.1)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad \text{VI(1.2)}$$

Druhou rovnici VI(1.1) vynásobíme skalárně vektorem \mathbf{E} , druhou rovnici VI(1.2) skalárně vektorem \mathbf{H} a vzniklé rovnice odečteme

$$\mathbf{H}(\partial \mathbf{B} / \partial t) + \mathbf{E}(\partial \mathbf{D} / \partial t) + \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{jE}. \quad \text{VI(1.3)}$$

Budeme předpokládat lineární závislosti

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, \quad \text{resp. } B_i = \mu_{ik} H_k, \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E}, \quad \text{resp. } D_i = \epsilon_{ik} E_k, \end{aligned} \quad \text{VI(1.4)}$$

přičemž ϵ , μ , ϵ_{ik} , μ_{ik} mohou být prostorově proměnné. V takovém případě lze $\mathbf{E}(\partial \mathbf{D} / \partial t)$ a $\mathbf{H}(\partial \mathbf{B} / \partial t)$ přepsat takto

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\mathbf{ED} + \mathbf{HB}). \quad \text{VI(1.5)}$$

Dále užijeme vektorovou identitu

$$\operatorname{div} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

a zavedeme Poyntingův vektor

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad \text{VI(1.6)}$$

Pomocí těchto vztahů upravíme rovnici VI(1.3) na energetickou bilanci

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = -\mathbf{jE}, \quad \text{VI(1.7)}$$

kde

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{ED} + \mathbf{HB}). \quad \text{VI(1.8)}$$

Na základě dřívějších poznatků ztotožňujeme veličinu u s hustotou energie elektromagnetického pole. Výraz $\mathbf{jE} = (\mathbf{j}^2 / \gamma)$ představuje Jouleovo teplo vytvořené v objemové jednotce vodivého prostředí za jednotku času (viz čl. II.5). Zbývá nám vyjasnit smysl vektoru $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$.

Je-li látkové prostředí nevodivé, popř. v oblasti pole vně proudů se rovnice VI(1.7) redukuje na tvar rovnice kontinuity⁵⁾

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0.$$

Integrací přes objem V a použitím Gaussova teorému převedeme poslední rovnici na integrální tvar

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V u \, dV = \int \operatorname{div} \mathbf{S} \, dV = \oint_S \mathbf{S}_n \, ds.$$

Levá strana představuje úbytek elektromagnetické energie z objemu V za jednotku času; člen $\oint_S \mathbf{S}_n \, ds$ interpretujeme jako množství elektromagnetické energie, která proteče za jednotkovou dobu do okolního prostoru přes plochu (\mathbf{s}) ohraničující daný objem V . Přicházíme tak k následujícímu závěru.

Poyntingův vektor $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ je vektorem proudové hustoty elektromagnetické energie. Rovnice VI(1.7), popř. její integrální tvar

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V u \, dV = \int_V \mathbf{jE} \, dV + \oint_S \mathbf{S}_n \, ds \quad \text{VI(1.9)}$$

pak praví, že zásoba elektromagnetické energie v prostorovém objemu V se zmenšuje jednak o mechanickou práci vykonanou elektrickými silami uvnitř

⁵⁾ Vektor \mathbf{E} je polárním vektorem, vektor \mathbf{H} je axiálním vektorem (viz čl. II.7), proto $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ je polárním vektorem. Označení \mathbf{S} pochází z německého Strahlungsvektor — vektor záření.

objemu V , jednak o energii vyzářenou z objemu V (přes ohraničující plochu \mathbf{s}) do okolního prostoru.

Poznámka: V souvislosti s definicí (interpretací) Poyntingova vektoru $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ jako vektoru proudové hustoty elektromagnetické energie vzniká otázka jednoznačnosti této veličiny.

Ve vzorci VI(1.7) vystupuje $\text{div } \mathbf{S} = \text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$, takže místo \mathbf{S} lze (s ohledem na identitu $\text{div rot} \equiv 0$) vzít

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S} + \text{rot } \mathbf{b}, \quad \text{VI(1.10)}$$

aniž by se to projevilo na bilanční rovnici VI(1.8), popř. VI(1.9).

V statických polích formálně existuje vektor $[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \mathbf{S}$, jelikož existují statické zdroje elektrického i magnetického pole (klidové náboje a permanentní magnety). V takovém případě je $\mathbf{j} = 0$ a všechny časové derivace jsou rovny nule. Z rovnice VI(1.7) a VI(1.9) pak plyne

$$\text{div } \mathbf{S} = 0, \quad \oint \mathbf{S} \, d\mathbf{s} = 0.$$

I ve statickém případě by tedy měl existovat vektor proudové hustoty (přenosu) elektromagnetické energie, přičemž tento vektor by měl mít tvar

$$\mathbf{S} = -\text{rot } \mathbf{b}, \quad -\int \mathbf{S} \, d\mathbf{s} = \int d\mathbf{s} \, \text{rot } \mathbf{b} = \oint \mathbf{b} \, d\mathbf{l} = 0.$$

Jelikož taková cirkulace (rotace) energie se ve statickém případě nikdy nepozorovala, usuzuje se z toho na jednoznačnost definice vektoru \mathbf{S} . Kalibrací VI(1.10) můžeme docílit, aby bylo $\mathbf{S}' = 0$ ve shodě s experimentem. Takové stanovisko je však nepřesvědčivé. V daném případě jsou rovnice pro elektrické pole ($\text{rot } \mathbf{E} = 0$, $\text{div } \mathbf{D} = \rho$) naprosto nezávislé na rovnicích pro pole magnetické ($\text{rot } \mathbf{H} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$), proto nemá smysl vytvářet výrazy (veličiny) svazující elektrostatische a magnetostatische pole, jakým je $\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H} = \text{div}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = 0$. V statickém případě nemá smyslu proudění energie elektromagnetického pole.

Pro interpretaci vektoru $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ jako vektoru proudové hustoty elektromagnetické energie časově proměnných polí mluví i následující skutečnosti. Rychlost takto definovaného přenosu energie je shodná s rychlostí šíření elektromagnetických signálů (elektromagnetických vln), jak se o tom přesvědčíme v následujících kapitolách. Je-li vektor $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ potenciální, tj. existuje-li skalární funkce Ψ taková, že $[\mathbf{E}, \mathbf{H}] = -\nabla\Psi$, pak by měl být i tok energie potenciální ($\text{rot } \mathbf{b} = 0$). V následující kapitole uvidíme, že pro rovinné elektromagnetické vlny je vektor $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ potenciální a že tok energie je také potenciální. Tyto argumenty ve prospěch ztotožnění vektoru $[\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ s vektorem proudové hustoty elektromagnetické energie lze podepřít tím, že taková interpretace bezprostředně plyne z relativistické elektrodynamiky.

VI.2 Zákon zachování hybnosti.

Maxwellův tenzor napětí

Na bodový náboj e pohybující se rychlostí \mathbf{v} v elektromagnetickém poli \mathbf{E}, \mathbf{B} působí Lorentzova síla

$$\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Pro objemovou hustotu \mathbf{f} Lorentzovy síly odtud plyne (viz čl. I.7)

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + [\mathbf{j}, \mathbf{B}]. \quad \text{VI(2.1)}$$

Označíme-li symbolem \mathbf{p} objemovou hustotu hybnosti látkového prostředí, pak lze hustotu síly $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ vyjádřit jako časovou změnu hybnosti⁶⁾ $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \rho\mathbf{E} + [\mathbf{j}, \mathbf{B}]. \quad \text{VI(2.2)}$$

Pravou stranu této rovnice postupně upravíme pomocí Maxwellových rovnic tak, aby obsahovala pouze vektory $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$ elektromagnetického pole. Z rovnic VI(1.1) vyjádříme ρ a \mathbf{j} a dosadíme do VI(2.2)

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} - [\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{H}] + \left[\mathbf{B}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right]. \quad \text{VI(2.3)}$$

Zatím jsme při úpravě užili pouze první série VI(1.1) Maxwellových rovnic. Nyní „zabudujeme“ do VI(2.3) také druhou sérii VI(1.2). Jelikož $\text{div } \mathbf{B} = 0$, je také $\mathbf{H} \text{ div } \mathbf{B} = 0$. Přidáním tohoto výrazu do VI(2.3) dostaneme výraz symetrický v divergencích vektorů \mathbf{D} a \mathbf{B}

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} + \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{B} - [\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{H}] - \left[\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \mathbf{B} \right] \quad \text{VI(2.4)}$$

Zbývá nám ještě použít Faradayova indukčního zákona, tj. druhé rovnice VI(1.2). Po vektorovém vynásobení této rovnice vektorem \mathbf{D} získáme rovnici

$$0 = -[\mathbf{D}, \text{rot } \mathbf{E}] - \left[\mathbf{D}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right]. \quad \text{VI(2.5)}$$

Sečtením rovnic VI(2.4) a VI(2.5) dostaneme

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{D}, \mathbf{B}] + \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{D} + \mathbf{H} \text{ div } \mathbf{B} - [\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{H}] - [\mathbf{D}, \text{rot } \mathbf{E}]. \quad \text{VI(2.6)}$$

Tuto rovnici postupně upravíme na tvar rovnice kontinuity pro hybnost, což vyjadřuje zákon zachování hybnosti.

⁶⁾ Předpokládáme, že na látkové prostředí působí pouze elektromagnetické síly.

Nejdříve zavedeme vektor

$$\mathbf{g} = [\mathbf{D}, \mathbf{B}] \quad \text{VI(2.7)}$$

a převedeme jej na levou stranu rovnice VI(2.6)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{p} + \mathbf{g}) = \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{B} - [\mathbf{B}, \operatorname{rot} \mathbf{H}] - [\mathbf{D}, \operatorname{rot} \mathbf{E}]. \quad \text{VI(2.8)}$$

Poněvadž vektor \mathbf{g} sestavený pouze z vektorů elektromagnetického pole vystupuje v součtu s vektorem \mathbf{p} hustoty hybnosti látkového prostředí, interpretujeme \mathbf{g} jako vektor objemové hustoty hybnosti elektromagnetického pole.

K další úpravě je výhodné převést VI(2.8) do složek

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_i + g_i) = E_i (\partial D_j / \partial x_j) + H_i (\partial B_j / \partial x_j) - e_{ijk} (B_j \operatorname{rot}_k \mathbf{H} + D_j \operatorname{rot}_k \mathbf{E}).$$

Zapišeme-li ještě $\operatorname{rot}_k \mathbf{a} = e_{klm} (\partial a_m / \partial x_l)$, bude

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_i + g_i) = E_i \frac{\partial D_j}{\partial x_j} + H_i \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - e_{ijk} e_{klm} \left(B_j \frac{\partial H_m}{\partial x_l} + D_j \frac{\partial E_m}{\partial x_l} \right).$$

Součin $e_{ijk} e_{klm}$ upravíme pomocí vztahu

$$e_{ijk} e_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl},$$

čímž po jednoduchých úpravách dospějeme k rovnici

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (p_i + g_i) = & E_i \frac{\partial D_j}{\partial x_j} + H_i \frac{\partial B_j}{\partial x_j} - B_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i} - \\ & - D_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + B_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} + D_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

První a šestý člen na pravé straně této rovnice představují dohromady $\partial(E_i D_j) / \partial x_j$, tj. divergenci tenzoru $E_i D_j$. Obdobně druhý a pátý člen dohromady představují $\partial(H_i B_j) / \partial x_j$, takže bude

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_i + g_i) = \frac{\partial}{\partial x_j} (E_i D_j + H_i B_j) - \left(B_k \frac{\partial H_k}{\partial x_i} + D_k \frac{\partial E_k}{\partial x_i} \right). \quad \text{VI(2.9)}$$

Ve zbývajících dvou členech (třetím a čtvrtém) jsme sečítací (tzv. němý) index j nahradili indexem k .

Doposud jsme nepoužili žádných materiálových vztahů. V další úpravě budeme předpokládat lineární závislosti

$$\mathbf{B}_k = \mu_{kl} \mathbf{H}_l, \quad \mathbf{D}_k = \epsilon_{kl} \mathbf{E}_l \quad \text{VI(2.10)}$$

s koeficienty μ_{kl} , ϵ_{kl} nezávislými na polích a souřadnicích. Výraz $D_k (\partial E_k / \partial x_i)$ postupně upravíme

$$\begin{aligned} D_k \frac{\partial E_k}{\partial x_i} &= \epsilon_{kl} E_l \frac{\partial E_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} \epsilon_{kl} E_k E_l \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2} (\mathbf{E}_k D_k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2} (\mathbf{E} \mathbf{D}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{E} \mathbf{D}). \end{aligned}$$

Obdobně se upraví $B_k (\partial H_k / \partial x_i)$, což dá

$$B_k \frac{\partial H_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{2} \delta_{ij} (\mathbf{H} \mathbf{B}).$$

Pomocí těchto vztahů se VI(2.9) přepíše ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_i + g_i) = - \frac{\partial}{\partial x_j} [u \delta_{ij} - (E_i D_j + H_i B_j)], \quad \text{VI(2.11)}$$

kde

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B})$$

je známý nám již výraz pro hustotu energie elektromagnetického pole.

Je výhodné zavést tenzor druhého řádu

$$T_{ij} = u \delta_{ij} - (E_i D_j + H_i B_j), \quad \text{VI(2.12)}$$

pomocí něhož přepíšeme VI(2.11) ve tvaru rovnice kontinuity pro hybnost

$$\frac{\partial}{\partial t} (p_i + g_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = 0. \quad \text{VI(2.13)}$$

Tenzorový charakter veličin T_{ij} je zřejmý z toho, že obsahuje jednotkový tenzor δ_{ij} a součiny $E_i D_j$, $H_i B_j$ komponent vektorů, proto $(\partial T_{ij} / \partial x_j)$ představuje divergenci tenzoru T_{ij} . (Připomeňme si, že divergence tenzoru druhého řádu je vektor.)

Interpretaci tenzoru T_{ij} najdeme z integrálního přepisu rovnice VI(2.13). Prointegrujeme tuto rovnici přes objem V , přičemž užijeme Gaussova teorému I(5.9), tj. vztahu

$$\int_V dV \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij} = \oint_S T_{ij} n_j ds.$$

Výsledkem těchto úprav je rovnice

$$- \frac{\partial}{\partial t} \int_V (p_i + g_i) dV = \oint_S T_{ij} n_j ds. \quad \text{VI(2.14)}$$

Levá strana představuje časový úbytek i -té složky veškeré hybnosti obsažené v objemu V . Pravá strana pak představuje tok i -té složky hybnosti elektromagnetického pole přes ohraničující plochu do okolního prostoru. Ztotožnění pravé strany rovnice VI(2.14) s tokem hybnosti elektromagnetického pole je zřejmé z toho, že tenzor T_{ij} je sestaven pouze z vektorů elektromagnetického pole.

Veličina $T_{ij}n_j$ představuje tok i -té složky hybnosti elektromagnetického pole jednotkovou plochou (za jednotku času). Jinými slovy tři veličiny T_{11} , T_{12} , T_{13} , představují tři složky proudové hustoty i -té složky hybnosti elektromagnetického pole. Každá z komponent T_{ij} určuje množství i -té složky elektromagnetické hybnosti, které proteče za jednotku času jednotkovou ploškou kolmou k j -té ose. Tok hybnosti představuje sílu, proto T_{ij} je tenzorem napětí elektromagnetického pole.

Tenzor T_{ij} definovaný rovnicí VI(2.12) je proslulý *Maxwellův—Minkovského tenzor napětí elektromagnetického pole*.

Elektromagnetické pole podobně jako „obyčejné“ látkové prostředí má nejen energii, která proudí od místa k místu, ale i hybnost (a tedy i hmotnost), kterou si může vyměňovat s látkovým prostředím. V další části této kapitoly uvidíme, že elektromagnetické pole je také nositelem momentu hybnosti, a tedy všech třech atributů, jež se dříve připisovaly pouze látkovému prostředí. Z toho soudíme, že elektromagnetické pole je zvláštním druhem, popř. projevem hmoty.

Hybnost elektromagnetického pole je v prostoru rozložena s hustotou $\mathbf{g} = [\mathbf{D}, \mathbf{B}]$ podobně jako je elektromagnetická energie rozložena s hustotou $u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B})$.

Smysl výrazu VI(2.7) je zvláště názorný ve vakuu $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$. Jelikož $\varepsilon_0\mu_0c^2 = 1$ (c je rychlost světla ve vakuu), bude platit

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{S}}{c^2}. \quad \text{VI(2.15)}$$

Hustota elektromagnetické hybnosti je rovna podílu vektoru proudové hustoty elektromagnetické energie a čtverce rychlosti světla. To je speciální případ relativistického vztahu mezi hybností (popř. hmotností) a energií. S tímto vztahem se v dalších kapitolách ještě setkáme.

K volbě tenzoru napětí je užitečné připojit několik poznámek. V izotropním prostředí ($\mathbf{D}_j = \varepsilon E_j$, $\mathbf{B}_j = \mu H_j$) je tenzor VI(2.12) symetrický: $T_{ij} = T_{ji}$. V anizotropním prostředí je tato symetrie Maxwellova tenzoru narušena.

Formálně lze docílit symetrizace tenzoru T_{ij} i v anizotropním prostředí, aniž bychom tím narušili rovnice pole anebo jejich důsledky. Tenzor T_{ij} není totiž určen jednoznačně. Tenzorem T'_{ij} jsme označili výraz v hranaté závorce na pravé straně rovnice VI(2.11). Místo VI(2.12) lze totiž vzít nový tenzor

$$T'_{ij} = T_{ij} + e_{ijk} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \quad \text{VI(2.16)}$$

kde ψ je libovolná diferencovatelná funkce. Výraz $e_{ijk}(\partial^2 \psi / \partial x_j \partial x_k)$ dá identickou nulu, jelikož e_{ijk} je antisymetrické a $(\partial^2 \psi / \partial x_j \partial x_k)$ je symetrické vzhledem k indexům j , k . Je tedy

$$\frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j},$$

a tudíž i rovnice VI(2.13) a VI(2.14) zůstanou v platnosti, když tenzor T_{ij} nahradíme tenzorem T'_{ij} . To je podobná situace jako s kalibrací Poyntingova vektoru, o níž jsme pojednali v závěru předchozího článku.

Nejednoznačnosti, resp. jisté libovůle v definici tenzoru napětí lze využít k jeho symetrizaci. Zavedeme analogicky k VI(2.16) tenzor transponovaný vzájemnou výměnou indexů i , j , tj.

$$T'_{ji} = T_{ji} + e_{jik} \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \quad \text{VI(2.17)}$$

kde T_{ij} a T_{ji} jsou určeny rovnicí VI(2.12). Doposud libovolnou funkci ψ zvolíme tak, aby nový tenzor T'_{ij} byl symetrickým. Z požadavku symetrie

$$T'_{ij} = T'_{ji} \quad \text{VI(2.18)}$$

pak plyne

$$e_{ijk} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{1}{2}(E_i D_j + H_i B_j - E_j D_i - H_j B_i). \quad \text{VI(2.19)}$$

Dá se dokázat, že takové ψ existuje, takže soustava má řešení. Po dosažení tohoto výsledku do VI(2.16) dostaneme symetrický *Abrahamův tenzor napětí*

$$T'_{ij} = u\delta_{ij} - \frac{1}{2}(E_i D_j + E_j D_i + H_i B_j + H_j B_i), \quad \text{VI(2.20)}$$

což je ve skutečnosti $\frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$.

V izotropním prostředí jsou oba tenzory T_{ij} i T'_{ij} symetrické a dávají stejnou hodnotu toku i -té složky hybnosti jednotkovou ploškou kolmou k j -té ose. Pro anizotropní prostředí se výsledky liší. *Experimentální rozhodnutí* mezi oběma stanovisky je prakticky nemožné, jelikož se jedná o *mizivé* rozdíly. Nejsou ani *přesvědčivé teoretické argumenty* pro symetrii tenzoru napětí v libovolném prostředí, proto správná volba tenzoru napětí patří k otevřeným problémům klasické elektrodynamiky.

VI.3 Tlak světelného záření

Časově proměnné elektromagnetické pole je nositelem hybnosti, která proudí od místa k místu a může se předávat látkovému prostředí. Víme, že $T_{ij}n_j$ představuje množství i -té složky hybnosti, která proteče jednotkovou plochou za jednotku času, tj. i -tou složkou síly, působící na jednotkovou plochu. Normální složka síly působící na jednotkovou plochu bude $(T_{ij}n_j)n_i = T_{ij}n_i n_j$. Střední hodnota této síly $\langle T_{ij}n_i n_j \rangle$ představuje tlak P , jímž elektromagnetické pole působí na tělesa

$$P = \langle T_{ij}n_i n_j \rangle. \quad \text{VI(3.1)}$$

Po dosazení za T_{ij} z rovnice VI(2.12) se objeví výraz $\delta_{ij}n_in_j = n_in_i = 1$. Výrazy typu $E_n n_i$ apod. představují skalární součiny $(\mathbf{E}n)$ apod. Je tedy

$$P = u - \langle (\mathbf{E}n)(\mathbf{D}n) + (\mathbf{H}n)(\mathbf{B}n) \rangle. \quad \text{VI(3.2)}$$

Středování přes orientace vektorů pole vzhledem k normále plochy se provede podle návodu v dodatku VII. V daném případě se jedná o vztahy

$$\langle (\mathbf{E}n)(\mathbf{D}n) \rangle = \frac{1}{3} \mathbf{E} \mathbf{D}, \quad \langle (\mathbf{H}n)(\mathbf{B}n) \rangle = \frac{1}{3} \mathbf{H} \mathbf{B},$$

pomocí nichž bude

$$P = u - \frac{1}{3} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}) = \frac{1}{3} u. \quad \text{VI(3.3)}$$

K uvedenému výsledku lze dospět i poměrně „lacinější“ argumentací. V izotropním prostředí můžeme tenzor napětí zredukovat na působení skalárního tlaku, což vyjadřuje rovnice $T_{ij} = P \delta_{ij}$. Položíme $j = i$ a sečteme přes i , což dá $T_{ii} \equiv T_{11} + T_{22} + T_{33} = 3P$. Tlak P je tedy roven 1/3 součtu diagonálních komponent tenzoru T_{ij}

$$P = \frac{1}{3} T_{ii} \equiv \frac{1}{3} (T_{11} + T_{22} + T_{33}); \quad \text{VI(3.4)}$$

což je přirozený výsledek. Po dosazení za T_{ii} z rovnice VI(2.12) dostaneme $T_{ii} = u$, což vede k výsledku VI(3.3).

Tlak elektromagnetického záření je roven jedné třetině hustoty energie elektromagnetického pole. (Jelikož — jak později uvidíme — světlo je elektromagnetickým vlněním, zpravidla se mluví o *světelném tlaku*.) Existence světelného tlaku prvně experimentálně dokázal P. N. LEBEDEV (1901).

Výsledek VI(3.3) je teoretickým základem pro odvození slavného Stefanova—Boltzmannova zákona záření absolutně černého tělesa. Naznačíme zde hlavní ideu tohoto odvození.

Z běžné zkušenosti víme, že všechna tělesa emitují elektromagnetické záření, jehož spektrální rozdělení a intenzita závisí na teplotě emitujícího tělesa. Je-li záření uzavřeno v dutině, jejíž stěny jsou udržovány na konstantní teplotě \mathcal{T} , vznikne nakonec stav termodynamické rovnováhy. V takovém případě je nutno záření přiřadit touž teplotu, na jaké jsou udržovány stěny dutiny. Poněvadž tato teplota je všude stejná, charakteristiky záření nejsou závislé na prostorových souřadnicích bodů v dutině.

V rovnovážném stavu je energie U záření rozdělena v dutině rovnoměrně, což vede ke vztahu $U = Vu$, kde V je objem dutiny a U je rovnovážná hustota (elektromagnetické) energie v dutině. Tato rovnovážná hustota závisí na teplotě $u \equiv u(\mathcal{T})$. Vynecháme-li pro stručnost označení středních hodnot, pak je

$$U = Vu(\mathcal{T}). \quad \text{VI(3.5)}$$

Změna energie dU se skládá z dodaného tepla dQ a z práce $-P dV$ vykonané

silami tlaku (v daném případě na rozšíření stěn dutiny), což vyjadřuje první princip termodynamiky $dU = dQ - P dV$. Infinitesimální přírůstek tepla dQ souvisí s teplotou \mathcal{T} a entropií \mathcal{S} známým vztahem $dQ = \mathcal{T} d\mathcal{S}$, což vede k rovnici pro entropii

$$d\mathcal{S} = \frac{1}{\mathcal{T}} dU + \frac{P}{\mathcal{T}} dV.$$

Jelikož $U \equiv U(V, \mathcal{T})$, je úplný diferenciál

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{\mathcal{T}} dV + \left(\frac{\partial U}{\partial \mathcal{T}} \right)_{V} d\mathcal{T},$$

a tudíž

$$d\mathcal{S} = \frac{1}{\mathcal{T}} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathcal{T}} \right)_{V} d\mathcal{T} + \frac{1}{\mathcal{T}} \left[P + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{\mathcal{T}} \right] dV. \quad \text{VI(3.6)}$$

Pro záření v dutině uijeme VI(3.3) a VI(3.5), což dá

$$d\mathcal{S} = \frac{V}{\mathcal{T}} \frac{du}{d\mathcal{T}} d\mathcal{T} + \frac{4}{3} \frac{u(\mathcal{T})}{\mathcal{T}} dV.$$

Výraz $d\mathcal{S}$ má tvar $d\mathcal{S} = M(V, \mathcal{T}) d\mathcal{T} + N(V, \mathcal{T}) dV$; z podmínky pro úplný diferenciál $(\partial M / \partial V)_{\mathcal{T}} \equiv (\partial N / \partial \mathcal{T})_{V}$ pak po jednoduché úpravě dostaneme diferenciální rovnici pro rovnovážnou hustotu energie

$$\mathcal{T} \frac{du}{d\mathcal{T}} = 4u.$$

Triviální integrací dostaneme

$$u(\mathcal{T}) = \sigma \mathcal{T}^4, \quad \text{VI(3.7)}$$

kde σ je integrační konstanta.

Rovnice VI(3.7) představuje slavný *Stefanův—Boltzmannův zákon*. Teoretické odvození tohoto původně empirického zákona pochází od Boltzmann (1884).

Absolutně černé těleso je takové těleso, které pohlcuje veškeré zvnějšku dopadající záření. Je-li v dutině malý otvůrek, pak každý paprsek, který dopadne z vnějšku do tohoto otvůrku může vyjít z dutiny pouze po mnohonásobném odrazu od (vnitřních) stěn dutiny. Po velkém počtu odrazů bude paprsek prakticky pohlcen, takže z malého otvůrku dutiny bude vycházet záření identické se zářením absolutně černého tělesa. Intenzita tohoto záření je přímo úměrná čtvrté mocnině (absolutní) teploty.

VI.4 Zákon zachování momentu hybnosti

Nese-li elektromagnetické pole hybnost, dá se očekávat, že elektromagnetické pole bude také nositelem momentu hybnosti.

Proilustrujeme tuto skutečnost na elektromagnetickém poli ve vakuu, kde hustota hybnosti pole je určena vztahem VI(2.15).

Hustotou momentu hybnosti elektromagnetického pole nazveme vektorový součin $[\mathbf{r}, \mathbf{g}]$ a nenulové složky tohoto vektorového součinu vyjádříme pomocí antisymetrického tenzoru

$$M_{ij} = x_i g_j - x_j g_i = -M_{ji}. \quad \text{VI(4.1)}$$

Ukážeme, že složky tohoto tenzoru splňují jistou rovnici kontinuity, jež vyjádříme zákon zachování momentu hybnosti.

Ve vakuu zapíšeme bilanční rovnici VI(2.13) pro i -tou a j -tou složku hybnosti takto

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad \frac{\partial g_j}{\partial t} + \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} = 0.$$

První z těchto rovnic vynásobíme x_j , druhou x_i a vzniklé rovnice odečteme. Při odečtení se objeví časová derivace $(\partial M_{ij}/\partial t)$, což vede k rovnici

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial t} + x_i \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad \text{VI(4.2)}$$

Při úpravě tohoto výrazu uijeme identity (ve vakuu $T_{ij} = T_{ji}$)

$$x_i \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} - x_j \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i T_{jk} - x_j T_{ik}).$$

Je tedy výhodné zavést tenzor třetího řádu antisymetricky v indexech i, j

$$N_{ijk} = x_i T_{jk} - x_j T_{ik} = -N_{jik}. \quad \text{VI(4.3)}$$

Pomocí tohoto tenzoru přepíšeme VI(4.2) ve tvaru rovnice kontinuity pro moment hybnosti elektromagnetického pole

$$\frac{\partial M_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial N_{ijk}}{\partial x_k} = 0, \quad \text{VI(4.4)}$$

popř. v integrálním tvaru

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V M_{ij} dV = \oint_S N_{ijk} ds_k. \quad \text{VI(4.5)}$$

Při úpravě jsme užili Gaussův teorém I(5.9).

Úbytek momentu hybnosti za jednotku času z daného objemu je roven toku momentu hybnosti přes ohraničující plochu. Tenzor N_{ijk} proto interpretujeme jako tenzor proudové hustoty momentu hybnosti elektromagnetického pole.

Je-li do elektromagnetického pole vloženo látkové prostředí (náboje, atomy apod.), dochází k výměně momentu hybnosti mezi polem a prostředím (náboji, atomy apod.).

Experimentálně se podařilo měřit (A. BOTHE, 1936) moment hybnosti předávaný slivové destičce dopadajícím elektromagnetickým zářením.

U makroskopických těles je změna jejich momentu hybnosti vlivem interakce s elektromagnetickým polem velmi malým, obtížně měřitelným jevem. V oblasti atomárních a subatomárních jevů je však existence momentu hybnosti elektromagnetického pole podstatnou. Tak např. při emisi světla excitovaným atomem dochází ke změně momentu hybnosti atomu, přičemž tato změna je srovnatelná s původním momentem hybnosti atomu. Úbytek momentu hybnosti atomu je unášen vzniklým elektromagnetickým zářením.

VI.5 Jednoznačnost řešení Maxwellových rovnic

V předchozích kapitolách jsme se vícekrát setkali s problematikou jednoznačnosti řešení soustavy Maxwellových rovnic elektromagnetického pole. V některých speciálních případech (např. v čl. III.2) jsme se touto otázkou již zabývali, nyní přejdeme k některým dalším případům.

Problém jednoznačnosti řešení soustavy Maxwellových rovnic má nejen teoretický, ale i praktický význam, a to zejména z těchto důvodů:

1. Jednoznačností řešení je určen stupeň úplnosti dané soustavy rovnic a počátečních podmínek; v opačném případě by bylo zapotřebí nových fyzikálních kritérií na odstranění nejednoznačnosti.

2. Pouze důkaz jednoznačnosti řešení (pro daný druh úlohy) nám garantuje, že řešení, které jsme nějakým postupem získali, je správným řešením.

Zde vyšetříme problém jednoznačnosti řešení Maxwellových rovnic pro případ tzv. smíšené Cauchyovy úlohy, kdy jsou zadány počáteční podmínky (tj. podmínky v nějakém čase $t = t_0$) a hraniční podmínky v celém časovém intervalu.

Budeme uvažovat prostředí s lineárními materiálovými vztahy $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$. Počáteční podmínky nechť jsou

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) \equiv \mathbf{E}_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, 0) \equiv \mathbf{H}_0(\mathbf{r}). \quad \text{VI(5.1)}$$

Hraniční podmínky nechť představují zadání tangenciálních komponent \mathbf{E}_t nebo \mathbf{H}_t ,

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_t(\mathbf{R}, 0), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad \text{VI(5.2)}$$

nebo

$$\mathbf{H}_t(\mathbf{R}, t) = \mathbf{H}_t(\mathbf{R}, 0), \quad 0 \leq t \leq t_1, \quad \text{VI(5.3)}$$

kde \mathbf{R} je polohový vektor bodů hranice uvažované oblasti.

K důkazu jednoznačnosti řešení Maxwellových rovnic pro danou úlohu použijeme rovnice VI(1.9), kterou zapíšeme ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u dV = - \int \frac{j^2}{\gamma} dV - \oint [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n} ds. \quad \text{VI(5.4)}$$

Předpokládejme, že existují dvě různá řešení $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ a $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$. Jelikož rovnice pole jsou lineární, muselo by jim vyhovovat také řešení

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 \quad \text{VI(5.5)}$$

s počátečními podmínkami

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \mathbf{H}'(\mathbf{r}, 0) = 0 \quad \text{VI(5.6)}$$

a s hraničními podmínkami

$$\mathbf{E}'_t = 0, \quad 0 \leq t \leq t_1 \quad \text{VI(5.7)}$$

nebo

$$\mathbf{H}'_t = 0, \quad 0 \leq t \leq t_1. \quad \text{VI(5.8)}$$

Stejný postup jako při odvozování VI(1.9) by nás přivedl k rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u' dV = - \int \frac{j^2}{\gamma} dV - \oint [\mathbf{E}', \mathbf{H}'] \cdot \mathbf{n} ds, \quad \text{VI(5.9)}$$

kde nyní $u' = \frac{1}{2}(\epsilon E'^2 + \mu H'^2)$.

Plošný integrál v VI(5.9) upravíme pomocí vztahů

$$[\mathbf{E}', \mathbf{H}'] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}' \cdot [\mathbf{H}', \mathbf{n}] = \mathbf{H}' \cdot [\mathbf{n}, \mathbf{E}'].$$

Výrazy na pravé straně jsou úměrné buď \mathbf{E}'_t , nebo \mathbf{H}'_t , a tedy s ohledem na hraniční podmínky VI(5.7) a VI(5.8) je

$$[\mathbf{E}', \mathbf{H}'] \cdot \mathbf{n} = 0. \quad \text{VI(5.10)}$$

Rovnice VI(5.9) pak vede ke vztahu

$$\frac{\partial}{\partial t} \int u' dV = - \int \frac{j^2}{\gamma} dV \leq 0, \quad (0 \leq t \leq t_1). \quad \text{VI(5.11)}$$

Nemůže tedy být $\frac{\partial}{\partial t} \int u' dV > 0$, energie $\int u' dV$ může s časem pouze ubývat nebo (při $\mathbf{j} = 0$) zůstat konstantní. S ohledem na VI(5.6) při $t = 0$ je $\int u' dV = 0$. Poněvadž energie $\int u' dV$ nemůže s časem růst musí být v celém časovém intervalu

$$\int u' dV = \frac{1}{2} \int (\epsilon E'^2 + \mu H'^2) dV = 0, \quad (0 \leq t \leq t_1).$$

Odtud plyne, že v celém časovém intervalu $0 \leq t \leq t_1$ je $\mathbf{E}' = 0, \mathbf{H}' = 0$, čímž je důkaz jednoznačnosti řešení proveden.

VI.6 Elektromagnetická energie v disperzním prostředí

Při odvozování zákona zachování energie ve tvaru VI(1.7) byl podstatný předpok-

lad lineárních materiálových vztahů VI(1.4) a z něj vyplývající následný vztah VI(1.5). Bez tohoto předpokladu bychom nemohli ztotožnit

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\epsilon E^2 + \mu H^2)$$

s hustotou elektromagnetické energie a dát této veličině odpovídající termodynamický smysl (rozdíl energie objemové jednotky prostředí v poli a bez pole při stejné entropii a hustotě).

Opustíme-li předpoklady VI(1.4), pak v nevodivém prostředí budeme mít místo VI(1.7) rovnici

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{S}. \quad \text{VI(6.1)}$$

Poyntingův vektor $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ má význam toku energie jednotkovou plochou v libovolném poli a libovolném prostředí (včetně prostředí s disperzí). Tato interpretace je nepochybná ve vakuu. Ze spojitosti tečných komponent vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} , jakož i normálové komponenty \mathbf{S} plyne uvedená interpretace pro libovolné prostředí.

Budeme uvažovat monochromatické pole. Z článku II.4 víme, že vztahy $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ lze chápat jako relace mezi Fourierovými komponentami s komplexními $\epsilon(\omega)$ a $\mu(\omega)$. V VI(6.6) lze položit $(\partial \mathbf{D} / \partial t) = -i\omega \epsilon(\omega) \mathbf{E}$, $(\partial \mathbf{B} / \partial t) = -i\omega \mu(\omega) \mathbf{H}$. Časově střední hodnotu levé strany rovnice VI(6.1) vyjádříme ve shodě se vztahem V(4.27) takto

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}^*}{\partial t} \right),$$

což s pomocí uvedených vztahů přepíšeme jako

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ i\omega \epsilon^* |\mathbf{E}|^2 + i\omega \mu^* |\mathbf{H}|^2 \}.$$

Zavedeme reálné a imaginární části permitivity a permeability

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega), \quad \mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega).$$

Po jednoduché úpravě pak získáme hledaný vztah pro střední disipaci energie v disperzním prostředí

$$\langle Q \rangle = \frac{\omega}{2} (\epsilon'' |\mathbf{E}|^2 + \mu'' |\mathbf{H}|^2). \quad \text{VI(6.2)}$$

Disipace (absorpce) elektromagnetické energie je určena imaginárními částmi $\epsilon''(\omega)$ a $\mu''(\omega)$. Tato disipace energie je doprovázena produkcí tepla ($Q > 0$), a tudíž

$$\epsilon''(\omega) > 0, \quad \mu''(\omega) > 0. \quad \text{VI(6.3)}$$

Oblasti frekvencí, při nichž $\varepsilon'' \rightarrow 0$, $\mu'' \rightarrow 0$, odpovídají oblasti průzračnosti daného prostředí.

Zde jsme se zabývali disperzí energie pro harmonické pole.

V obecném případě je teorie mnohem složitější; úvodní charakter této učebnice nám nedovoluje zabývat se touto problematikou podrobněji, proto odkazujeme na speciální literaturu⁷⁾.

⁷⁾ LANDAU L., LIFŠIC E.: Elektrodinamika splošnych sred, GITTL Moskva 1957.

VII.1 Vlnová a telegrafní rovnice

Z Maxwellových rovnic vyplynulo, že úbytek elektromagnetické energie z libovolného objemu je roven Jouleovu teplu vytvořenému ve vodičích a toku energie přes ohraničující povrch. V prostoru vně vodičů je $\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV = 0$, takže zbývá $\oint \mathbf{S} \, ds$, kde $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ je Poyntingův vektor. Uvidíme, že v nestacionárních polích existují řešení \mathbf{E}, \mathbf{H} ubývající se vzdáleností R jako $1/R$; povrchový integrál pro taková pole nevymizí ani při integraci přes nekonečně vzdálený povrch. Tento nevymizující tok energie (a také hybnosti a momentu hybnosti) představuje elektromagnetické záření. Šíření (časově proměnného) elektromagnetického pole (elektromagnetického rozruchu) je spojeno s přenosem energie, hybnosti (hmotnosti) a momentu hybnosti od místa k místu.

Nyní dokážeme, že toto šíření elektromagnetického rozruchu od místa k místu má charakter šíření vlnového signálu, tj., že pro vektory elektromagnetického pole \mathbf{E}, \mathbf{B} platí vlnová rovnice.

Vyjdeme ze soustavy Maxwellových rovnic pro homogenní izotropní prostředí s lineárními materiálovými vztahy

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}, \quad \text{VII(1.1)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}, \quad \text{VII(1.2)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{VII(1.3)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{VII(1.4)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu \gamma \mathbf{E} + \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad \text{VII(1.5)}$$

Na rovnici VII(1.4) aplikujeme operaci rot a užijeme $\text{rot rot} \equiv \text{grad div} - \nabla^2$. Po jednoduché úpravě dostaneme

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \gamma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{grad div } \mathbf{E} = \text{grad} \left(\frac{\varrho}{\varepsilon} \right).$$

V homogenním prostředí je $\text{grad}(\varrho/\varepsilon) = 0$, takže pro vektor \mathbf{E} platí rovnice

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \gamma\mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad \text{VII(1.6)}$$

Aplikací operace rot na rovnici VII(1.5) dostaneme stejnou rovnici pro vektor \mathbf{B}

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \gamma\mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad \text{VII(1.7)}$$

Rovnicemi VII(1.6) a VII(1.7) je popsáno šíření elektromagnetického pole ve vodivém (homogenním a izotropním) prostředí. Ze známých historických důvodů se tyto vztahy nazývají *telegrafní rovnice*. Tyto rovnice jsou zobecněním rovnic V(1.13) a V(1.14) pro kvazistacionární pole na případ libovolně proměnného pole.

Pro pomalu proměnné pole

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|, \quad \frac{\varepsilon}{\gamma} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \right| \ll \left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|, \quad \text{VII(1.8)}$$

popř. pole ve výborných vodičích (veliké hodnoty měrné vodivosti γ) dostáváme známé nám již rovnice pro kvazistacionární pole.

V případě prostředí o malé vodivosti, tj. při

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \right| \gg \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|, \quad \frac{\varepsilon}{\gamma} \left| \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \right| \gg \left| \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right|, \quad \text{VII(1.9)}$$

dostáváme vlnovou rovnici pro vektory elektromagnetického pole

$$\left(\nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0. \quad \text{VII(1.10)}$$

V této i v některých dalších kapitolách se budeme postupně zabývat řešením rovnic pro elektromagnetické vlny.

VII.2 Vlnová rovnice v homogenním a izotropním dielektriku

V nevodivém prostředí ($\gamma = 0$) se VII(1.6) a VII(1.7) zredukuje na standardní vlnovou rovnici

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0, \quad \text{VII(2.1)}$$

kde

$$w = \frac{c}{N}, \quad \text{VII(2.2)}$$

$$N = [\varepsilon^{(r)} \mu^{(r)}]^{1/2}. \quad \text{VII(2.3)}$$

Při úpravě jsme užili vztahů $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon^{(r)}$, $\mu = \mu_0 \mu^{(r)}$, $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Ve vakuu je $w = c$. Parametr N charakterizující prostředí je *index lomu*; oprávněnost tohoto názvu vyplyne při zkoumání lomu elektromagnetických vln na rozhraní dvou prostředí (viz čl. VII.8).

Řešením vlnové rovnice se budeme zabývat v další části této kapitoly; zde uvedeme pouze speciální případ těchto rovnic pro harmonické časové závislosti:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad \text{VII(2.4)}$$

což vede k tzv. Helmholtzově rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{B} + k^2 \mathbf{B} = 0, \quad \text{VII(2.5)}$$

kde

$$k = \frac{\omega}{w} = \frac{N\omega}{c}. \quad \text{VII(2.6)}$$

VII.3 Vlnová rovnice ve vodičích

Šíření elektromagnetického pole ve vodivém prostředí je popsáno telegrafními rovnicemi VII(1.6) a VII(1.7), které představují vlnovou rovnici pro vodivé prostředí. Vlastnosti daného prostředí spolu s rychlostí změny pole rozhodují o tom, jaký je relativní podíl členů $\varepsilon\mu(\partial^2 \mathbf{E}/\partial t^2)$, $\gamma\mu(\partial \mathbf{E}/\partial t)$, popř. $\varepsilon\mu(\partial^2 \mathbf{B}/\partial t^2)$, $\gamma\mu(\partial \mathbf{B}/\partial t)$. V článku VII.1 jsme ukázali podmínky VII(1.8), za nichž elektromagnetické pole ve vodiči difunduje.

V případě harmonických časových závislostí VII(2.4) dostaneme ze VII(1.6) a VII(1.7) Helmholtzovy rovnice

$$(\nabla^2 + K^2) \mathbf{E} = 0, \quad (\nabla^2 + K^2) \mathbf{B} = 0, \quad \text{VII(3.1)}$$

kde komplexní veličina K je definována rovnicí

$$K = \omega \left[\varepsilon\mu \left(1 + \frac{i\gamma}{\varepsilon\omega} \right) \right]^{1/2}, \quad \text{VII(3.2)}$$

popř.

$$K = \omega \left[\varepsilon\mu \left(1 + \frac{i}{\omega\tau} \right) \right]^{1/2}, \quad \text{VII(3.3)}$$

kde τ je tzv. relaxační doba (viz II(5.10))

$$\tau = \frac{\epsilon}{\gamma}$$

U dobrých vodičů je $\tau \approx 10^{-15}$ s, popř. ještě menší. Při frekvencích

$$\omega\tau \ll 1 \quad \text{VII(3.4)}$$

se VII(3.2) redukuje na rovnici typu V(1.16).

VII.4 Rovinné vlny v dielektriku

V homogenním izotropním dielektriku vyhovují vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} vlnovým rovnicím VII(2.1). Z matematického hlediska je vlnová rovnice parciální diferenciální rovnicí hyperbolického typu.

Budeme se zabývat řešením této rovnice. Začneme jednorozměrným případem

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad \text{VII(4.1)}$$

Tuto rovnici lze zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{w} \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0. \quad \text{VII(4.2)}$$

Odtud je vidět výhodnost zavedení nových proměnných

$$\xi = x - wt, \quad \eta = x + wt, \quad \text{VII(4.3)}$$

pomocí nichž se VII(4.1) zjednoduší na

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \psi(\xi, \eta) = 0.$$

Řešení vzniklé rovnice lze očividně zapsat jako součet dvou funkcí $f(\xi)$ a $g(\eta)$, tj.

$$\psi = f(\xi) + g(\eta),$$

resp. po přechodu k původním proměnným

$$\psi(x, t) = f(x - wt) + g(x + wt), \quad \text{VII(4.4)}$$

což je známé d'Alembertovo řešení vlnové rovnice.

V třírozměrném případě se d'Alembertovo řešení vlnové rovnice

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0 \quad \text{VII(4.5)}$$

najde obdobně; výsledkem je formule

$$\psi(\mathbf{r}, t) = F(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r} - wt) + G(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r} + wt), \quad \text{VII(4.6)}$$

kde $\boldsymbol{\kappa}$ je jednotkový vektor o složkách $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ (směrové kosiny). O platnosti řešení VII(4.6) se přesvědčíme dosazením do VII(4.5) a užitím vztahu $\boldsymbol{\kappa}^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Jelikož druhé řešení odpovídá záměně $w \rightarrow -w$, stačí k vyjasnění fyzikálního obsahu řešení vzít

$$\psi(\mathbf{r}, t) = F(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r} - wt). \quad \text{VII(4.7)}$$

Řešení obsahuje nezávislé proměnné \mathbf{r} , t pouze prostřednictvím argumentu (fáze)

$$d \equiv \boldsymbol{\kappa}\mathbf{r} - wt = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - wt. \quad \text{VII(4.8)}$$

Stejným hodnotám d patří stejná hodnota ψ (např. \mathbf{E} , \mathbf{B}), tj. stejná hodnota rozruchu. Zvolme nějakou hodnotu

$$d_0 = \boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}_0 - wt_0.$$

Místa stejné fáze ($d = d_0$) pak leží v rovinách

$$\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r} = d_0 + wt, \quad \text{VII(4.9)}$$

kteří se v prostoru přemísťují rychlostí w . Jelikož w určuje rychlost přemísťování stejných fází vln v prostoru nazývá se *fázovou* nebo *vlnovou rychlostí*. Vektor $\boldsymbol{\kappa}$ je jednotkovým vektorem normály k této rovině.

Dospěli jsme tak k závěru, že elektromagnetický rozruch postupuje od místa k místu ve formě elektromagnetických vln, přičemž fázová rychlost šíření těchto vln je $w = c/N$. Ve vakuu je rychlost šíření *elektromagnetického* rozruchu rovna rychlosti světla ve vakuu. Z toho J. C. MAXWELL usoudil, že tato shoda není náhodná, nýbrž obráží tu skutečnost, že *světlo samo je elektromagnetickým vlněním*. Tato domněnka byla skvěle potvrzena odvozením zákonů optiky z rovnic elektromagnetického pole, jak o tom pojednáme v následující kapitole.

Jelikož v časově proměnných polích jsou ϵ a μ funkcemi frekvence ω (viz čl. II.4), je také index lomu N závislý na frekvenci

$$N \equiv N(\omega). \quad \text{VII(4.10)}$$

Po těchto poznámkách přejdeme k podrobnějšímu zkoumání vlastností rovinných vln v nevodivém prostředí. Vzdálenost rovinné vlnoplochy od počátku v čase $t = 0$ označíme ζ , tj.

$$\zeta \equiv \boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}. \quad \text{VII(4.11)}$$

Prostorové proměnné ve všech bodech roviny závisí pouze na ζ , takže pro operátory ∇ , ∇^2 lze psát

$$\nabla = \kappa \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}. \quad \text{VII(4.12)}$$

Soustavu Maxwellových rovnic (při $\rho=0$, $\mathbf{j}=0$) pak bude pro $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\zeta, t)$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\zeta, t)$, $\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}(\zeta, t)$, $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\zeta, t)$ znít

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \kappa \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \zeta} = 0, \quad \text{VII(4.13)}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \kappa \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \zeta} = 0, \quad \text{VII(4.14)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \left[\kappa, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} \right] = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{VII(4.15)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \left[\kappa, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \zeta} \right] = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad \text{VII(4.16)}$$

Kvůli lepší referenci a přehledu je každá rovnice uvedena paralelně s odpovídající modifikací pro rovinnou vlnu.

Po skalárním vynásobení rovnice VII(4.16) vektorem κ dostaneme

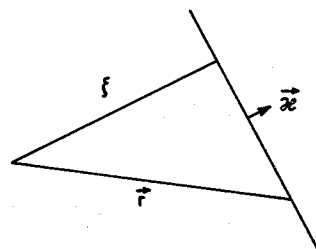
$$\kappa \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = 0. \quad \text{VII(4.17)}$$

Obdobná úprava rovnice VII(4.15) vede ke vztahu

$$\kappa \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad \text{VII(4.18)}$$

Z rovnic VII(4.13) a VII(4.17) je vidět, že podélné komponenty vektoru \mathbf{D} (tj. komponenty kolmé k dané rovině) nezávisí ani na ζ , ani na čase t . Jediným podélným řešením je tedy homogenní elektrostatické pole $\mathbf{D} = \text{konst}$, resp. $\mathbf{E} = \text{konst}$.

Obdobně z rovnic VII(4.14) a VII(4.18) lze usoudit, že jediným podélným řešením může být homogenní magnetostatické pole $\mathbf{B} = \text{konst}$.



Obr. VII.1.

Každé nestatické řešení vyhovující Maxwellovým rovnicím VII(4.13) až VII(4.16) sestává pouze z příčných (transverzálních) komponent, tj. vektory \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} jsou rovnoběžné s rovinou zobrazenou na obr. VII.1. To jsou výsledky platné při libovolné časové závislosti vlny. Důležitým speciálním případem monochromatické vlny se budeme zabývat v následujícím článku.

VII.5 Rovinná monochromatická vlna v dielektriku

Pomocí vztahu VII(4.14) přepíšeme třírozměrnou vlnovou rovnici VII(4.5) na jednorozměrný případ typu VII(4.1), tj.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad \text{VII(5.1)}$$

Doposud libovolnou časovou závislost zvolíme v harmonickém tvaru

$$\psi(\zeta, t) = \chi(\zeta) e^{-i\omega t},$$

což vede k rovnici

$$\frac{d^2 \chi}{d\zeta^2} + k^2 \chi = 0 \quad \text{VII(5.2)}$$

kde

$$k = \frac{\omega}{w} = \frac{N\omega}{c}. \quad \text{VII(5.3)}$$

Rovnice VII(5.2) má řešení $\exp(\pm i k \zeta)$; zvolíme-li kladné znaménko, pak

$$\psi(\zeta, t) = \psi_0 e^{i(k\zeta - \omega t)}, \quad \text{VII(5.4)}$$

resp.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_0 e^{i(kr - \omega t)}, \quad \text{VII(5.5)}$$

kde

$$\mathbf{k} = k\kappa = \frac{\omega}{w} \kappa \quad \text{VII(5.6)}$$

je vlnový vektor. Absolutní hodnota $k = |\mathbf{k}|$ se s ohledem na VII(5.12) nazývá vlnočtem: představuje 2π násobek počtu vlnových délek na jednotkové délce.

Řešení rovnice VII(2.1) ve tvaru rovinných monochromatických vln tedy zní

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(k\zeta - \omega t)}, \quad \text{VII(5.7)}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(k\zeta - \omega t)}, \quad \text{VII(5.8)}$$

resp.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kr - \omega t)}, \quad \text{VII(5.9)}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(kr - \omega t)}. \quad \text{VII(5.10)}$$

Časová závislost vlny je určena veličinou $\omega = kw = kc/N$. Stejně hodnoty polí \mathbf{E} , \mathbf{B} se (v daném bodě) s časem opakují s periodou

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{kw} = \frac{2\pi N}{ck}. \quad \text{VII(5.11)}$$

Prostorové opakování stejných hodnot polí \mathbf{E} , \mathbf{B} (v daném čase) se děje s periodou (vlnovou délkou)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{N\omega} = \frac{c}{N\nu}, \quad \text{VII(5.12)}$$

kde $\nu = 1/T$ je lineární frekvence vlny. Prostorová a časová perioda jsou tak spojeny známým jednoduchým vztahem

$$\lambda = wT. \quad \text{VII(5.13)}$$

Jelikož N závisí na frekvenci, obrácením rovnice VII(5.3) získáme závislost frekvence na vlnočetu — *disperzní vztah*

$$\omega \equiv \omega(k). \quad \text{VII(5.14)}$$

Po dosazení VII(5.7) a VII(5.8) do VII(4.13) a VII(4.14) dostaneme kolmost vektorů \mathbf{E} , \mathbf{B} k vlnovému vektoru

$$\boldsymbol{\kappa} \mathbf{E} = 0, \quad \boldsymbol{\kappa} \mathbf{B} = 0. \quad \text{VII(5.15)}$$

Vlnové rovnice VII(2.1) jsme získali zvýšením řádu derivací (operací rot) Maxwellových rovnic, proto vlnové rovnice obsahují ve srovnání s Maxwellovými rovnicemi přebytná řešení. To je *cena za separaci rovnic* pro vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} . Vztah mezi vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} najdeme tak, že řešení VII(5.7) a VII(5.8) dosadíme do VII(4.15). Po elementární úpravě dostaneme $ik[\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}] = ikw\mathbf{B}$, tj.

$$\mathbf{B} = \frac{1}{w} [\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}] = (\varepsilon\mu)^{1/2} [\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}]. \quad \text{VII(5.16)}$$

V rovinné elektromagnetické vlně jsou vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} kolmé k vlnovému vektoru i k sobě navzájem, a to tak, že tři vektory $\boldsymbol{\kappa}$, \mathbf{E} , \mathbf{B} tvoří pravotočivý kartézský systém.

Poyntingův vektor \mathbf{S} rovinné elektromagnetické vlny (v homogenním izotropním dielektriku) upravíme pomocí VII(5.16)

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{1}{\mu} [\mathbf{E}, \mathbf{B}] = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} [\mathbf{E} \times [\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}]].$$

Po úpravě dvojitého vektorového součinu $\mathbf{E} \times [\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}] = E^2\boldsymbol{\kappa} - (\boldsymbol{\kappa}\mathbf{E})\mathbf{E}$ užijeme VII(5.15), takže je

$$\mathbf{S} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} E^2\boldsymbol{\kappa} = (\varepsilon\mu)^{-1/2} (\mathbf{E}\mathbf{D})\boldsymbol{\kappa}, \quad \text{VII(5.17)}$$

resp.

$$\mathbf{S} = (\varepsilon\mu)^{-1/2} \boldsymbol{\kappa} \frac{B^2}{\mu} = (\varepsilon\mu)^{-1/2} (\mathbf{H}\mathbf{B})\boldsymbol{\kappa}. \quad \text{VII(5.18)}$$

Poyntingův a vlnový vektor mají souhlasný směr a směr vlnového vektoru je totožný se směrem toku energie (rovinné monochromatické vlny v homogenním izotropním dielektriku).

Zavedeme-li hustotu elektromagnetické energie

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B})$$

a \mathbf{S} vyjádříme jako poloviční součet výrazů VII(5.17) a VII(5.18), získáme pro \mathbf{S} vyjádření

$$\mathbf{S} = uw\boldsymbol{\kappa} \equiv u\mathbf{w}, \quad (\mathbf{w} = w\boldsymbol{\kappa}). \quad \text{VII(5.19)}$$

Vektor proudové hustoty energie má tak názorný význam jako součin hustoty energie a rychlosti šíření.

Při časově proměnných polích je často potřebné znát časově střední hodnotu veličin, tj. střední hodnoty veličin za dobu jedné periody.

Střední časová hodnota hustoty energie je definována rovnicí

$$\langle u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(r, t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} u(r, t) dt.$$

Ve výrazu vystoupí střední hodnota z $\cos^2(k\xi - \omega t) = \frac{1}{2}$, takže s ohledem na VII(5.16) je

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon |\mathbf{E}_0|^2 = \frac{1}{2\mu} |\mathbf{B}_0|^2. \quad \text{VII(5.20)}$$

Elektrické a magnetické pole tedy dávají stejný příspěvek k střední hodnotě hustoty elektromagnetické energie. Střední hodnota hustoty energetického toku je podle VII(5.9) rovna

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle u \rangle w\boldsymbol{\kappa}. \quad \text{VII(5.21)}$$

Poznamenejme ještě, že rovnice VII(5.20) a VII(5.21) lze získat bezprostřední aplikací vztahu V(4.27).

Ve vakuu je $w = c$, $\mathbf{S} = uc\boldsymbol{\kappa}$ a hustota hybnosti je ve shodě se VI(2.15) dána vztahem

$$\mathbf{g} = \frac{u}{c} \boldsymbol{\kappa}. \quad \text{VII(5.22)}$$

Mezi energií $U = \int u dV$ a hybností $\mathbf{G} = \int \mathbf{g} dV$ rovinné monochromatické vlny tedy platí vztah

$$U = c\mathbf{G}. \quad \text{VII(5.23)}$$

Pro relativistickou částici s klidovou hmotností m_0 je hybnost $p = m_0 v (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ a energie $\mathcal{E} = m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, odkud plyne $\mathcal{E}^2 = (m_0 c^2)^2 + c^2 p^2$. Pro částice s klidovou hmotností $m_0 = 0$ je $\mathcal{E} = cp$. V monochromatické rovinné elektromagnetické vlně je tedy vztah mezi energií a hybností stejný jako u částic s nulovou klidovou hmotností. V čl. X.7 tuto analogii mezi elektromagnetickým polem a soustavou částic dále rozvineme a dáme jí velice elegantní formu.

Poznámka: V homogenním a izotropním prostředí je frekvence ω funkcí pouze absolutní hodnoty $k \equiv |\mathbf{k}|$. Vektor grupové rychlosti (viz čl. VII.7)

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad W_i = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} \quad \text{VII(5.24)}$$

upravíme pomocí vztahu $(\partial \omega / \partial k_i) = (\partial \omega / \partial k) (\partial k / \partial k_i)$. Jelikož $k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$, je $(\partial k / \partial k_i) = (k_i / k)$, a tudíž

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \boldsymbol{\kappa}. \quad \text{VII(5.25)}$$

V izotropním prostředí jsou vektory grupové rychlosti vlnového vektoru a Poyntingova vektoru *paralelní*.

VII.6 Polarizace elektromagnetické vlny.

Tenzor polarizace

Všimněme si podrobnější otázky směru pole rovinné elektromagnetické vlny. Vektory \mathbf{E}_0 , \mathbf{B}_0 vystupující v komplexní notaci

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(k\zeta - \omega t)}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 e^{i(k\zeta - \omega t)}$$

jsou obecně *komplexními* vektory.

Kvadrát \mathbf{E}_0^2 (a obdobně \mathbf{B}_0^2) bude tedy obecně opět komplexním číslem. Je-li argument tohoto komplexního čísla roven -2α , tj. je-li $\mathbf{E}_0^2 = |\mathbf{E}_0|^2 \exp(-2i\alpha)$, pak vektor \mathcal{E} definovaný vztahem

$$\mathbf{E}_0 = \mathcal{E} e^{-i\alpha} \quad \text{VII(6.1)}$$

bude mít reálný kvadrát

$$\mathcal{E}^2 = |\mathbf{E}_0|^2. \quad \text{VII(6.2)}$$

Zapišeme proto explicitně

$$\mathbf{E} = \text{Re} \{ \mathcal{E} e^{i(k\zeta - \omega t - \alpha)} \} \quad \text{VII(6.3)}$$

a zavedeme *reálné* vektory \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 vztahem

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + i \mathcal{E}_2. \quad \text{VII(6.4)}$$

Jelikož $\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}_1^2 + \mathcal{E}_2^2 + 2i \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2$ má být reálným číslem, vektory \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 musí být navzájem kolmé

$$\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 = 0 \quad \text{VII(6.5)}$$

i kolmé ke směru šíření

$$\boldsymbol{\kappa} \mathcal{E}_1 = \boldsymbol{\kappa} \mathcal{E}_2 = 0. \quad \text{VII(6.6)}$$

Ze vztahů VII(6.3) a VII(6.4) získáme vyjádření

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}_1 \cos(k\zeta - \omega t - \alpha) - \mathcal{E}_2 \sin(k\zeta - \omega t - \alpha) \quad \text{VII(6.7)}$$

a pak pomocí VII(5.16) obdobný vztah pro vektor \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \mathbf{b}_1 \cos(k\zeta - \omega t - \alpha) - \mathbf{b}_2 \sin(k\zeta - \omega t - \alpha), \quad \text{VII(6.8)}$$

kde

$$\mathbf{b}_1 = (\epsilon\mu)^{1/2} [\boldsymbol{\kappa}, \mathcal{E}_1], \quad \mathbf{b}_2 = (\epsilon\mu)^{1/2} [\boldsymbol{\kappa}, \mathcal{E}_2]. \quad \text{VII(6.9)}$$

Vektory \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , $\boldsymbol{\kappa}$ tvoří pravotočivou ortogonální bázi.

Promítneme VII(6.7) do směru \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 a dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \mathcal{E}_1 \cos(k\zeta - \omega t - \alpha), \\ \mathbf{E}_2 &= -\mathcal{E}_2 \sin(k\zeta - \omega t - \alpha). \end{aligned} \quad \text{VII(6.10)}$$

Odtud plyne, že v každém bodě a v každém čase vektor \mathbf{E} vyhovuje rovnici $(\mathcal{E}_1 = |\mathcal{E}_1|, \mathcal{E}_2 = |\mathcal{E}_2|)$

$$\frac{E_1^2}{\mathcal{E}_1^2} + \frac{E_2^2}{\mathcal{E}_2^2} = 1. \quad \text{VII(6.11)}$$

Vektor \mathbf{E} tedy rotuje v rovině kolmé ke směru šíření vlny, přičemž jeho konec opisuje elipsu. Taková vlna se nazývá *elipticky polarizovanou vlnou*.

Je-li $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$, pak vektor \mathbf{E} opisuje kružnici konstantního poloměru, v tom případě mluvíme o *kruhově polarizované vlně*.

Nakonec, je-li jedna z veličin \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 rovna nule, pak pole vlny je vždy a ve všech místech *paralelní* (resp. *antiparalelní*) jednou směru, což odpovídá *lineárně polarizované vlně*.

Nepolarizované vlně odpovídá úplná ekvivalentnost všech směrů v rovině kolmé ke směru šíření $\boldsymbol{\kappa}$.

V řadě případů (zejména v optické oblasti) máme do činění se zářením řady nezávislých zdrojů. Takové vlny nebudou přesně monochromatické a budou pouze částečně polarizované.

Je-li fázový rozdíl vln emitovaných různými zdroji *stálý*, mluvíme o *koherentním* záření, při *chaotickém* rozdělení fázových rozdílů mluvíme o *nekoherentním* záření.

Případy monochromatických vln úplně nebo částečně polarizovaných můžeme jednotně popsat pomocí *tenzoru polarizace*.

Intenzitu záření budeme charakterizovat tenzorem

$$I_{ik} = \langle E_{0i} E_{0k}^* \rangle, \quad \text{VII(6.12)}$$

kde symbol $\langle \rangle$ označuje jak středování podle času, tak i středování přes soubor nezávislých zdrojů (statistické středování). Indexy $i, k = 1, 2$ charakterizují dva základní směry v rovině (x, y) kolmé k vektoru \mathbf{k} .

Tenzor I_{ik} je evidentně hermiteovský (samosdružený), tj.

$$I_{ik} = I_{ki}^*. \quad \text{VII(6.13)}$$

Tento tenzor má pouze reálné vlastní hodnoty. Celkovou intenzitu I vyjádříme vztahem

$$I = I_{11} + I_{22} = \langle E_0 E_0^* \rangle. \quad \text{VII(6.14)}$$

Abychom vyloučili tuto veličinu, zavedeme tenzor polarizace

$$Q_{ik} = \frac{I_{ik}}{I} = Q_{ki}^*. \quad \text{VII(6.15)}$$

Tento tenzor je hermiteovský, jeho diagonální komponenty Q_{11} a Q_{22} jsou reálné, přičemž $Q_{11} + Q_{22} = 1$. Odtud plyne, že tenzor Q_{ik} se dá vyjádřit pomocí tří reálných parametrů. Dříve než přejdeme k tomuto obecnému vyjádření, všimněme si dvou speciálních případů.

Při úplné polarizaci je $E_0 = \text{konst}$, takže znak středování v VII(6.12) lze vynechat

$$I_{ik} = E_{0i} E_{0k}^*. \quad \text{VII(6.16)}$$

Komponenty tenzoru I_{ik} se tedy dají vyjádřit pomocí součinů komponent konstantního vektoru. V tom případě je determinant z komponent Q_{ik} roven nule

$$\det(Q_{ik}) \equiv Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21} = 0. \quad \text{VII(6.17)}$$

V případě nepolarizovaného neboli přirozeného světla (vlnění) jsou všechny směry v rovině (x, y) zcela ekvivalentní, proto $Q_{ik} = C\delta_{ik}$. S ohledem na normovací podmínku $Q_{11} + Q_{22} = 1$ musí být

$$Q_{ik} = \frac{1}{2} \delta_{ik}, \quad \text{VII(6.18)}$$

a tudíž

$$\det(Q_{ik}) = \frac{1}{4}.$$

V případě libovolné polarizace je $0 \leq \det(Q_{ik}) \leq \frac{1}{4}$; místo toho zavedeme stupeň polarizace P vztahem

$$P^2 = 1 - 4 \det(Q_{ik}). \quad \text{VII(6.19)}$$

Stupeň polarizace je v intervalu

$$0 \leq P \leq 1. \quad \text{VII(6.20)}$$

V obecném případě můžeme tenzor Q_{ik} vyjádřit pomocí dvou vzájemně kolmých komplexních vektorů $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}$ normovaných vztahem

$$\mathbf{e}^{(i)} \mathbf{e}^{(k)*} = \delta_{ik}. \quad \text{VII(6.21)}$$

Hlavní hodnoty λ_1, λ_2 jsou řešením rovnic

$$Q_{ik} e_k = \lambda e_i, \quad \text{VII(6.22')}$$

tj.

$$\det(Q_{ik} - \lambda \delta_{ik}) = 0. \quad \text{VII(6.23)}$$

Hledaný rozvoj se dá vyjádřit rovnicí

$$Q_{ik} = \lambda_1 e_i^{(1)} e_k^{(1)*} + \lambda_2 e_i^{(2)} e_k^{(2)*}. \quad \text{VII(6.23)}$$

Snadno se přesvědčíme, že $Q_{ik} e_k^{(1)} = \lambda_1 e_i^{(1)}$, $Q_{ik} e_k^{(2)} = \lambda_2 e_i^{(2)}$ ve shodě s VII(6.22).

Tenzor Q_{ik} má komponenty Q_{11} a Q_{22} reálné a nezáporné, přičemž $Q_{11} + Q_{22} = 1$. Tomu vyhovíme volbou $Q_{11} = \frac{1}{2}(1 + \xi_3)$, $Q_{22} = \frac{1}{2}(1 - \xi_3)$. Jelikož $Q_{21} = Q_{12}^* = \frac{1}{2}(\xi_1 + i\xi_2)$, vyjádříme Q_{ik} ve formě matice

$$Q_{ik} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1 - \xi_3 \end{pmatrix}. \quad \text{VII(6.24)}$$

Reálná čísla ξ_i ležící v intervalu $(-1, +1)$ se nazývají Stokesovými parametry.

Hermiteovskou matici VII(6.24) můžeme očividným způsobem vyjádřit jako lineární kombinaci čtyř hermiteovských matic

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{VII(6.25)}$$

Tento rozvoj má tvar

$$Q = \frac{1}{2}(1 + \xi_1 \sigma_1 + \xi_2 \sigma_2 + \xi_3 \sigma_3). \quad \text{VII(6.26)}$$

Matice $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ jsou stejné jako známé Pauliovy matice při popisu poločíselného spinu v kvantové mechanice. Můžeme dále zavést vektor ξ o složkách ξ_1, ξ_2, ξ_3 a „maticový vektor“ σ o složkách $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, čímž VII(6.26) zapíšeme ve tvaru

$$Q = \frac{1}{2}(1 + \xi \sigma). \quad \text{VII(6.27)}$$

Použijeme-li v VII(6.19) vyjádření (6.24), získáme pro stupeň polarizace jednoduchý vztah

$$P^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \equiv \xi^2. \quad \text{VII(6.28)}$$

Nepolarizovanému světlu odpovídá $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, případ $\xi_1 = \xi_2 = 0, \xi_3 = \pm 1$ odpovídá úplné lineární polarizaci podél osy 1, resp. 2. Parametr ξ_1 charakterizuje lineární polarizace ve směrech svírajících s osou 1 úhel $\pi/4$, parametrem ξ_2 se charakterizuje kruhová polarizace.

VII.7 Vlnový svazek. Grupová rychlost

Doposud jsme se zabývali rovinnou monochromatickou vlnou charakterizovanou vlnovým vektorem \mathbf{k} a frekvencí ω . Reálné vlny jsou však zpravidla superpozicí takových vln v určitém vlnovém pásmu. Rovinná monochromatická vlna je obecně nenulová v celém prostoru a ve všech časech. Většinou se však setkáváme s případem, kdy vlny jsou lokalizovány v určité části prostoru, popř. mají jistou konečnou dobu trvání. Takové vlny můžeme vyjádřit jako superpozici rovinných monochromatických vln.

Pro jednoduchost zápisu budeme uvažovat jednorozměrný případ vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$

Partikulární řešení této rovnice vezmeme ve tvaru $\exp[i(kx - \omega t)]$, kde $k = \omega/w$. Jelikož $w \equiv w(\omega)$, bude disperze

$$\omega \equiv \omega(k). \quad \text{VII(7.1)}$$

S ohledem na linearitu vlnové rovnice zapíšeme její řešení ve tvaru

$$\psi(x, t) = \int a(k) e^{i(kx - \omega t)} dk. \quad \text{VII(7.2)}$$

Jsou-li zadány amplitudy $a(k)$ individuálních monochromatických rovinných vln, pak při dané disperzi $\omega \equiv \omega(k)$ se výpočet ψ redukuje na integraci. Pro konkrétnost budeme předpokládat, že vlna ψ je superpozicí vln, jejichž vlnočty leží v úzkém intervalu

$$k_0 - \Delta k \leq k \leq k_0 + \Delta k \quad \text{VII(7.3)}$$

a že amplitudy $a(k)$ se v daném intervalu jen nepatrně mění, popř. jsou konstantní, takže lze položit

$$a(k) = a(k_0). \quad \text{VII(7.4)}$$

V takovém případě se jedná o výpočet integrálu

$$\psi(x, t) = a(k_0) \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} \exp[i(kx - \omega t)] dk. \quad \text{VII(7.5)}$$

Při nepřilíh silné závislosti $\omega(k)$ lze položit

$$\omega(k) \approx \omega_0 + (\partial \omega / \partial k)_0 (k - k_0).$$

Pro derivaci $(\partial \omega / \partial k)_0$ zavedeme označení (index nula vynecháme)

$$W \equiv W(k) \equiv \frac{\partial \omega}{\partial k}. \quad \text{VII(7.6)}$$

Argument v integrandu VII(7.5) upravíme

$$kx - \omega t = k_0 x - \omega_0 t + (k - k_0)(x - Wt).$$

Vzniklý integrál $\int \exp[i(k - k_0)(x - Wt)] dk$ se vypočte elementárně. Po provedení jednoduchých výpočtů dospějeme k rovnici

$$\psi(x, t) = A(x, t) \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)], \quad \text{VII(7.7)}$$

kde výsledná amplituda vlnového svazku

$$A(x, t) \equiv A(x - Wt) = 2a(k_0) \frac{\sin[(x - Wt) \Delta k]}{x - Wt}. \quad \text{VII(7.8)}$$

Výsledkem superpozice VII(7.5) je tedy rovinná monochromatická vlna $\exp[i(k_0 x - \omega_0 t)]$ s amplitudou $A(x, t)$ závislou na souřadnicích a na čase prostřednictvím argumentu $x - Wt$.

Místa stejné amplitudy svazku (grupy) vln odpovídají stejným hodnotám argumentu $x - Wt = x_0 - Wt_0$. Místa x stejné amplitudy se tedy v prostoru šíří rychlostí $W = (\partial \omega / \partial k)$, proto se W nazývá *grupovou rychlostí*. (Užívá se též názvu skupinová nebo svazková rychlost.)

Amplituda $A(x, t)$ je maximální při $x - Wt = 0$. Argument $|x - Wt|$ se dá přepsat jako Δx , tj.

$$|x - Wt| = |x - x_{\max}| \equiv \Delta x. \quad \text{VII(7.9)}$$

Poněvadž maxima $|A(x, t)|$ jsou klesající funkcí argumentu $x - Wt$, amplituda $A(x, t)$ bude (v daném čase) prakticky nenulová pouze v prostorové oblasti Δx , pro niž platí

$$\Delta x \cdot \Delta k \approx 1. \quad \text{VII(7.10)}$$

Čím bude pásmo Δk širší, tím bude prostorová lokalizace vlny přesnější, a naopak s klesající šířkou pásma roste prostorová rozlehlost vlnového signálu.

Vztah mezi fázovou (w) a grupovou (W) rychlostí vln najdeme derivováním vztahu $ck = \omega N(\omega)$ podle ω . Výsledkem je vztah

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{w} + \frac{\omega}{c} \frac{dN}{d\omega}. \quad \text{VII(7.11)}$$

Index lomu je neklesající funkcí frekvence $(dN/d\omega) \geq 0$ (viz př. VIII.14), proto je

$$W \leq w. \quad \text{VII(7.12)}$$

V prostředí bez disperze jsou obě rychlosti stejné.

Podobným způsobem můžeme studovat i časovou závislost vlny v závislosti na šířce spektrálního pásma $\Delta \omega$. Rovinná monochromatická vlna má všude stejnou amplitudu. V obecném případě je však amplituda funkcí času. (Prostorovou

závislost zde nebudeme vypisovat.) Je-li ω_0 střední frekvence, pak vlnu zapíšeme ve tvaru $\psi_0(t) \exp(-i\omega_0 t) \equiv f(t)$. Tuto funkci rozložíme pomocí Fourierova integrálu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int f_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad \text{VII(7.13)}$$

z něhož plynou pro Fourierovy komponenty f_ω vyjádření

$$f_\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt. \quad \text{VII(7.14)}$$

Kdyby bylo $\psi_0(t)$ konstantní ve všech časech, pak by bylo $f_\omega = 0$ při všech $\omega \neq \omega_0$, jelikož $\exp[i(\omega - \omega_0)t]$ je periodickou funkcí, jejíž střední hodnota je rovna nule. Má-li být $f_\omega \neq 0$, je třeba, aby se $\psi_0(t)$ zřetelně měnilo na časovém intervalu Δt řádově $1/|\omega - \omega_0|$. Postupem stejným jako při odvozování VII(7.10) dospějeme k relaci mezi šířkou spektra $\Delta\omega \equiv |\omega - \omega_0|$ a dobou Δt , během níž se amplituda vlny (v daném místě) zřetelně mění.

Tento vztah zní

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 1. \quad \text{VII(7.15)}$$

VII.8 Sférická a cylindrická vlna

Při analýze řešení vlnové rovnice VII(4.5) jsme užívali kartézských souřadnic. Často je výhodné přejít (v závislosti na symetrii problému) k jiným souřadnicím. Vysvětlíme příslušný postup v případě sférických souřadnic r, ϑ, φ , v nichž

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

Budeme se zabývat případem, kdy řešení $\psi(r, \vartheta, \varphi, t)$ nezávisí na sférických úhlech ϑ, φ , tj.

$$\psi \equiv R(r, t). \quad \text{VII(8.1)}$$

Po dosazení do VII(4.5) dostaneme pro $R(r, t)$ rovnici

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right] - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} = 0, \quad \text{VII(8.2)}$$

kteřou lze substitucí

$$R(r, t) = \frac{1}{r} \chi(r, t) \quad \text{VII(8.3)}$$

převést na tvar

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0. \quad \text{VII(8.4)}$$

To je vlnová rovnice pro jednorozměrný případ typu VII(4.1), proto řešení VII(8.4) je

$$\chi(r, t) = f(r - wt) + g(r + wt),$$

a tudíž

$$R(r, t) = \frac{1}{r} [f(r - wt) + g(r + wt)]. \quad \text{VII(8.5)}$$

Další postup je podobný jako v případě rovinné vlny, proto provedeme výklad pouze velmi stručně. Pro harmonickou závislost

$$f(r - wt) = R_0 e^{ik(r-wt)} = R_0 e^{i(kr - \omega t)}$$

bude (klademe $g \equiv 0$)

$$R(r, t) = \frac{R_0}{r} e^{i(kr - \omega t)}. \quad \text{VII(8.6)}$$

Místa stejné fáze jsou koncentrické koule, jejichž poloměr roste s rychlostí $w = \omega/k$. Amplituda této sférické vlny je nepřímo úměrná vzdálenosti r , takže $|R|^2$ je nepřímo úměrné povrchu koule.

V případě obecnějších závislostí než VII(8.1) je třeba položit

$$\psi(r, \vartheta, \varphi, t) = R(r, t) Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad \text{VII(8.7)}$$

kde Y_{lm} jsou sférické funkce (viz dodatek V). Postup je v principu stejný, i když poněkud komplikovanější. S některými zvláštnostmi se seznámíme na jiných místech.

Zde si všimneme monochromatické sférické vlny, kterou vyjádříme závislostí

$$\psi(r, \vartheta, \varphi, t) = R(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad \text{VII(8.8)}$$

Po dosazení tohoto vyjádření do vlnové rovnice VII(4.5) dostaneme pro radiální funkci $R(r)$ rovnici

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1)R \right] + k^2 R = 0. \quad \text{VII(8.9)}$$

Při úpravách jsme užili vztahu (viz dodatek V)

$$\left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + l(l+1) \right] Y_{lm} = 0.$$

Substitucí

$$R(r) = r^{-1/2} u(r) \quad \text{VII(8.10)}$$

převědeme VII(8.9) na Besselovu rovnici (viz dodatek VI)

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left[k^2 - \frac{(l + \frac{1}{2})^2}{r^2} \right] u(r) = 0, \quad \text{VII(8.11)}$$

jejímž řešením je cylindrická funkce $Z_{l+(1/2)}(kr)$, tj.

$$u(r) = CZ_{l+(1/2)}(kr).$$

Volba této cylindrické funkce závisí na okrajových podmínkách dané úlohy. Z důvodů, které budou zřejmé z dalšího výkladu, zvolíme Hankelovu funkci $H_{l+(1/2)}^{(1)}$, takže bude

$$\psi(r, \vartheta, \varphi, t) = C(kr)^{-1/2} H_{l+(1/2)}^{(1)}(kr) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) e^{-i\omega t}. \quad \text{VII(8.12)}$$

Pro $kr \gg 1$, tj. $r \gg \lambda$, lze užít asymptotického rozvoje (viz dodatek VI)

$$H_p^{(1)}(z) \cong \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{1/2} \exp \left[i \left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2} \right) \right],$$

což dá

$$\psi(r, \vartheta, \varphi, t) \cong C(kr)^{-1} e^{i(kr - \omega t)} Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad \text{VII(8.13)}$$

Asymptotické řešení představuje rozbíhavou sférickou vlnu. To byl důvod pro volbu Hankelovy funkce v řešení VII(8.11). Úhlové rozdělení pole je určeno sférickými funkcemi $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$, úhlové rozdělení intenzity $|\psi|^2$ bude dáno faktorem $|Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2$.

Zdroji elektromagnetického pole jsou zpravidla elektrické proudy tekoucí ve vodičích kruhového průřezu. V takovém případě je výhodné přejít k cylindrickým souřadnicím r, φ, z , v nichž Laplaceův operátor je

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Budeme předpokládat, že řešení vlnové rovnice má osovou symetrii, tj. nezávisí na φ . Pro monochromatickou vlnu položíme

$$\psi(r, \varphi, z, t) = Q(r, z) e^{-i\omega t}. \quad \text{VII(8.14)}$$

Z vlnové rovnice VII(4.5) pak plyne

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + k^2 Q = 0.$$

Řešení této rovnice budeme hledat metodou separace proměnných, tj. položíme

$$Q(r, z) = v(r)u(z).$$

Po jednoduchých úpravách dospějeme k rovnici

$$\frac{1}{v} \frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{rv} \frac{dv}{dr} + k^2 = -\frac{1}{u} \frac{d^2u}{dz^2}.$$

Levá strana závisí pouze na r , pravá pouze na z , proto obě strany musí být rovny stejné konstantě. Označíme-li tuto konstantu q^2 , pak máme rovnici

$$\frac{d^2u}{dz^2} + q^2 u = 0, \quad \text{VII(8.15)}$$

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} + p^2 v = 0, \quad \text{VII(8.16)}$$

kde

$$p^2 = k^2 - q^2. \quad \text{VII(8.17)}$$

Rovnice VII(8.15) má partikulární řešení $\exp(\pm i q z)$. Řešením rovnice VII(8.16) jsou cylindrické funkce nultého řádu $Z_0(pr)$, tj.

$$v(r) = CZ_0(pr).$$

Monochromatickou cylindrickou vlnu lze reprezentovat závislostí

$$\psi(r, z, t) = CZ_0(pr) e^{i(qz - \omega t)}. \quad \text{VII(8.18)}$$

Zvolíme-li $Z_0(pr) = H_0^{(1)}(pr)$, pak pro $|pr| \gg 1$ bude

$$\psi(r, z, t) = C(pr)^{-1/2} e^{i(pr + qz - \omega t)}. \quad \text{VII(8.19)}$$

Šíření elektromagnetických vln

VIII.1 Odraz a lom na dielektrickém rozhraní. Fresnelovy vzorce

Dopadající vlna se na rozhraní částečně odráží a částečně proniká do druhého prostředí. Z hraničních podmínek pro vektory *elektromagnetického pole* na rozhraní dostaneme známé *optické zákony* pro odraz a lom. Tím se získá silný argument ve prospěch *elektromagnetické* teorie světla.

Nejdříve se budeme zabývat elektromagnetickou vlnou dopadající z dielektrického prostředí (ϵ_1, μ_1, w_1) na rovinné, rovněž dielektrické rozhraní (ϵ_2, μ_2, w_2).

Obě prostředí budeme pokládat za homogenní, izotropní, nevodivé a bez volných nábojů. Jak víme z předešlé kapitoly, soustavě Maxwellových rovnic

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{VIII(1.1)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \text{VIII(1.2)}$$

vyhovují řešení ve tvaru rovinných monochromatických vln

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad \text{VIII(1.3)}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu_1} [\mathbf{k}, \mathbf{E}]. \quad \text{VIII(1.4)}$$

Odraženou vlnu popíšeme vektory \mathbf{E}' , \mathbf{H}' , \mathbf{k}' a frekvencí ω' , takže

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 \exp [i(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega' t)], \quad \text{VIII(1.3')}$$

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{\omega'\mu_1} [\mathbf{k}', \mathbf{E}']. \quad \text{VIII(1.4')}$$

Ve druhém prostředí (vlna lomená) bude

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 \exp [i(\mathbf{k}''\mathbf{r} - \omega'' t)], \quad \text{VIII(1.3'')}$$

$$\mathbf{H}'' = \frac{1}{\omega''\mu_2} [\mathbf{k}'', \mathbf{E}'']. \quad \text{VIII(1.4'')}$$

Spojitosť tečných komponent vektoru \mathbf{E} a \mathbf{H} vyjadřují rovnice (viz čl. I.13)

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times [\mathbf{E} + \mathbf{E}'] &= \mathbf{n} \times \mathbf{E}'', \\ \mathbf{n} \times [\mathbf{H} + \mathbf{H}'] &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}''. \end{aligned} \quad \text{VIII(1.5)}$$

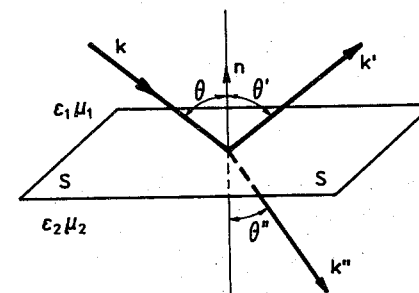
Po dosazení za \mathbf{E} , \mathbf{E}' , \mathbf{E}'' , \mathbf{H} , \mathbf{H}' , \mathbf{H}'' se přesvědčíme, že fázové faktory všech tří vln musí být na rozhraní stejné ve všech časech a ve všech místech rovinného rozhraní. Musí tedy platit

$$\omega' = \omega'' = \omega, \quad \text{VIII(1.6)}$$

$$\mathbf{k}'\mathbf{r} = \mathbf{k}''\mathbf{r} = \mathbf{k}\mathbf{r}. \quad \text{VIII(1.7)}$$

Rovnice VIII(1.6) vyjadřuje tu skutečnost, že odraz a lom na rozhraní probíhá *beze změny frekvence*.

Ze vztahů VIII(1.7) plyne, že všechny tři vlnové vektory \mathbf{k} , \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' leží v *jedné rovině* (jsou *komplanární*). Rovinu vytvořenou vektorem \mathbf{k} dopadající vlny a normálovým vektorem rozhraní nazýváme *rovinou dopadu*. Vektory \mathbf{k}' a \mathbf{k}'' tedy leží v rovině dopadu (viz obr. VIII.1).



Obr. VIII.1. Vlnové vektory při odrazu a lomu na rovinném rozhraní

Počátek souřadnicové soustavy položíme do roviny rozhraní, která je pak popsána rovnicí

$$nr = 0. \quad \text{VIII(1.8)}$$

Jednotkový vektor \mathbf{n} zvolíme v kladném směru osy z ; rovinné rozhraní je rovina (x, y) , tj. rovina

$$z = 0. \quad \text{VIII(1.8')}$$

Jelikož v prostředí 1 je $w'_1 = w_1$, je také $k = (\omega/w_1)$, $k' = (\omega'/w'_1) = (\omega/w_1)$, tj.

absolutní hodnoty vektorů \mathbf{k} a \mathbf{k}' jsou stejné

$$k' = k. \quad \text{VIII(1.9)}$$

Pro lomenou vlnu je $k'' = (\omega''/w_2) = (\omega/w_2) = (\omega/w_1)(w_1/w_2)$, tj.

$$\frac{k''}{k} = \frac{w_1}{w_2}. \quad \text{VIII(1.10)}$$

Zavedeme indexy lomu obou prostředí $N_1 = [\epsilon_1^{(r)} \mu_1^{(r)}]^{1/2}$, $N_2 = [\epsilon_2^{(r)} \mu_2^{(r)}]^{1/2}$, fázové rychlosti budou $w_1 = c/N_1$, $w_2 = c/N_2$. Rovnice VIII(1.10) pak bude

$$\frac{k''}{k} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{N_2}{N_1} \equiv N_{21}. \quad \text{VIII(1.10')}$$

Podíl fázových rychlostí elektromagnetické vlny v prostředí 1 a 2 je roven obrácenému poměru absolutních indexů lomu. Podíl N_2/N_1 je *relativní index lomu* obou prostředí. Z definice je zřejmé, že

$$N_{12}N_{21} = 1.$$

Zatím jsme využili pouze rovnost frekvencí VIII(1.6). Uvážíme-li volbu VIII(1.8'), pak z VIII(1.7) plynou vztahy

$$xk_x + yk_y = xk'_x + yk'_y = xk''_x + yk''_y.$$

Jelikož tyto podmínky musí platit v libovolném bodě (x, y) rozhraní, vyžaduje to rovnost koeficientů u stejných proměnných

$$k'_x = k''_x = k_x, \quad k'_y = k''_y = k_y. \quad \text{VIII(1.11)}$$

Tyto rovnice vyjadřují spojitost x -ových a y -ových komponent vektorů \mathbf{k} , \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' .

Rovina dopadu nechť je rovina (x, z) . Z podmínky $k'_x = k_x$ po dosazení $k'_x = k' \sin \vartheta'$, $k_x = k \sin \vartheta$ a uvážení podmínky VIII(1.9) plyne

$$\vartheta' = \vartheta. \quad \text{VIII(1.12)}$$

Odražena vlna leží v rovině dopadu, přičemž úhel odrazu je roven úhlu dopadu.

Ze vztahu $k''_x = k_x$ dostaneme obdobným postupem $k'' \sin \vartheta'' = k \sin \vartheta$, což s ohledem na VIII(1.10') dá *Snellův zákon lomu*

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin \vartheta''} = \frac{N_2}{N_1} \equiv N_{21}. \quad \text{VIII(1.13)}$$

Nyní najdeme vztah mezi z -ovými komponentami vektorů \mathbf{k} , \mathbf{k}' , \mathbf{k}'' . Jelikož $k'_x = k_x$, $k'_y = k_y$, $k' \equiv |\mathbf{k}'| = k \equiv |\mathbf{k}|$, absolutní hodnota z -ové složky se nemění. S ohledem na orientaci vektorů \mathbf{k} a \mathbf{k}' bude

$$k'_z = -k_z = -k \cos \vartheta = -N_1 \frac{\omega}{c} \cos \vartheta. \quad \text{VIII(1.14)}$$

Pro vlnu lomenou bude

$$k''_z = k'' \cos \vartheta'' = N_2 \frac{\omega}{c} \cos \vartheta''.$$

Úhel lomu ϑ'' vyloučíme pomocí Snellova zákona VIII(1.14), čímž získáme vztah

$$k''_z = N_1 \frac{\omega}{c} (N_{21}^2 - \sin^2 \vartheta)^{1/2}. \quad \text{VIII(1.15)}$$

Pro většinu průhledných prostředí je magnetická permeabilita μ jen nepatrně odlišná od permeability vakua μ_0 , proto lze položit

$$N = [\epsilon^{(r)} \mu^{(r)}]^{1/2} \cong [\epsilon^{(r)}]^{1/2}.$$

Porovnáním fázových faktorů v podmínkách VIII(1.5) jsme získali vztahy mezi frekvencemi vln a vztahy mezi úhly dopadu, odrazu a lomu. Nyní přejdeme ke vztahům mezi amplitudami těchto vln, což nám poskytne informace o intenzitě odražené a lomené vlny.

Budeme rozlišovat dva případy:

1. Elektrické pole \mathbf{E} je *kolmé k rovině dopadu*. V takovém případě jsou všechny elektrické vektory \mathbf{E} , \mathbf{E}' , \mathbf{E}'' rovnoběžné s rovinami rozhraní, takže platí (spojitost $E_y \equiv E$)

$$E_0 + E'_0 = E''_0. \quad \text{VIII(1.16)}$$

Spojitosť tečných komponent vektoru \mathbf{H} se redukuje na spojitost x -ových komponent. Z VIII(1.4) pak plyne

$$H_x = -\frac{1}{\omega \mu_1} k_z E_y.$$

Položíme-li $\mu_1 \cong \mu_2 \equiv \mu_0$, pak z podmínky plyne

$$k_z E_0 + k'_z E'_0 = k''_z E_0.$$

V odražené vlně je $k'_z = -k_z$, čímž máme druhou hraniční podmínku

$$k_z (E_0 - E'_0) = k_z E''_0. \quad \text{VIII(1.17)}$$

Řešením rovnic VIII(1.16) a VIII(1.17) získáme vztah mezi amplitudami

$$E'_0 = \frac{k_z - k''_z}{k_z + k''_z} E_0, \quad \text{VIII(1.18)}$$

$$E''_0 = \frac{2k_z}{k_z + k''_z} E_0. \quad \text{VIII(1.19)}$$

Dosadíme $k_z = (N_1 \omega / c) \cos \vartheta$, $k''_z = (N_2 \omega / c) \cos \vartheta''$ a po jednoduché úpravě, při níž

užijeme Snellova zákona, dostaneme

$$E'_0 = \frac{\sin(\vartheta'' - \vartheta)}{\sin(\vartheta'' + \vartheta)} E_0, \quad \text{VIII(1.20)}$$

$$E''_0 = \frac{2 \cos \vartheta \sin \vartheta''}{\sin(\vartheta'' + \vartheta)} E_0. \quad \text{VIII(1.21)}$$

Koeficient odrazu R představuje podíl časově středního odraženého energetického toku a časově středního toku dopadající energie. V daném případě (pole \mathbf{E} kolmé na rovinu dopadu) označíme tento koeficient R_\perp ; z VIII(1.20) plyne

$$R_\perp = \left| \frac{E'_0}{E_0} \right|^2 = \frac{\sin^2(\vartheta'' - \vartheta)}{\sin^2(\vartheta'' + \vartheta)}. \quad \text{VIII(1.22)}$$

2. Elektrické pole \mathbf{E} leží v rovině dopadu. V tomto případě je výhodné provést výpočet magnetického pole \mathbf{H} , jež leží v rovině kolmé k rovině dopadu, tj. \mathbf{H} je paralelní s rovinou rozhraní. Obdobný výpočet jako v prvním případě nám poskytne vztahy

$$H'_0 = \frac{N_2^2 k_z - N_1^2 k'_z}{N_2^2 k_z + N_1^2 k'_z} H_0, \quad \text{VIII(1.23)}$$

$$H''_0 = \frac{2N_2^2 k_z}{N_2^2 k_z + N_1^2 k'_z} H_0, \quad \text{VIII(1.24)}$$

popř.

$$H'_0 = \frac{\operatorname{tg}(\vartheta - \vartheta'')}{\operatorname{tg}(\vartheta + \vartheta'')} H_0, \quad \text{VIII(1.25)}$$

$$H''_0 = \frac{\sin 2\vartheta}{\sin(\vartheta + \vartheta'') \cos(\vartheta - \vartheta'')} H_0. \quad \text{VIII(1.26)}$$

Koeficient odrazu se vypočte ze vztahu

$$R_\parallel = \left| \frac{H'_0}{H_0} \right|^2 = \frac{\operatorname{tg}^2(\vartheta - \vartheta'')}{\operatorname{tg}^2(\vartheta + \vartheta'')}, \quad \text{VIII(1.27)}$$

$$R_\parallel = \frac{\cos^2(\vartheta + \vartheta'')}{\cos^2(\vartheta - \vartheta'')} R_\perp. \quad \text{VIII(1.28)}$$

Koeficienty odrazu R_\perp a R_\parallel se vyznačují následující symetrií: při vzájemné záměně úhlu dopadu ϑ a úhlu lomu ϑ'' se výrazy R_\perp a R_\parallel nemění. (Ze vzorců VII(1.20) a VIII(1.26) však plyne, že fáze vlny se při tom mění o π .) To znamená, že koeficient odrazu vlny dopadající z prostředí 1 pod úhlem ϑ je roven koeficientu odrazu vlny dopadající z prostředí 2 pod úhlem ϑ'' .

Vzorce VIII(1.22) a VIII(1.27) odvodil A. FRESNEL (1831) ještě pomocí tzv. éterové teorie světla, proto se nazývají *Fresnelovými vzorci*. Odvození pomocí elektromagnetické teorie světla podal H. A. LORENTZ (1875) ve své disertaci.

Zajímavý jev nastává při odrazu vlny dopadající pod úhlem $\vartheta \equiv \vartheta_B = \pi/2 - \vartheta''$. Poněvadž $\vartheta' = \vartheta$ je také $\vartheta'' + \vartheta' = \pi/2$, tj. odražená a lomená vlna jsou navzájem kolmé. Dosadíme-li $\sin \vartheta'' = \cos \vartheta_B$ do Snellova zákona, pak pro ϑ_B platí vztah

$$\operatorname{tg} \vartheta_B = N_{21}. \quad \text{VIII(1.29)}$$

Jelikož $\operatorname{tg}(\vartheta + \vartheta'') = \infty$, je koeficient odrazu R_\parallel roven nule. Libovolně polarizovaná elektromagnetická vlna dopadající pod úhlem ϑ_B bude po odrazu polarizovaná tak, že její elektrická intenzita \mathbf{E}' bude kolmá k rovině dopadu. Z toho důvodu se ϑ_B nazývá *úhlem úplné polarizace* nebo — na počest objevitele — *Brewsterovým úhlem*.

Je-li $N_2 > N_1$, říkáme, že prostředí 2 je *opticky hustší*; v opačném případě ($N_2 < N_1$) mluvíme o prostředí 2 jako o prostředí *opticky řidším*.

Budeme vyšetřovat případ odrazu na opticky řidším prostředí ($N_2 < N_1$), kdy úhel lomu $\vartheta'' = \pi/2$. Lomená vlna se šíří paralelně s rozhraním. Oba koeficienty odrazu R_\perp a R_\parallel jsou v tomto případě rovny jedné

$$R_\perp = R_\parallel = 1, \quad (\vartheta'' = \pi/2). \quad \text{VIII(1.30)}$$

Ze zákona lomu pak plyne, že tato situace nastává při úhlu dopadu ϑ_R určeném rovnicí

$$\sin \vartheta_R = N_{21} < 1. \quad \text{VIII(1.31)}$$

S ohledem na VIII(1.30) se úhel ϑ_R nazývá *úhlem úplného odrazu* neboli *úhlem totální reflexe*.

Snadno se přesvědčíme, že úplný odraz nastává také při úhlech dopadu $\vartheta > \vartheta_R$. Vztah VIII(1.18) snadno upravíme na tvar

$$E'_0 = \frac{\cos \vartheta - (N_{21}^2 - \sin^2 \vartheta)^{1/2}}{\cos \vartheta + (N_{21}^2 - \sin^2 \vartheta)^{1/2}} E_0. \quad \text{VIII(1.32)}$$

Při úhlech $\vartheta > \vartheta_R$ je výraz pod odmocninou záporný, proto

$$E'_0 = \frac{\cos \vartheta - i(\sin^2 \vartheta - N_{21}^2)^{1/2}}{\cos \vartheta + i(\sin^2 \vartheta - N_{21}^2)^{1/2}} E_0.$$

Zlomek představuje výraz typu $(a - bi)/(a + bi)$, jehož modul je roven jedné, a tedy $|E'_0|^2 = |E_0|^2$, takže $R_\perp = 1$. Obdobně se přesvědčíme, že při $\vartheta > \vartheta_R$ je také $R_\parallel = 1$.

Snadno najdeme také změnu fáze při úplném odrazu. Zapišeme-li

$$E'_{0\perp} = E_{0\perp} \exp(-i\Delta_\perp), \quad E'_{0\parallel} = E_{0\parallel} \exp(-i\Delta_\parallel),$$

pak pro fáze platí

$$\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\Delta_\perp) = \frac{(\sin^2 \vartheta - N_{21}^2)^{1/2}}{\cos \vartheta}, \quad \text{VIII(1.33)}$$

$$\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\Delta_{\parallel}) = \frac{(\sin^2 \vartheta - N_{21}^2)^{1/2}}{N_{21}^2 \cos \vartheta} \quad \text{VIII(1.34)}$$

Úplný odraz je doprovázen změnou fáze vlny, přičemž tento fázový posuv je různý pro pole rovnoběžné a kolmé k rovině dopadu. Pro fázový rozdíl

$$\Delta \equiv \Delta_{\perp} - \Delta_{\parallel}$$

po jednoduchých trigonometrických úpravách dostaneme vzorec

$$\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\Delta) = \frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} (\sin^2 \vartheta - N_{21}^2)^{1/2}.$$

Tento fázový rozdíl je roven nule pouze při úhlech dopadu $\vartheta = \vartheta_R$ a $\vartheta = \pi/2$.

VIII.2 Odraz na kovech

Ve vodičích přibude v rovnici VII(4.16) člen $\gamma \mathbf{E}$ od vodivého proudu, takže bude

$$\left[\boldsymbol{\kappa}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi} \right] = \gamma \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{VIII(2.1)}$$

Po vynásobení skalárně vektorem $\boldsymbol{\kappa}$ dostaneme

$$\boldsymbol{\kappa} \left(\frac{\gamma}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{D} = 0. \quad \text{VIII(2.2)}$$

Tato rovnice spolu s VII(4.13) ukazuje, že podélné komponenty vektorů \mathbf{E} a \mathbf{D} nezávisí na $\xi \equiv \boldsymbol{\kappa}r$. Časová závislost plyne z rovnice VIII(2.2), tj. $(\mathbf{E}\boldsymbol{\kappa}) \sim \exp(-t/\tau)$, kde $\tau = \varepsilon/\gamma$ je *relaxační doba*. Toto podélné elektrické pole ve vodičích velmi rychle vymizí, takže po uplynutí relaxační doby zbyde pouze transversální pole \mathbf{E} . Časově proměnná složka magnetického pole \mathbf{B} je vždy transversální (viz čl. VII.4).

Budeme předpokládat harmonickou časovou závislost $\exp(-\omega t)$. V telegrafní rovnici VII(3.1) užitíme $\nabla^2 = \partial^2/\partial \xi^2$, čímž dostaneme

$$\frac{d^2 \mathbf{E}}{d\xi^2} + \mathbf{K}^2 \mathbf{E} = 0, \quad \text{VIII(2.3)}$$

kde

$$\mathbf{K} = \alpha + i\beta = k \left(1 + \frac{i\gamma}{\varepsilon\omega} \right)^{1/2}, \quad \text{VIII(2.4)}$$

$$k = \omega(\varepsilon\mu)^{1/2}. \quad \text{VIII(2.5)}$$

Budeme předpokládat, že ε i μ jsou reálné. Pro reálnou (α) a imaginární část komplexního čísla \mathbf{K} dostaneme

$$\alpha = 2^{-1/2} k \left\{ 1 + \left[1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$\beta = 2^{-1/2} k \left\{ -1 + \left[1 + \left(\frac{\gamma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}^{1/2}.$$

Pole \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\beta\xi} e^{i(\alpha\xi - \omega t)}, \quad \text{VIII(2.6)}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\mu} (\alpha + i\beta)[\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}], \quad \text{VIII(2.7)}$$

kde vektor $\boldsymbol{\kappa}$ má směr osy ξ a jeho absolutní hodnota je určena vztahem VIII(2.5).

Z rovnice VIII(2.6) a VIII(2.7) je vidět, že vodivost prostředí přivádí ke dvěma významným odchylkám ve srovnání s polem v nevodivém prostředí:

1. Vlny jsou tlumené, klesají s hloubkou ξ .
2. Fáze elektrického a magnetického pole jsou různé.

Odraz na kovové hranici lze vyjádřit Fresnelovými vzorci, přičemž nutno vzít v úvahu, že některé z veličin v těchto vzorcích jsou komplexní. Obecné vzorce jsou však složité a málo přehledné, proto se obrátíme k limitnímu případu

$$\frac{\omega\varepsilon}{\gamma} \ll 1. \quad \text{VIII(2.8)}$$

V tomto případě je

$$\mathbf{K} = \frac{1+i}{\delta}, \quad \text{VIII(2.9)}$$

kde

$$\delta = \left(\frac{2}{\gamma\mu\omega} \right)^{1/2}$$

je známá nám již hloubka průniku (viz čl. V.1). Předpokládejme, že rovinná vlna šířící se v dielektriku ve směru ξ dopadá kolmo na povrch vodiče. Pole ve vodiči jsou

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}_0'' e^{-\xi/\delta} \exp \left[i \left(\frac{\xi}{\delta} - \omega t \right) \right],$$

$$\mathbf{H}'' = \mathbf{H}_0'' e^{-\xi/\delta} \exp \left[i \left(\frac{\xi}{\delta} - \omega t \right) \right] \equiv (1+i) \left(\frac{\gamma}{2\omega\mu} \right)^{1/2} [\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{E}''].$$

Vzdálenost ξ se odečítá od rozhraní. Při výpočtu koeficientu odrazu \mathbf{R} od vodivého povrchu zapíšeme odraženou vlnu

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}_0' e^{i(k\xi - \omega t)}.$$

Ze spojitosti vektorů \mathbf{E} a \mathbf{H} na rozhraní pak (po provedení obdobných úprav jako v čl. VIII.1) dostaneme

$$R = \left| \frac{\mathbf{E}'}{\mathbf{E}} \right|^2 = 1 - 2 \left(\frac{2\omega\epsilon}{\gamma} \right)^{1/2}, \quad \text{VIII(2.10)}$$

což se jen nepatrně liší od jedničky. To je pochopitelné s ohledem na skinový jev, který zabraňuje průniku vlny do vodiče. Odvození vztahu VIII(2.10) přenecháváme čtenáři ve formě cvičení.

Malá hodnota průnikové hloubky δ vede k tomu, že normálové derivace složek pole těsně pod povrchem značně převyšují derivace tangenciální. Budeme dále předpokládat, že δ je velmi malé vzhledem k poloměřům křivosti povrchu kovu. Za těchto okolností můžeme pole uvnitř kovu přibližně považovat za pole rovinné vlny, v nich jsou tangenciální složky \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t spojeny vztahem

$$\mathbf{E}_t = \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} (\mathbf{H}_t, \mathbf{n}), \quad \text{VIII(2.11)}$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor normály k povrchu kovu (orientovaný dovnitř kovu). Jelikož tečné složky \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t jsou spojitě, budou vztahem VIII(2.11) spojeny i složky \mathbf{E}_n , \mathbf{H}_n vně kovu. Elektromagnetické pole vně kovu lze tedy počítat bez řešení pole uvnitř vodiče; přítomnost vodiče se započte *Leontovičovou hraniční podmínkou* VIII(2.10) na rozhraní vodiče (M. A. LEONTOVIČ, 1948).

Charakteristická veličina

$$\mathcal{Z} = \left(\frac{\mu}{\epsilon} \right)^{1/2} \quad \text{VIII(2.12)}$$

je tzv. *povrchová impedance*. Při nepříliš vysokých frekvencích lze permitivitu $\epsilon(\omega)$ svázat s měrnou vodivostí stacionárního proudu. Pro monochromatickou vlnu je $\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\mathbf{E}$. Funkci $\epsilon(\omega)$ *definujeme* tak, aby rovnice $\text{rot } \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}$ přecházela v rovnici $\text{rot } \mathbf{H} = \gamma\mathbf{E}$ pro pole stacionárního proudu. Odtud plyne

$$\epsilon(\omega) = i \frac{\gamma}{\omega}. \quad \text{VIII(2.13)}$$

Takto definovaná funkce $\epsilon(\omega)$ má v bodě $\omega = 0$ pól, jehož reziduum je rovno $i\gamma$. Pro špatné vodiče lze užít vyjádření $\epsilon(\omega) = \epsilon(0) + i\gamma/\omega$.

VIII.3 Vlny v nehomogenním prostředí

Doposud jsme se zabývali elektromagnetickými vlnami v homogenním (a izotropním) prostředí, v němž jsou elektromagnetické parametry konstantní. V případě rozhraní dvou takových prostředí dochází k odrazu a lomu vln na tomto rozhraní.

V reálných podmínkách (např. při šíření elektromagnetických vln v zemské atmosféře) se však setkáváme se složitější situací. Permittivita ϵ závisí (mimo jiné) na hustotě prostředí. Poněvadž hustota atmosféry se s výškou mění, je ϵ (a tedy i index lomu N) funkcí polohy. Po těchto motivačních úvahách přejdeme k odvození vlnových rovnic pro elektromagnetické vlny v nehomogenním prostředí.

Budeme uvažovat nevodivé prostředí ($\gamma = 0$). Při harmonické časové závislosti polí budou Maxwellovy rovnice znít

$$\begin{aligned} \text{div}(\epsilon\mathbf{E}) &= 0, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= i\omega\mathbf{B}, & \text{rot } \mathbf{B} &= -i\omega\epsilon\mu_0\mathbf{E}. \end{aligned}$$

Jelikož relativní permeabilita většiny látek se liší od jedničky jen nepatrně, položili jsme $\mu = \mu_0$. Zapišeme $\epsilon = \epsilon_0\epsilon^{(r)}$ a užijeme $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$, dostaneme

$$N \equiv N(\mathbf{r}) = [\epsilon^{(r)}]^{1/2}. \quad \text{VIII(3.1)}$$

Rovnice pole budou mít tvar

$$\text{div}(N^2\mathbf{E}) = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{VIII(3.2)}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = -\frac{i\omega N^2}{c^2} \mathbf{E}. \quad \text{VIII(3.3)}$$

Z první rovnice vyjádříme $\mathbf{B} = (i\omega)^{-1} \text{rot } \mathbf{E}$ a dosadíme do druhé rovnice VIII(3.3). Při úpravě se užije identita $\text{rot } \text{rot} \equiv \text{grad } \text{div} - \nabla^2$; výsledkem je rovnice pro elektrické pole \mathbf{E}

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{N^2\omega^2}{c^2} \mathbf{E} - \text{grad } \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad \text{VIII(3.4)}$$

První rovnici VIII(3.2) zapišeme pomocí identity $\text{div}(N^2\mathbf{E}) \equiv N^2 \text{div } \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla N^2 = 0$, což vede k podmínce

$$N \text{div } \mathbf{E} + 2(\mathbf{E} \cdot \nabla N) = 0. \quad \text{VIII(3.5)}$$

Rovnice pro magnetické pole \mathbf{B} najdeme obdobně. Vyjádříme \mathbf{E} z druhé rovnice VIII(3.3) a dosadíme do první rovnice soustavy VIII(3.3). Při úpravách užijeme vztahu

$$\text{rot}(f\mathbf{A}) \equiv f \text{rot } \mathbf{A} + [\nabla f, \mathbf{A}],$$

v němž $f = 1/N^2$, $\mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{B}$. Výsledkem naznačených úprav je rovnice

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{N^2\omega^2}{c^2} \mathbf{B} + \frac{2}{N} [\nabla N, \text{rot } \mathbf{B}] = 0. \quad \text{VIII(3.6)}$$

Poslední členy na levých stranách rovnic VIII(3.4) a VIII(3.6) představují

hledanou korekci na nehomogenitu prostředí. Nejlépe je to vidět ze srovnání těchto rovnic s rovnicemi VII(2.5) pro homogenní prostředí.

Rovnice VIII(3.4) se zjednoduší, když N závisí pouze na jedné souřadnici, což je prakticky případ šíření elektromagnetických vln v atmosféře. Označíme-li tuto souřadnici z , pak

$$N \equiv N(z). \quad \text{VIII(3.7)}$$

Souřadnou soustavu zvolíme tak, aby se vlna šířila v rovině (x, z) . Touto volbou vyloučíme závislost vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} na souřadnici y . Vlna nechť je polarizována tak, že vektor \mathbf{E} je rovnoběžný s osou y . V takovém případě je (časovou závislost $\exp(-i\omega t)$ nevypisujeme)

$$E_x = E_z = 0, \quad E_y \equiv E(x, z). \quad \text{VIII(3.8)}$$

Rovnice $\text{div } \mathbf{E} = 0$ je splněna identicky spolu s VIII(3.5), jelikož $(\mathbf{E} \cdot \nabla N) \equiv 0$.

Vezmeme y -ovou komponentu rovnice VIII(3.4); pro $E_y \equiv E(x, z)$ pak platí rovnice

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) E(x, z) + \frac{\omega^2 N^2}{c^2} E(x, z) = 0.$$

Proměnná x se zde explicitně nevyskytuje, proto provedeme separaci proměnných ($\lambda = \text{konst}$)

$$E(x, z) = \varphi(z) e^{i\lambda x}, \quad \text{VIII(3.9)}$$

což vede k rovnici pro $\varphi(z)$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2 N^2}{c^2} - \lambda^2\right) \varphi = 0. \quad \text{VIII(3.10)}$$

Vzniklá rovnice má tvar jednorozměrné Schrödingerovy rovnice pro částici s hmotností m v potenciálovém poli $U(z) \equiv U$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dz^2} + (U - \mathcal{E}) \psi = 0,$$

a lze tedy převzít metody vypracované v kvantové mechanice pro řešení této rovnice.

Ve druhém případě, kdy vektor \mathbf{E} leží v rovině šíření (x, z) , je výhodné vyjít z rovnice VIII(3.6) pro pole \mathbf{B} , které má směr osy y . Nyní bude

$$B_x = B_z = 0, \quad B_y \equiv B(x, z). \quad \text{VIII(3.11)}$$

Rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$ je splněna identicky. Pro kontrolu výpočtů uvedeme jedinou nenulovou (y -ovou) složku vektorového součinu $[\nabla N, \text{rot } \mathbf{B}]_y = -(-dN/dz)(\partial B/\partial z)$. Pro $B_y \equiv B(x, z)$ pak dostaneme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) B - \frac{2}{N} \frac{dN}{dz} \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{\omega^2 N^2}{c^2} B = 0.$$

Ze stejných důvodů jako u elektrického pole provedeme substituci

$$B(x, z) = b(z) e^{i\lambda x}, \quad \text{VIII(3.12)}$$

což vede k rovnici pro $b(z)$

$$\frac{d^2 b}{dz^2} - \frac{2}{N} \frac{dN}{dz} \frac{db}{dz} + \left(\frac{\omega^2 N^2}{c^2} - \lambda^2\right) b = 0, \quad \text{VIII(3.13)}$$

resp.

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{N^2} \frac{db}{dz} \right] + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\lambda^2}{N^2}\right) b = 0. \quad \text{VIII(3.13')}$$

V literatuře se vlny VIII(3.8) popisované rovnicí VIII(3.10) nazývají vlnami *elektrického druhu* (zkráceně *E-vlnami*); vlny VIII(3.11) popisované rovnicí VIII(3.13) jsou vlnami *magnetického druhu* (zkráceně *B* nebo *H-vlnami*).

Problém je tak převeden na řešení rovnice VIII(3.10), resp. VIII(3.13) se zadanou závislostí $N \equiv N(z)$ a daným parametrem λ . Tento parametr charakterizuje směr průchodu vlny prostředím. Při $\lambda = 0$ pole vůbec nezávisí na x , závisí pouze na z , proto mluvíme o kolmém (normálovém) průchodu. Případ $\lambda \neq 0$ odpovídá šikmému průchodu.

Charakter řešení (oscilující anebo exponenciální průběh) se podstatně mění v oblasti, kde funkce $k^2(z) \equiv (N^2 \omega^2 / c^2) - \lambda^2$ mění znaménko.

Určitou představu o některých zvláštnostech šíření elektromagnetických vln v nehomogenním prostředí poskytnou přiložené úlohy. Tato problematika je dnes samostatným oborem teorie elektromagnetického pole; čtenář najde podrobnosti ve speciální monografické literatuře.

VIII.4 Vlny v anizotropním prostředí

V *izotropních* prostředích platí materiálové vztahy $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Rovinná elektromagnetická vlna, v níž všechny polní vektory závisí na souřadnicích a čase prostřednictvím faktoru $\exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$, se šíří v takovém prostředí fázovou rychlostí

$$w = \frac{c}{N}, \quad N = [\epsilon^{(e)} \mu^{(e)}]^{1/2}.$$

Směr přenosu elektromagnetické energie (směr vektoru \mathbf{S}) souhlasí se směrem vlnového vektoru \mathbf{k} . V anizotropních prostředích dochází k některým výrazným změnám při šíření elektromagnetických vln.

Pro rovinnou elektromagnetickou vlnu v nevodivém prostředí se Maxwellovy rovnice $\text{div } \mathbf{D} = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\text{rot } \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t$, $\text{rot } \mathbf{E} + (\partial \mathbf{B} / \partial t) = 0$ převedou na tvar

$$k\mathbf{D} = 0, \quad k\mathbf{B} = 0, \quad \text{VIII(4.1)}$$

$$[\mathbf{k}, \mathbf{H}] = -\omega \mathbf{D}, \quad [\mathbf{k}, \mathbf{E}] = \omega \mathbf{B}. \quad \text{VIII(4.2)}$$

V nevodivých prostředích je magnetická anizotropie zpravidla zanedbatelná oproti elektrické anizotropii, proto v dalším položíme

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad \text{VIII(4.3)}$$

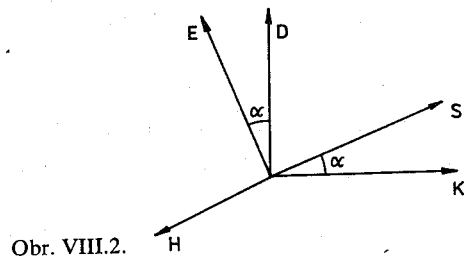
V izotropních prostředích bylo $k = N\omega/c$, proto zavedeme v anizotropních prostředích vektor \mathbf{N} vztahem

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{N}. \quad \text{VIII(4.4)}$$

Vztahy VIII(4.3) a VIII(4.4) dosadíme do VIII(4.2), přičemž při úpravě uijeme vztahu $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$. Mezi vektory \mathbf{N} , \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} pak platí vztahy

$$\mathbf{D} = -\varepsilon_0 c [\mathbf{N}, \mathbf{B}], \quad [\mathbf{N}, \mathbf{E}] = c \mathbf{B}. \quad \text{VIII(4.5)}$$

Tři vektory \mathbf{N} , \mathbf{D} , \mathbf{B} jsou navzájem kolmé, přičemž vektor \mathbf{B} je současně kolmý k vektoru \mathbf{E} . Poněvadž vektor \mathbf{B} je kolmý současně ke třem vektorům \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{k} , musí tyto tři vektory ležet v jedné rovině (viz obr. VIII.2.). Aby nedošlo k přehlédnutí, zdůrazníme ještě jednou, že k vlnovému vektoru \mathbf{k} jsou kolmé vektory \mathbf{D} a \mathbf{B} , nikoli však obecně vektor \mathbf{E} .



Obr. VIII.2.

Poyntingův vektor $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = [\mathbf{E}, \mathbf{B}] / \mu_0$ upravíme tak, že \mathbf{B} vyjádříme pomocí druhé rovnice VIII(4.5). Po roznásobení dvojitého vektorového součinu dostaneme

$$\mathbf{S} = c \varepsilon_0 \{ E^2 \mathbf{N} - (\mathbf{N}\mathbf{E}) \mathbf{E} \}. \quad \text{VIII(4.6)}$$

Jelikož obecně $(\mathbf{N}\mathbf{E}) \neq 0$, směr Poyntingova a vlnového vektoru je obecně jiný. Z vyjádření VIII(4.6) je vidět, že vektor \mathbf{S} leží v rovině vytvořené vektory \mathbf{N} , \mathbf{E} , v níž

leží také vektor \mathbf{D} . Snadno se dokáže, že úhel mezi vektory \mathbf{S} , \mathbf{k} je roven úhlu mezi vektory \mathbf{D} , \mathbf{E} .

K důkazu vyjádříme vektor \mathbf{B} z druhé rovnice VIII(4.5) a dosadíme do první rovnice, čímž dostaneme

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \{ \mathbf{E} \mathbf{N}^2 - (\mathbf{N}\mathbf{E}) \mathbf{N} \}. \quad \text{VIII(4.7)}$$

Ze skalárních součinů

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \mathbf{N} &= \varepsilon_0 c \{ \mathbf{E}^2 \mathbf{N}^2 - (\mathbf{N}\mathbf{E})^2 \}, \\ \mathbf{D} \mathbf{E} &= \varepsilon_0 \{ \mathbf{E}^2 \mathbf{N}^2 - (\mathbf{N}\mathbf{E})^2 \} \end{aligned}$$

plyne uvedené tvrzení. Poznamenejme ještě, že vyjádření VIII(4.6) a VIII(4.7), jakož i rovnost úhlů mezi vektory \mathbf{E} , \mathbf{D} a \mathbf{S} , \mathbf{k} je nezávislá na volbě vztahu mezi vektory \mathbf{E} a \mathbf{D} .

Nyní budeme specifikovat tento vztah lineární závislosti

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k = \varepsilon_0 \varepsilon_{ik}^{(0)} E_k. \quad \text{VIII(4.8)}$$

Po redukci k hlavním osám bude

$$D_1 = \varepsilon_1 E_1, \quad D_2 = \varepsilon_2 E_2, \quad D_3 = \varepsilon_3 E_3, \quad \text{VIII(4.9)}$$

kde ε_1 , ε_2 , ε_3 jsou hlavní hodnoty tenzoru permittivity.

Vztah mezi vektory \mathbf{D} , \mathbf{E} a \mathbf{N} najdeme tak, že i -tou komponentu VIII(4.7) ztotožníme s VIII(4.8), tj.

$$N^2 E_i - (\mathbf{N}\mathbf{E}) N_i = \varepsilon_i^{(0)} E_i. \quad \text{VIII(4.10)}$$

Dříve než přejdeme k obecnému rozboru důsledků této rovnice, všimněme si nejdříve dvou speciálních případů:

1. Nechť vektor \mathbf{D} má směr osy 1, tj.

$$\mathbf{D} \equiv D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1^{(0)} E_1, \quad D_2 = D_3 = 0.$$

Z VIII(4.10) plynou tři rovnice

$$N^2 E_1 - (\mathbf{N}\mathbf{E}) N_1 = \varepsilon_1^{(0)} E_1, \quad N^2 E_2 - (\mathbf{N}\mathbf{E}) N_2 = 0, \quad N^2 E_3 - (\mathbf{N}\mathbf{E}) N_3 = 0.$$

Jelikož $D_2 = \varepsilon_2 E_2 = 0$, $D_3 = \varepsilon_3 E_3 = 0$, je také $E_2 = E_3 = 0$, a tudíž $(\mathbf{N}\mathbf{E}) N_2 = (\mathbf{N}\mathbf{E}) N_3 = 0$. Jsou možné dva případy. Buď $N_2 = N_3 = 0$, pak z rovnice pro E_1 plyne $N^2 E_1 = -(N_1 E_1) N_1 = \varepsilon_1^{(0)} E_1$, tj. (po uvážení $N^2 = N_1^2$)

$$\varepsilon_1^{(0)} E_1 = 0.$$

To by značilo, že $E_1 = E_2 = E_3 = 0$ (neexistenci vlny). Je-li $\mathbf{N}\mathbf{E} = 0$, pak je $N^2 E_1 = \varepsilon_1^{(0)} E_1$, a tudíž

$$N = \sqrt{\varepsilon_1^{(0)}}. \quad \text{VIII(4.11)}$$

Tomu odpovídá příčná vlna ($\mathbf{NE} = 0$) s fázovou rychlostí

$$w_1 = \frac{c}{N} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_1^{(r)}}}. \quad \text{VIII(4.12)}$$

2. Nechť se vlna šíří ve směru osy 1, tj.

$$N_1 \neq 0, \quad N_2 = N_3 = 0.$$

Z rovnice VIII(4.10) pak plyne

$$\epsilon_1^{(r)} E_1 = 0, \quad \epsilon_2^{(r)} E_2 = N^2 E_2, \quad \epsilon_3^{(r)} E_3 = N^2 E_3.$$

Jelikož $D_1 = 0$, vektor \mathbf{D} je kolmý ke směru šíření, leží v rovině (2, 3). Pak je buď $N^2 = \epsilon_2^{(r)}$, nebo $N^2 = \epsilon_3^{(r)}$, a tudíž

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2^{(r)}} \quad \text{nebo} \quad k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_3^{(r)}}.$$

Tomu odpovídají fázové rychlosti podél hlavních os

$$w_2 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_2^{(r)}}}, \quad w_3 = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_3^{(r)}}}. \quad \text{VIII(4.13)}$$

V obecném případě postupujeme takto: V rovnici VIII(4.10) položíme $\mathbf{NE} = N_k E_k$, $\mathbf{N}^2 \mathbf{E}_i = N^2 E_k \delta_{ik}$, což vede k rovnicím

$$(N_i N_k + \epsilon_{ik}^{(r)} - N^2 \delta_{ik}) E_k = 0.$$

Tato soustava homogenních rovnic pro E_k má netriviální řešení pouze tehdy, když

$$\det(N_i N_k + \epsilon_{ik}^{(r)} - N^2 \delta_{ik}) = 0. \quad \text{VIII(4.14)}$$

Výpočet determinantu je nejjednodušší v soustavě hlavních os tenzorů permitivity; po jednoduchých úpravách dospějeme k rovnici

$$\begin{aligned} N^2 [\epsilon_1^{(r)} N_1^2 + \epsilon_2^{(r)} N_2^2 + \epsilon_3^{(r)} N_3^2] + \epsilon_1^{(r)} \epsilon_2^{(r)} \epsilon_3^{(r)} - N_1^2 \epsilon_1^{(r)} (\epsilon_2^{(r)} + \epsilon_3^{(r)}) - \\ - N_2^2 \epsilon_2^{(r)} (\epsilon_1^{(r)} + \epsilon_3^{(r)}) - N_3^2 \epsilon_3^{(r)} (\epsilon_1^{(r)} + \epsilon_2^{(r)}) = 0. \end{aligned} \quad \text{VIII(4.15)}$$

Tato rovnice čtvrtého stupně pro plochu vlnových vektorů je známá *Fresnelova fundamentální rovnice krystalové optiky*. Rovnice určuje *disperzní zákon* $\omega \equiv \omega(N_1, N_2, N_3)$, resp.

$$\omega \equiv \omega(\mathbf{k}) \equiv \omega(k_1, k_2, k_3). \quad \text{VIII(4.16)}$$

Komponenty tenzoru ϵ_{ik} závisí na frekvenci $\epsilon_{ik} \equiv \epsilon_{ik}(\omega)$. Je-li frekvence dána, pak při daném směru vektoru \mathbf{N} je VIII(4.15) kvadratickou rovnicí pro N^2 , takže každému směru \mathbf{N} odpovídají obecné dvě různé absolutní hodnoty vlnového vektoru, a tedy dvě různé rychlosti šíření.

Snadno se dokáže, že *Poyntingův vektor* \mathbf{S} je ortogonální s plochou vlnových vektorů. Za tím účelem přepíšeme rovnice VIII(4.5) ve tvaru

$$c\mathbf{D} = [\mathbf{H}, \mathbf{N}], \quad c\mu_0 \mathbf{H} = [\mathbf{N}, \mathbf{E}].$$

Diferencováním těchto rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} c\delta\mathbf{D} &= [\mathbf{H}, \delta\mathbf{N}] + [\delta\mathbf{H}, \mathbf{N}], \\ c\mu_0 \delta\mathbf{H} &= [\mathbf{E}, \delta\mathbf{N}] + [\mathbf{N}, \delta\mathbf{E}]. \end{aligned}$$

První z těchto rovnic vynásobíme skalárně vektorem \mathbf{E} , druhou \mathbf{H}

$$\begin{aligned} c\mathbf{E} \delta\mathbf{D} &= [\mathbf{N}, \mathbf{E}] \delta\mathbf{H} + [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \delta\mathbf{N} = c\mu_0 \mathbf{H} \delta\mathbf{H} + \mathbf{S} \delta\mathbf{N}, \\ c\mu_0 \mathbf{H} \delta\mathbf{H} &= c\mathbf{D} \delta\mathbf{E} + [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \delta\mathbf{N} = c\mathbf{E} \delta\mathbf{D} + \mathbf{S} \delta\mathbf{N}. \end{aligned}$$

Sečtením obou rovnic získáme hledaný vztah

$$\mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{N} = 0. \quad \text{VIII(4.17)}$$

Rozbor Fresnelovy rovnice VIII(4.15) je jednoduchý ve dvou speciálních případech. U krystalů s kubickou symetrií je $\epsilon_{ik} = \epsilon \delta_{ik}$, tj. hlavní hodnoty $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 \equiv \epsilon$, přičemž orientace hlavních os je libovolná. Takový krystal se — z optického hlediska — chová jako izotropní těleso.

U jednoosých krystalů (romboedrické, tetragonální a hexagonální soustavy) jsou dvě hlavní hodnoty tenzoru ϵ_{ik} stejné. Zvolíme-li

$$\epsilon_1^{(r)} = \epsilon_2^{(r)} \equiv \epsilon_{\perp}^{(r)}, \quad \epsilon_3^{(r)} \equiv \epsilon_{\parallel}^{(r)}, \quad \text{VIII(4.18)}$$

pak Fresnelova rovnice VIII(4.15) se rozpadne na součin dvou kvadratických faktorů

$$[N^2 - \epsilon_{\perp}^{(r)}][\epsilon_{\parallel}^{(r)} N_3^2 + \epsilon_{\perp}^{(r)}(N_1^2 + N_2^2) - \epsilon_{\perp}^{(r)} \epsilon_{\parallel}^{(r)}] = 0. \quad \text{VIII(4.19)}$$

Odtud plynou dvě rovnice druhého stupně

$$N^2 \equiv N_1^2 + N_2^2 + N_3^2 = \epsilon_{\perp}, \quad \text{VIII(4.20)}$$

$$\frac{N_3^2}{\epsilon_{\perp}^{(r)}} + \frac{N_1^2 + N_2^2}{\epsilon_{\parallel}^{(r)}} = 1. \quad \text{VIII(4.21)}$$

První rovnice odpovídá kouli, druhá rotačnímu elipsoidu. Je-li $\epsilon_{\perp} > \epsilon_{\parallel}$, pak koule leží vně elipsoidu, při $\epsilon_{\perp} < \epsilon_{\parallel}$ je koule uvnitř elipsoidu.

V krystalu se mohou šířit dva druhy vln. V prvním případě (tzv. *obyčejné* neboli *normální* vlny) se krystal chová jako *izotropní prostředí* s indexem lomu $\sqrt{\epsilon_{\perp}^{(r)}}$.

V druhém případě VIII(4.21) položíme $N_3 = N \cos \vartheta$, $N_1^2 + N_2^2 = N^2 \sin^2 \vartheta$, kde ϑ je úhel mezi vlnovým vektorem \mathbf{k} (resp. \mathbf{N}) a optickou osou 3. Rovnice pak zní

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{\epsilon_{\perp}^{(r)}} + \frac{\cos^2 \vartheta}{\epsilon_{\parallel}^{(r)}} = \frac{1}{N^2}. \quad \text{VIII(4.22)}$$

Velikost vlnového vektoru v této tzv. *mimořádné* vlně závisí na úhlu ϑ mezi vlnovým vektorem a optickou osou.

U dvouosých krystalů, k nimž patří krystaly triklinické, monoklinické a rombické soustavy, jsou všechny tři hlavní hodnoty tenzoru různé. Pro konkrétnost je seřadíme tak, že

$$\varepsilon_1^{(r)} < \varepsilon_2^{(r)} < \varepsilon_3^{(r)}. \quad \text{VIII(4.23)}$$

Abychom získali představu o tvaru Fresnelovy plochy vlnových vektorů najdeme její průřezy do suřadnicových rovin. Položíme $N_3 = 0$, čímž se VIII(4.15) rozpadne na součin dvou faktorů

$$[\mathbf{N}^2 - \varepsilon_3^{(r)}][N_1^2 \varepsilon_1^{(r)} + N_2^2 \varepsilon_2^{(r)} - \varepsilon_1^{(r)} \varepsilon_2^{(r)}] = 0. \quad \text{VIII(4.24)}$$

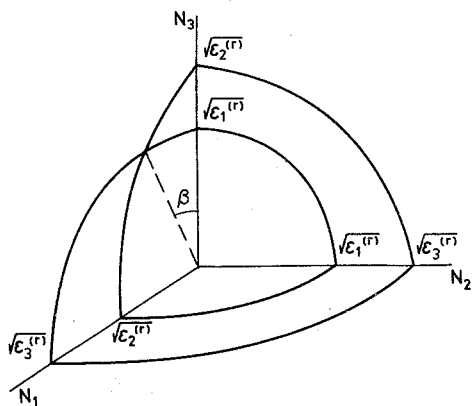
Obrysy průřezů Fresnelovy plochy v rovině $N_3 = 0$ sestávají z kružnice

$$\mathbf{N}^2 = \varepsilon_3^{(r)} \quad \text{VIII(4.25)}$$

a elipsy

$$\frac{N_1^2}{\varepsilon_2^{(r)}} + \frac{N_2^2}{\varepsilon_1^{(r)}} = 1, \quad \text{VIII(4.26)}$$

jež — s ohledem na volbu VIII(4.23) — leží uvnitř kružnice. Obdobnou strukturu mají průřezy v rovinách $N_1 = 0$ a $N_2 = 0$. Plocha vlnových vektorů je teda protínající se plochou, jejíž tvar v jednom oktandu je znázorněn na obr. VIII.3.



Obr. VIII.3.

VIII.5 Přiblížení geometrické optiky. Eikonálová rovnice

Rovinná vlna se vyznačuje tím, že má konstantní amplitudu a stejný směr šíření. Obecné elektromagnetické vlny však mají proměnnou amplitudu i proměnný směr šíření.

Existují však situace, že vlnu lze pokládat za *rovinnou* alespoň v jisté *malé části prostoru*. V takovém případě se amplituda vlny i směr jejího šíření mění jen nepatrně na vzdálenostech řádově rovných vlnové délce.

Označíme-li L charakteristický lineární rozměr oblasti, pak musí být vlnová délka λ velice malá ve srovnání s tímto rozměrem

$$L \gg \lambda. \quad \text{VIII(5.1)}$$

V takovém případě můžeme zavést pojem *vlnoplochy*, tj. takových ploch, na nichž je fáze vlny (v daném čase t) stejná. V každé malé části prostoru můžeme zavést (proměnný) směr šíření vlny; tento směr odpovídá normále (v daném bodě) vlnoplochy. Tyto směry šíření definují jistou křivku zvanou *vlnový paprsek*.

V tomto limitním případě ($\lambda \ll L$) se stačí zabývat směrem šíření vln (paprsky) a není třeba přihlížet k vlnové povaze světla, což je předmětem tzv. *geometrické optiky*.

Základní rovnici geometrické optiky, tzv. *eikonálovou*⁸⁾ *rovnici*, lze odvodit několika způsoby. Dva z nich, které se nám jeví nejinstruktivnější, si zde předvedeme.

Pro vektory elektromagnetického pole platí vlnová rovnice typu

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad \text{VIII(5.2)}$$

V rovinné monochromatické vlně je

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \quad \text{VIII(5.3)}$$

V obecném případě zapíšeme řešení

$$\psi = a e^{i\chi}, \quad \text{VIII(5.4)}$$

kde reálná fáze χ je tzv. *eikonál*.

V malých oblastech prostoru a malých časových intervalech lze položit

$$\chi = \chi_0 + (\mathbf{r}\nabla)\chi + t \frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Srovnání VIII(5.3) a VIII(5.4) pak vede ke vztahům

$$\mathbf{k} = \nabla \chi, \quad \omega = -\frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad \text{VIII(5.5)}$$

Zavedeme

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{N} \quad \text{VIII(5.6)}$$

⁸⁾ Z řeckého εικον = úhlová dráha, zobrazení.

a z rovnic VIII(5.5) pak plyne eikonálová rovnice

$$(\nabla\chi)^2 - \frac{N^2}{c^2} \left(\frac{\partial\chi}{\partial t}\right)^2 = 0. \quad \text{VIII(5.7)}$$

Z vyjádření VIII(5.6) je vidět, že absolutní hodnota $N \equiv |\mathbf{N}|$ vektoru \mathbf{N} je index lomu.

V monochromatické vlně s daným ω je výhodné položit

$$\chi = -\omega t + \frac{\omega}{c} \chi_0(\mathbf{r}), \quad \text{VIII(5.8)}$$

odkud plyne tzv. stacionární eikonálová rovnice

$$\nabla\chi_0 = \mathbf{N}, \quad \text{VIII(5.9)}$$

resp.

$$(\nabla\chi_0)^2 \equiv \left(\frac{\partial\chi_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\chi_0}{\partial z}\right)^2 = N^2, \quad \text{VIII(5.10)}$$

Absolutní hodnota vlnového vektoru je řádově rovna převrácené hodnotě vlnové délky $k \equiv 1/\lambda$. V přiblížení geometrické optiky je $k\mathbf{r} \equiv kL = (L/\lambda) \gg 1$, a tedy i eikonál má velkou hodnotu. Tohoto poznatku využijeme k odvození eikonálové rovnice jako limitního případu vlnové rovnice VIII(5.2) pro $\lambda \rightarrow 0$.

Pro jednoduchost výpočtů vyjdeme z jednorozměrné vlnové rovnice

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,$$

v níž použijeme vyjádření $\psi = a \exp[i\chi(x, t)]$. Po provedení derivací dostaneme

$$\left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\right] e^{i\chi} + 2i \left[\frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial \chi}{\partial t}\right] e^{i\chi} + i \left[\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{1}{w^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2}\right] \psi - \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{w^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^2\right] \psi = 0.$$

První tři členy v hranatých závorkách lze zanedbat s ohledem na předpokládanou pomalou změnu amplitudy a a eikonálu χ a velkou hodnotu χ . Zbyde tak

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{w^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 - \frac{N^2}{c^2} \left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)^2 = 0.$$

V třírozměrném případě dospějeme k rovnici VIII(5.7).

Postup v geometrické optice je tedy tento. Při zadaném indexu lomu $N \equiv N(\mathbf{r})$ vyřešíme rovnici VIII(5.9), resp. VIII(5.10) a pomocí vztahů VIII(5.5) určíme směr šíření paprsku v každém bodě. Touto problematikou spadající do učebnice geometrické optiky, se zde zabývat nebudeme.

Všimněme si však pozoruhodné analogie rovnic VIII(5.5) s rovnicemi mechaniky. Základní rovnicí mechaniky je Hamiltonova—Jacobiova rovnice pro účinkovou funkci S ; hybnost částice \mathbf{p} a její energie \mathcal{E} jsou pak dány rovnicemi

$$\mathbf{p} = \nabla S, \quad \mathcal{E} = -\frac{\partial S}{\partial t}. \quad \text{VIII(5.11)}$$

V geometrické optice je vlnový vektor „mechanickou analogií“ hybnosti částice, zatímco frekvence je analogií energie. Uvedená analogie platí i v obráceném směru, což je již idea korpuskulárně-vlnového dualismu vyjádřeného de Broglieovými vztahy

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad \mathcal{E} = \hbar \omega,$$

kde $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34}$ J s je Planckova konstanta dělená 2π . Tato problematika však patří do kvantové fyziky a proto se jí zde zabývat nebudeme.

VIII.6 Kramersovy—Kronigovy disperzní relace

V předchozím výkladu jsme často používali toho, že permitivita a jiné elektromagnetické parametry závisí na frekvenci. Nyní si všimněme některých obecných důsledků těchto závislostí.

Nejdříve si připomeneme některé výsledky z čl. II.4. Polarizace \mathbf{P} v čase t je určena elektrickým polem $\mathbf{E}(t')$ ve všech časech $t' \leq t$. Jistá reálná korelační funkce $K(t-t')$ zachycuje vliv těchto předchozích okamžiků na stav v čase t . Položíme-li

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t K(t-t') \mathbf{E}(t') dt',$$

pak po záměně $t-t' = \tau$ dostaneme

$$\mathbf{P}(t) = \varepsilon_0 \int_0^\infty K(\tau) \mathbf{E}(t-\tau) d\tau.$$

Přechodem k Fourierovým komponentám podle vztahu II(4.34) dostaneme

$$\mathbf{P}_\omega = \varepsilon_0 \kappa(\omega) \mathbf{E}_\omega, \quad \text{VIII(6.1)}$$

kde susceptibilita

$$\kappa(\omega) = \int_0^\infty K(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \equiv K_\omega \quad \text{VIII(6.2)}$$

a permitivita

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 [1 + \kappa(\omega)] = \varepsilon_0 \left[1 + \int_0^\infty K(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right]. \quad \text{VIII(6.3)}$$

Integrace v mezích $-\infty \leq t' \leq t$, resp. $0 \leq \tau \leq \infty$ je odrazem principu příčinnosti, což v daném případě znamená, že na polarizaci v čase t nemohou mít vliv pole v časech $t' > t$.

Všimněme si nyní vlastností funkcí $\kappa(\omega)$ a $\varepsilon(\omega)$. Funkce $K(\tau)$ je klesající funkcí času τ ; konkrétní tvar $K(\tau)$ není nutno znát, budeme však požadovat, aby existoval integrál

$$\kappa(0) = \int_0^{\infty} K(\tau) d\tau$$

představující susceptibilitu κ ve statickém poli. Oscilující faktor $\exp(i\omega\tau)$ hodnotu integrálu zmenšuje; v limitě $\omega \rightarrow \infty$ je

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \kappa(\omega) = 0, \quad \text{VIII(6.4)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0. \quad \text{VIII(6.5)}$$

Z vyjádření VIII(6.2) a VIII(6.3) je vidět, že funkce $\kappa(\omega)$ a $\varepsilon(\omega)$ jsou obecně komplexní funkcí reálného argumentu ω , proto položíme

$$\begin{aligned} \kappa(\omega) &= \kappa'(\omega) + i\kappa''(\omega), \\ \varepsilon(\omega) &= \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega), \end{aligned} \quad \text{VIII(6.6)}$$

kde κ' , ε' jsou reálné a κ'' , ε'' imaginární části příslušných funkcí.

Funkce $\kappa(\omega)$ a $\varepsilon(\omega)$ lze analyticky prodloužit do horní Gaussovy roviny. Tyto funkce totiž budou existovat, i když budeme ω považovat za komplexní proměnnou

$$\omega = \omega' + i\omega'', \quad (\omega'' \geq 0). \quad \text{VIII(6.7)}$$

V integrandu se objeví dodatečný faktor $\exp(-\omega''\tau)$, jenž konvergenci integrálu ještě zlepšuje.

Funkce $\kappa(\omega)$ a $\varepsilon(\omega)$ jsou tedy pro nevodivá prostředí všude konečné, a to nejen na reálné ose $\omega = \omega'$, ale také v celé horní Gaussově rovině $\omega'' > 0$. Ze vztahu VII(2.12) plyne, že u kovů má $\varepsilon(\omega)$ pól při $\omega = 0$; tento případ nebudeme zatím uvažovat a pojednáme o něm později.

Označíme-li hvězdičkou komplexní sdružení, pak z definice VIII(6.2) plynou vztahy

$$\kappa^*(\omega) = \kappa(-\omega^*), \quad \varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega^*), \quad \text{VIII(6.8)}$$

jež jsou zobecněním vztahů II(4.38) na komplexní rovinu ω . Na imaginární ose $\omega = i\omega''$ je $\kappa^*(i\omega'') = \kappa(+i\omega'')$, tj. na imaginární ose je κ a ε reálné

$$\text{Im } \kappa(\omega) = 0, \quad \text{Im } \varepsilon(\omega) = 0, \quad (\omega = i\omega''). \quad \text{VIII(6.9)}$$

Skutečnost, že funkce $\kappa(\omega)$ a $\varepsilon(\omega)$ jsou ohraničené na reálné ose $\omega = \omega'$ i v celé

horní Gaussově rovině $\omega'' > 0$, značí, že to jsou holomorfní funkce v uvedené oblasti. To nám umožňuje použít ke studiu těchto funkcí matematického aparátu teorie funkcí komplexní proměnné.

Jeden z těchto teorémů si zde připomeneme ve formě, která se bezprostředně hodí pro naše účely. Máme-li holomorfní (analytickou) funkci $h(z)$, pak integrál po uzavřené křivce C je roven nule (Cauchyův teorém)

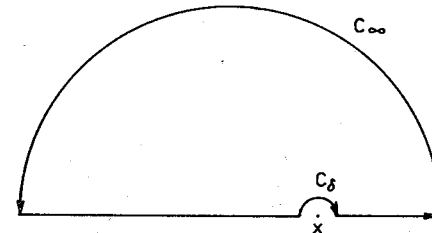
$$\oint_C h(z') dz' = 0.$$

Tento teorém upravíme takto. Mějme komplexní funkci $f(z)$ komplexní proměnné $z = x + iy$. Nechť tato funkce je na křivce C i uvnitř ní holomorfní. Potom platí

$$\oint_C \frac{f(z')}{z' - z} dz' = 0. \quad \text{VIII(6.10)}$$

Křivka C je volena tak, že bod z leží vně této křivky. Budeme dále předpokládat, že pro $|z| \rightarrow \infty$ je $f(z) \cong z^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon \geq 0$. Integrační křivku zvolíme tak, jak je znázorněno na obr. VIII.4. V integrálu po reálné ose položíme $z' = x'$, takže po rozeepsání integrálu VIII(6.10) budeme mít

$$\int_{-\infty}^{x-\delta} \frac{f(x')}{x' - x} dx' + \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx' + \int_{C_\delta} \frac{f(z')}{z' - z} dz' + \int_{C_\infty} \frac{f(z')}{z' - z} dz' = 0.$$



Obr. VIII.4. Znázornění integrační cesty

První dva integrály dají při $\delta \rightarrow 0$ hlavní hodnotu integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx' \equiv \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{x-\delta} \frac{f(x')}{x' - x} dx' + \int_{x+\delta}^{\infty} \frac{f(x')}{x' - x} dx' \right].$$

Hlavní hodnotu integrálu někdy označujeme buď V.P. (valeur principal) nebo přeškrtnutím integračního znaku. Integrál přes nekonečně vzdálenou půlkružnici C_∞ dá nulu, jelikož všude na tomto oblouku je integrand nulový. Zbývá tedy vypočítat integrál přes infinitezimální půlkružnici C_δ . Položíme $z' - x = \delta \cdot e^{i\varphi}$, $dz' = i\delta \cdot e^{i\varphi} d\varphi$, a tudíž

$$\int_{C_\delta} \frac{f(z') dz'}{z' - x} = i \int_{-\pi}^0 f(x + \delta \cdot e^{i\varphi}) d\varphi.$$

V limitě $\delta \rightarrow 0$ to poskytne výsledek

$$\int_{C_\delta} \frac{f(z') dz'}{z' - x} = -\pi i f(x). \quad \text{VIII(6.11)}$$

Dospěli jsme tak k rovnici

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x') dx'}{x' - x} = \pi i f(x). \quad \text{VIII(6.12)}$$

Funkce $f(x)$ je obecně komplexní. Vyjádříme ji pomocí reálné a imaginární části

$$f(x) = \text{Re} f(x) + i \text{Im} f(x).$$

Toto vyjádření dosadíme do VIII(6.12) a porovnáme reálné a imaginární části na obou stranách. Výsledkem jsou vztahy

$$\text{Im} f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re} f(x') dx'}{x' - x}, \quad \text{VIII(6.13)}$$

$$\text{Re} f(x) = +\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im} f(x') dx'}{x' - x} \quad \text{VIII(6.14)}$$

svazující reálnou a imaginární část funkce $f(x)$.

Tyto integrální vztahy budeme aplikovat na funkci

$$\kappa(\omega) = \kappa'(\omega) + i\kappa''(\omega).$$

Položíme-li $x = \omega$, $x' = \Omega$, pak dostaneme

$$\kappa''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa'(\Omega) d\Omega}{\Omega - \omega}, \quad \text{VIII(6.15)}$$

$$\kappa'(\omega) = +\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa''(\Omega) d\Omega}{\Omega - \omega}. \quad \text{VIII(6.16)}$$

Z vyjádření $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0[1 + \kappa(\omega)]$ plynou odpovídající vztahy pro permitivitu

$$\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0 = +\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\Omega) d\Omega}{\Omega - \omega}, \quad \text{VIII(6.17)}$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(\Omega) - \varepsilon_0}{\Omega - \omega} d\Omega. \quad \text{VIII(6.18)}$$

Tyto důležité vztahy svazující disipativní (imaginární) a nedisipativní (reálnou) část permitivity prvně odvodili H. KRAMERS a R. KRONIG (1927), nazývají se proto *Kramersovými—Kronigovými disperzními vztahy*.

Jelikož $\varepsilon''(-\Omega) = -\varepsilon''(\Omega)$, bude

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega &= \int_{-\infty}^0 \frac{\varepsilon''(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega + \int_0^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega = \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{\Omega + \omega} - \frac{1}{\Omega - \omega} \right] \varepsilon''(\Omega) d\Omega. \end{aligned}$$

Místo VIII(6.17) pak budeme mít

$$\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\Omega \varepsilon''(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega. \quad \text{VIII(6.19)}$$

U značné části látek lze položit permeabilitu $\mu \cong \mu_0$. Relativní permitivita $\varepsilon^{(r)} \equiv \varepsilon/\varepsilon_0$ souvisí s indexem lomu $N(\omega)$ vztahem

$$\varepsilon^{(r)}(\omega) = N^2(\omega),$$

takže Kramersovy—Kronigovy relace spojují také reálnou a imaginární část (kvadrátu) indexu lomu.

U kovů je nutno uvážit, že v bodě $\omega = 0$ má $\varepsilon(\omega)$ pól $i\gamma/\omega$. Tento pól obejdeme infinitezimálním obloučkem, což dá příspěvek γ/ω . Příslušné disperzní vztahy pak zní

$$\varepsilon'(\omega) - \varepsilon_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon''(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega, \quad \text{VIII(6.20)}$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon'(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega + \frac{\gamma}{\omega}. \quad \text{VIII(6.21)}$$

Obdobným způsobem se odvodí disperzní relace pro permeabilitu $\mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)$.

Z Kramersových—Kronigových relací se snadno odvodí nerovnosti (viz úlohy k této kapitole)

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} > 0, \quad \frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} > \frac{2}{\omega} (\varepsilon_0 - \varepsilon) \quad \text{VIII(6.22)}$$

a obdobné nerovnosti pro $\mu(\omega)$.

Položíme-li $\mu = \mu_0$, pak $(\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/2} = N(\omega)$. Nerovnosti VIII(6.22) pak přejdou na

$$\frac{d(\omega N)}{d\omega} > N, \quad \frac{d(\omega N)}{d\omega} > \frac{1}{N}. \quad \text{VIII(6.23)}$$

Z těchto vztahů odvodíme důležité nerovnosti pro *grupovou rychlost*

$$W = \frac{d\omega}{dk}.$$

Jelikož $k = N\omega/c$, je

$$\frac{c}{W} = \frac{d(\omega N)}{d\omega}. \quad \text{VIII(6.24)}$$

Nerovnosti VIII(6.23) přejdou na tvar

$$NW < c, \quad W < Nc. \quad \text{VIII(6.25)}$$

Při $N \geq 1$ i při $N \leq 1$ je grupová rychlost $W \leq c$. (Rovnost nastává pouze při $N = 1$.) Z nerovnosti také plyne, že $W > 0$, tj. grupová rychlost míří na stejnou stranu jako vlnový vektor.

Zobecnění výsledků na anizotropní prostředí je přímočaré. Místo VIII(6.1) a VIII(6.2) bude mít

$$P_i(\omega) = \epsilon_0 \kappa_{ik}(\omega) E_k(\omega), \quad \text{VIII(6.26)}$$

$$\kappa_{ik} = \int_0^\infty K_{ik}(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad \text{VIII(6.27)}$$

Zavedeme-li reálné a imaginární části

$$\kappa_{ik} = \kappa'_{ik} + i\kappa''_{ik}, \quad \text{VIII(6.28)}$$

odpovídající Kramersovy—Kronigovy relace pak budou

$$\kappa''_{ik}(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa'_{ik}(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega, \quad \text{VIII(6.29)}$$

$$\kappa'_{ik}(\omega) = +\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa''_{ik}(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega. \quad \text{VIII(6.30)}$$

Poznámka: V matematice se integrální transformace

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(t)}{t - x} dt,$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x - t} dx$$

nazývají *Hilbertovou transformací*. Kramersovy—Kronigovy relace můžeme interpretovat tak, že imaginární část susceptibility je Hilbertovou integrální transformací reálné části susceptibility (a obráceně).

IX.1 Základní rovnice. Hraníční podmínky

V předchozích dvou kapitolách jsme se zabývali elektromagnetickými vlnami a jejich šířením v různých druzích neohrazených prostředích.

V kapitole V jsme se seznámili s tím, že časově proměnné elektromagnetické pole je dobrými vodiči odstíněno (pole do vodičů neproniká), čímž vzniká možnost uzavřít elektromagnetické pole do jisté ohraničené části prostoru, popř. vést elektromagnetické vlny v určitém směru.

Elektromagnetické pole na hranicích vyhovuje jistým hraníčním podmínkám (viz níže), které vedou k tomu, že v dané oblasti prostoru mohou existovat a šířit se pouze vlny určitých frekvencí a v určitých směrech.

Teorie elektromagnetických rezonátorů a vlnovodů má v moderní radiotechnice a optice (světlovody) široké pole aplikací.

Zde se omezíme pouze na nejjednodušší případy, které však ilustrují podstatu jevů i metody jejich matematického zpracování.

Budeme vyšetřovat elektromagnetické pole v prázdném prostoru ohraničeném dokonale vodivými stěnami. V Maxwellových rovnicích VIII(1.2) položíme $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$, čímž dostaneme

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad \text{IX(1.1)}$$

K tomu je nutno připojit rovnice

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad \text{IX(1.2)}$$

Pro harmonickou vlnu $\mathbf{E} \sim \exp(-i\omega t)$, $\mathbf{B} \sim \exp(-i\omega t)$ bude platit

$$\text{rot } \mathbf{E} - i\omega \mathbf{B} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} + \frac{i\omega}{c^2} \mathbf{E} = 0. \quad \text{IX(1.3)}$$

Hraniční podmínky najdeme takto: V dokonalém dielektriku je $\gamma_1 = 0$, u dokonalého vodiče je $\gamma_2 = \infty$. Při konečné proudové hustotě \mathbf{j}_2 je $\mathbf{E}_2 = \mathbf{j}_2 / \gamma_2$ rovno nule, $\mathbf{E}_2 = 0$. Obdobně je $\mathbf{B}_2 = 0$. Z podmínek na rozhraní $B_{1n} - B_{2n} = 0$, $E_{1t} - E_{2t} = 0$ pak plyne

$$E_t \equiv E_{1t} = 0, \quad B_n \equiv B_{2n} = 0. \quad \text{IX(1.4)}$$

Tečné složky elektrického pole a normálové složky magnetického pole jsou na hranicích nulové.

Po vyloučení vektoru \mathbf{B} z rovnic IX(1.3) dostaneme standardním postupem

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{IX(1.5)}$$

kde

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad \text{IX(1.6)}$$

Stačí tedy řešit rovnice IX(1.5) s hraniční podmínkou $E_t = 0$. Magnetické pole \mathbf{B} se pak určí přímo z první rovnice IX(1.3) s hraniční podmínkou $E_t = 0$.

Při daných rozměrech a tvaru dutiny mají rovnice IX(1.5) řešení vyhovující hraniční podmínce pouze při zcela určitých hodnotách frekvencí $\omega = ck$. Tyto hodnoty se nazývají *vlastní* nebo *charakteristické frekvence* elektromagnetických kmitů daného rezonátoru. V daném případě ($\gamma_2 = \infty$) elektromagnetické pole neproniká dovnitř kovu, takže nejsou ztráty energie elektromagnetického pole. To značí, že všechny vlastní kmity jsou *netlumené*, a tudíž všechny vlastní frekvence jsou *reálná* čísla.

IX.2 Elektromagnetické kmity v rezonátorech

Budeme hledat vlastní kmity elektromagnetického rezonátoru, jenž má tvar pravoúhlého rovnoběžnostěnu (kvádru). Stěny nechť jsou z dokonale vodivého materiálu.

Potřebujeme tedy řešit rovnice IX(1.5) pro oblast

$$0 \leq x \leq a_1, \quad 0 \leq y \leq a_2, \quad 0 \leq z \leq a_3, \quad \text{IX(2.1)}$$

přičemž na hranicích oblasti platí podmínka IX(1.4).

Z povahy úlohy plyne, že je výhodné užít kartézské souřadnice. Každá z komponent E_x , E_y , E_z vyhovuje rovnici

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(x, y, z) = 0. \quad \text{IX(2.2)}$$

Řešení této rovnice budeme hledat metodou separace proměnných. Za tím účelem položíme

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z). \quad \text{IX(2.3)}$$

Po dosazení do IX(2.2) a jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2.$$

Každý člen na levé straně závisí pouze na jedné proměnné, přičemž součet těchto tří členů je roven konstantě. Tomuto požadavku vyhovíme, když každý z členů bude konstantní, tj. když X , Y , Z budou řešením rovnic

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k_1^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_2^2 Y = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} + k_3^2 Z = 0, \quad \text{IX(2.4)}$$

přičemž separační parametry k_1 , k_2 , k_3 splňují podmínku

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = k^2. \quad \text{IX(2.5)}$$

Každá z rovnic IX(2.4) má řešení typu $A_1 \sin(k_1 x) + A_2 \cos(k_1 x)$. Řešení IX(2.3) se tak vyjádří vztahem

$$\psi(x, y, z) = (A_1 \sin k_1 x + A_2 \cos k_1 x) \cdot (B_1 \sin k_2 y + B_2 \cos k_2 y) \cdot (C_1 \sin k_3 z + C_2 \cos k_3 z).$$

Nechť ψ značí komponentu E_x . Podmínka IX(1.4) pak vyžaduje, aby při $y = 0$, $z = 0$ bylo $\psi(x, 0, 0) = 0$. Odtud plyne, že musí být $B_2 = C_2 = 0$. Komponenta E_x je pak dána rovnicí

$$E_x = (A_1 \sin k_1 x + A_2 \cos k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) e^{-i\omega t}.$$

Na základě stejných argumentů dostaneme pro složky E_y , E_z

$$E_y = (A_3 \sin k_2 y + A_4 \cos k_2 y) \sin(k_1 x) \sin(k_3 z) e^{-i\omega t},$$

$$E_z = (A_5 \sin k_3 z + A_6 \cos k_3 z) \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) e^{-i\omega t}.$$

Z podmínky $\text{div } \mathbf{E} = 0$, které musí platit všude, plyne

$$(A_1 k_1 \cos k_1 x - A_2 k_1 \sin k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) + (A_3 k_2 \cos k_2 y - A_4 k_2 \sin k_2 y) \sin(k_1 x) \sin(k_3 z) + (A_5 k_3 \cos k_3 z - A_6 k_3 \sin k_3 z) \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) = 0.$$

Položíme-li $x = 0$ dostaneme $A_1 = 0$. Obdobně při $y = 0$, resp. $z = 0$ dostaneme $A_3 = 0$, resp. $A_5 = 0$.

Elektrické pole $\mathbf{E} \equiv (E_x, E_y, E_z)$ v daném rezonátoru je

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) e^{-i\omega t}, \\ E_y &= E_2 \sin(k_1 x) \cos(k_2 y) \sin(k_3 z) e^{-i\omega t}, \\ E_z &= E_3 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \cos(k_3 z) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad \text{IX(2.6)}$$

Podmínka $\text{div } \mathbf{E} = 0$ pak svazuje amplitudy E_1, E_2, E_3 rovnicí

$$k_1 E_1 + k_2 E_2 + k_3 E_3 = 0. \quad \text{IX(2.7)}$$

Zatím jsme nevyužili podmínek při $x = a_1, y = a_2, z = a_3$. Anulování E_x při $y = a_2, z = a_3$ vyžaduje, aby bylo $k_2 a_2 = n_2 \pi, k_3 a_3 = n_3 \pi$, kde $n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots$. Možné hodnoty separačních parametrů k_1, k_2, k_3 jsou

$$k_1 = n_1 \frac{\pi}{a_1}, \quad k_2 = n_2 \frac{\pi}{a_2}, \quad k_3 = n_3 \frac{\pi}{a_3},$$

$$n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \dots$$

Vztahem IX(2.5) jsou určeny vlastní frekvence

$$\omega \equiv \omega(n_1, n_2, n_3) = \pi c \left[\left(\frac{n_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{n_3}{a_3} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad \text{IX(2.8)}$$

Z vyjádření IX(2.6) plyne, že jsou-li všechna tři čísla n_1, n_2, n_3 rovna nule, je také pole $\mathbf{E} = 0$. Pole \mathbf{E} je rovno nule i tehdy, jsou-li dvě z čísel n_1, n_2, n_3 nulová. Necht $n_2 = n_3 = 0$, pak Lorentzova podmínka IX(2.7) implikuje $n_1 E_1 = 0$. Podle předpokladu je $n_1 \neq 0$, a tudíž $E_1 = 0$.

První (nejnižší) vlastní frekvenci tedy odpovídá kmit, v němž jedno z těchto čísel n_1, n_2, n_3 je rovno nule a zbývající dvě jsou rovny jedné.

Vlivem vazby IX(2.7) obsahuje řešení IX(2.6) s danými nenulovými n_1, n_2, n_3 pouze dvě nezávislé libovolné konstanty. Každý takový vlastní kmit je dvojnásobně degenerován.

Parametry k_1, k_2, k_3 můžeme interpretovat jako složky vektoru $\mathbf{k} \equiv (k_1, k_2, k_3)$, takže podmínka IX(2.7) vyjadřuje kolmost vektorů \mathbf{E} a \mathbf{k} .

Magnetické pole \mathbf{B} určíme pomocí první rovnice soustavy IX(1.3)

$$\begin{aligned} i \omega B_x &= B_1 \sin(k_1 x) \cos(k_2 y) \cos(k_3 z) e^{-i \omega t}, \\ i \omega B_y &= B_2 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \cos(k_3 z) e^{-i \omega t}, \\ i \omega B_z &= B_3 \cos(k_1 x) \cos(k_2 y) \sin(k_3 z) e^{-i \omega t}, \end{aligned} \quad \text{IX(2.9)}$$

kde

$$B_1 = k_2 E_3 - k_3 E_2, \quad B_2 = k_3 E_1 - k_1 E_3, \quad B_3 = k_1 E_2 - k_2 E_1. \quad \text{IX(2.10)}$$

Snadno se přesvědčíme, že platí

$$k_1 B_1 + k_2 B_2 + k_3 B_3 = 0, \quad \text{IX(2.11)}$$

což vyjadřuje kolmost vektorů \mathbf{k} a \mathbf{B} . Obdobně platí

$$E_1 B_1 + E_2 B_2 + E_3 B_3 = 0, \quad \text{IX(2.12)}$$

což vyjadřuje kolmost vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} .

Řešení IX(2.6) a IX(2.9) představují stojaté vlny, v nichž trojice vektorů $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{k}$ tvoří ortogonální soustavu.

Ve vyšetřovaném případě s ideálně vodivými stěnami se energie elektromagnetických kmitů stěnami neabsorbují. V reálných rezonátorech s konečnou vodivostí stěn je energie absorbována stěnami rezonátoru. V takovém případě je nutno IX(1.4) nahradit odpovídajícími podmínkami pro stěny s konečnou vodivostí. Rezonátor může být zaplněn dielektrikem nebo jiným prostředím. Těmito otázkami se však zde nemůžeme zabývat, čtenář nalezne bližší poučení ve speciální literatuře.

IX.3 Vlnovod obdélníkového průřezu

Vlastní kmity rezonátoru konečných rozměrů jsou stojaté transverzální vlny. Vlnovod představuje dutinu neohrazené délky, takže vlna je v něm stojatá pouze v příčném směru, zatímco ve směru délky trubice je možné šíření běžících vln. Uvnitř vlnovodu je vakuum.

Budeme uvažovat vlnovod obdélníkového průřezu s dokonale vodivými stěnami. Dokonalá vodivost stěn vede z bezztrátového šíření vln.

Další postup je obdobný jako v případě rezonátoru. Potřebujeme řešit rovnice IX(1.3), popř. IX(1.5) s hraničními podmínkami IX(1.4) pro běžící vlnu typu $\exp[i(\kappa z - \omega t)]$.

Každá komponenta elektrického pole $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(x, y, z, t)$ vyhovuje rovnici

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(x, y, z, t) = 0, \quad \text{IX(3.1)}$$

kde

$$\psi(x, y, z, t) = f(x, y) e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad \text{IX(3.2)}$$

Parametr κ , jenž charakterizuje šíření vlny ve směru osy z , se nazývá konstantou (parametrem) šíření. Po dosazení IX(3.2) do IX(3.1) dostaneme pro $f(x, y)$ rovnici

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x, y) + \mu^2 f(x, y) = 0, \quad \text{IX(3.3)}$$

kde

$$\mu^2 = k^2 - \kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2 \quad \text{IX(3.4)}$$

je dosud neznámé číslo, jehož hodnoty určíme z hraničních podmínek.

Řešení rovnice IX(3.3) budeme opět hledat metodou separace proměnných, tj. položíme

$$f(x, y) = X(x)Y(y). \quad \text{IX(3.5)}$$

Po dosazení do IX(3.3) a jednoduché úpravě dospějeme k rovnici

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \mu^2.$$

Levá strana je funkcí pouze proměnné x , pravá strana závisí pouze na proměnné y . Má-li tato rovnice platit pro libovolné x, y , musí být obě strany rovny téže konstantě, již označíme $-\alpha^2$. Dostáváme tak rovnice

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0, \quad \text{IX(3.6)}$$

V nichž konstanty α, β jsou vázány vztahem

$$\alpha^2 + \beta^2 = \mu^2. \quad \text{IX(3.7)}$$

Řešení rovnic IX(3.6) je tvaru

$$X(x) = A \sin(\alpha x) + F \cos(\alpha x), \\ Y(y) = C \sin(\beta y) + D \cos(\beta y).$$

Na stěnách vlnovodu vymizí tečné složky vektoru \mathbf{E} , což značí, že pro všechna z a t musí platit

$$E_z = 0, \quad E_y = 0 \quad \text{pro } x = 0, a_1 \quad \text{a} \quad 0 \leq y \leq a_2, \quad \text{IX(3.8)}$$

$$E_z = 0, \quad E_x = 0 \quad \text{pro } y = 0, a_2 \quad \text{a} \quad 0 \leq x \leq a_1. \quad \text{IX(3.9)}$$

Nechť složky E_x, E_y, E_z jsou

$$E_x = [A_1 \sin(\alpha x) + F_1 \cos(\alpha x)][C_1 \sin(\beta y) + D_1 \cos(\beta y)] e^{i(\kappa z - \omega t)}, \\ E_y = [A_2 \sin(\alpha x) + F_2 \cos(\alpha x)][C_2 \sin(\beta y) + D_2 \cos(\beta y)] e^{i(\kappa z - \omega t)}, \\ E_z = [A_3 \sin(\alpha x) + F_3 \cos(\alpha x)][C_3 \sin(\beta y) + D_3 \cos(\beta y)] e^{i(\kappa z - \omega t)}.$$

Podmínka IX(3.8) pro $x = 0$ dá $F_3 = F_2 = 0$ a podmínka IX(3.9) pro $y = 0$ poskytne vztah $D_3 = D_1 = 0$, takže je

$$E_x = C_1 [A_1 \sin(\alpha x) + F_1 \cos(\alpha x)] \sin(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \\ E_y = A_2 \sin(\alpha x) [C_2 \sin(\beta y) + D_2 \cos(\beta y)] e^{i(\kappa z - \omega t)}, \\ E_z = A_3 C_3 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}.$$

Použití podmínky IX(3.8) pro $x = a_1$ a podmínky IX(3.9) pro $y = a_2$ vede ke vztahům $\alpha a_1 = n_1 \pi, \beta a_2 = n_2 \pi$, tj.

$$\alpha = n_1 \frac{\pi}{a_1}, \quad \beta = n_2 \frac{\pi}{a_2}, \quad \text{IX(3.10)}$$

kde

$$n_1, n_2 = 0, 1, 2, \dots$$

jsou nezáporná celá čísla. Tím jsme také zjistili možné hodnoty μ^2 , jež jsou

$$\mu^2 \equiv \mu^2(n_1, n_2) = \pi^2 \left[\left(\frac{n_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{n_2}{a_2} \right)^2 \right], \quad \text{IX(3.11)}$$

což ve spojitosti s IX(3.4) dá

$$\omega = c(\kappa^2 + \mu^2)^{1/2}, \quad \text{IX(3.11')}$$

kde μ je nyní určeno rovnicí IX(3.11).

Veličina $\kappa z - \omega t$ určuje fázi vlny, proto $w = \omega/\kappa$ je fázová rychlost a $W = (\partial \omega / \partial \kappa)$ je grupová rychlost, což dá

$$w = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{c}{\kappa} (c^2 + \kappa^2)^{1/2} \geq c, \quad \text{IX(3.12)}$$

$$W = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa} = \frac{c\kappa}{(\mu^2 + \kappa^2)^{1/2}} \leq c. \quad \text{IX(3.13)}$$

Fázová rychlost je tedy větší nebo nejméně rovna rychlosti světla, což není v rozporu s teorií relativity, poněvadž fázová rychlost w je čistě kinematický pojem, signál je přenášen grupovou rychlostí W , jež nepřesahuje c . Mezi oběma rychlostmi platí vztah $wW = c^2$.

Rovnice IX(3.11) je disperzní zákon $\omega \equiv \omega(\kappa)$. Je vidět, že ve vlnovodu existuje disperze i ve vakuu.

Po těchto vsuvkách přejdeme k úpravě řešení pole \mathbf{E} . Pomocí nalezených řešení E_x, E_y, E_z vypočteme $\text{div } \mathbf{E} = 0$. Ve vzniklé rovnici pak položíme $x = 0$, což dá $A_1 = 0$. Obdobně v rovnici $\text{div } \mathbf{E} = 0$ položíme $y = 0$, čímž dostaneme $D_2 = 0$. Pole \mathbf{E} pak vyjádříme rovnicemi

$$E_x = E_1 \cos\left(n_1 \frac{\pi x}{a_1}\right) \sin\left(n_2 \frac{\pi y}{a_2}\right) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(3.14)}$$

$$E_y = E_2 \sin\left(n_1 \frac{\pi x}{a_1}\right) \cos\left(n_2 \frac{\pi y}{a_2}\right) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(3.15)}$$

$$E_z = E_3 \sin\left(n_1 \frac{\pi x}{a_1}\right) \sin\left(n_2 \frac{\pi y}{a_2}\right) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(3.16)}$$

kde jsme místo $B_1 C_1, A_2 D_2, A_3 C_3$ zavedli označení E_1, E_2, E_3 . Konstanty (amplitudy) E_1, E_2, E_3 však nejsou nezávislé: podmínka $\text{div } \mathbf{E} = 0$ implikuje vztah

$$i\kappa E_3 = \alpha E_1 + \beta E_2 = \pi \left(\frac{n_1}{a_1} E_1 + \frac{n_2}{a_2} E_2 \right) \quad \text{IX(3.17)}$$

Magnetické pole určíme z první rovnice soustavy IX(1.3). Jednoduchým výpočtem získáme magnetické pole

$$B_x = B_1 \sin\left(n_1 \frac{\pi x}{a_1}\right) \cos\left(n_2 \frac{\pi y}{a_2}\right) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(3.18)}$$

$$B_y = B_2 \cos\left(n_1 \frac{\pi x}{a_1}\right) \sin\left(n_2 \frac{\pi y}{a_2}\right) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(3.19)}$$

$$B_z = B_3 \cos\left(n_1 \frac{\pi x}{a_1}\right) \cos\left(n_2 \frac{\pi y}{a_2}\right) e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad \text{IX(3.20)}$$

Amplitudy B_1, B_2, B_3 souvisí s E_1, E_2, E_3 soustavou vztahů

$$i\omega B_1 = n_2 \frac{\pi}{a_2} E_3 - i\kappa E_2 = \beta E_3 - i\kappa E_2, \quad \text{IX(3.21)}$$

$$i\omega B_2 = i\kappa E_1 - n_1 \frac{\pi}{a_1} E_3 = i\kappa E_1 - \alpha E_3, \quad \text{IX(3.22)}$$

$$i\omega B_3 = n_1 \frac{\pi}{a_1} E_2 - n_2 \frac{\pi}{a_2} E_1 = \alpha E_2 - \beta E_1. \quad \text{IX(3.23)}$$

S ohledem na vazbu IX(3.17) se jedná o pouhé dvě nezávislé konstanty (amplitudy), např. E_1, E_2 . Vhodnou volbou těchto konstant lze provést klasifikaci možných typů vln ve vlnovodu (lord RAYLEIGH, 1897), čímž se budeme zabývat v následujícím článku. Dříve než přejdeme k této klasifikaci zřekapitulujeme rozdíly mezi vlnami v rezonátoru a vlnovodu. Řešení IX(2.6) představuje stojaté vlny ve všech směrech rezonátoru. Naproti tomu IX(3.14)—IX(3.16) popisují vlny stojaté v rovině průřezu vlnovodu (tj. kolmo k ose vlnovodu), avšak ve směru délky vlnovodu je vlna běžící (postupná).

IX.4 Vlny elektrického a magnetického typu

Pole \mathbf{E}, \mathbf{B} ve vyšetřovaném vlnovodu závisí (při daných n_1, n_2) na dvou konstantách (amplitudách) E_1, E_2 . Je výhodné klasifikovat tato řešení podle speciální volby těchto konstant.

V prvním případě zvolíme

$$E_2 = \frac{\beta}{\alpha} E_1. \quad \text{IX(4.1)}$$

Z definice IX(3.23) pak plyne, že při této volbě je

$$B_3 = 0. \quad \text{IX(4.2)}$$

V takovém případě pak vymizí longitudinální složka B_z magnetického pole $B_z = 0$. Magnetické pole má pouze transverzální složky, proto se vlny daného typu nazývají vlnami typu TM (*transverzálně magnetické*). Z vyjádření IX(3.14) až IX(3.16) je vidět, že elektrické pole má v daném případě nenulové všechny tři složky (tj. i longitudinální), což je důvod, proč se takové vlny označují jako vlny elektrického typu, zkráceně vlny typu E.

Přejdeme nyní k určení pole ve vlně typu E. Po dosazení IX(4.1) do IX(3.14) až IX(3.20) dostaneme

$$E_x = E_1 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(4.3)}$$

$$E_y = \frac{\beta}{\alpha} E_1 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(4.4)}$$

$$E_z = -\frac{i\mu^2}{\kappa\alpha} E_1 \sin(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(4.5)}$$

$$B_x = -\frac{\beta\omega}{\alpha\kappa c^2} E_1 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(4.6)}$$

$$B_y = \frac{\omega}{\kappa c^2} E_1 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(4.7)}$$

$$B_z = 0. \quad \text{IX(4.8)}$$

Při úpravách jsme užili definičních vztahů pro veličiny α, β, μ . V teorii se často volí místo E_1 nová konstanta $A \equiv A(n_1, n_2)$ vztahem $E_1 = -i\kappa\alpha A$. Odpovídající transformace získaných vzorců je triviální.

Položíme-li v rovnicích IX(4.3) až IX(4.8) $\beta = 0$ (tj. $n_2 = 0$), pak automaticky vymizí všechny složky polí \mathbf{E} a \mathbf{B} . Při $\alpha = 0$ zbyde pouze $E_x = E_1 \sin(\beta y) \exp[i(\kappa z - \omega t)]$. Jelikož $\text{div } \mathbf{E} = 0$, bude $(\partial E_x / \partial x) = 0$, což vyžaduje, aby bylo $\beta \cos(\beta y) = 0$ pro všechna y . Musí být tedy také $\beta = 0$.

U vln elektrického typu může tedy existovat pouze vlna s oběma nenulovými indexy $n_1 \neq 0, n_2 \neq 0$.

Ve druhém případě zvolíme $E_3 = 0$, tj. $E_1 = -(\beta/\alpha)E_2$. Za nezávislou amplitudu zvolíme B_3 . Z rovnice IX(3.23) pak plyne $i\omega\beta B_3 = -\mu^2 E_1$. Tím jsou E_1 a E_2 vyjádřeny pomocí B_3 . Ze vztahů IX(3.21) a IX(3.22) vypočteme B_1, B_2 pomocí B_3 . Výsledkem těchto elementárních úprav jsou následující rovnice pro pole

$$E_x = -\frac{\beta\omega}{\mu^2} B_3 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(4.9)}$$

$$E_y = \frac{i\alpha\omega}{\mu^2} B_3 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(4.10)}$$

$$E_z = 0, \quad \text{IX(4.11)}$$

$$B_x = -\frac{i\kappa\alpha}{\mu^2} B_3 \sin(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(4.12)}$$

$$B_y = -\frac{i\kappa\beta}{\mu^2} B_3 \cos(\alpha x) \sin(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad \text{IX(4.13)}$$

$$B_z = B_3 \cos(\alpha x) \cos(\beta y) e^{i(\kappa z - \omega t)}. \quad \text{IX(4.14)}$$

Longitudinální složka elektrického pole je nulová ($E_z = 0$) a magnetické pole má nenulové všechny tři složky. Z tohoto důvodu se daný druh vln nazývá vlnami

magnetického typu, zkráceně vlnami typu H, resp. B. Transverzálnost elektrického pole je důvodem technického označení těchto vln symbolem TE — *transverzálně elektrické*. Snadno se přesvědčíme, že na rozdíl od vln elektrického typu mohou existovat vlny magnetického typu, jejichž jeden index je nula.

X.1 Elektromagnetické potenciály

V předešlých kapitolách jsme řešili některé úlohy šíření elektromagnetických vln bez použití elektromagnetických potenciálů. Při zkoumání procesu vyzařování elektromagnetických vln je však výhodné použití elektromagnetických potenciálů. Způsob zavedení potenciálů je obdobný jako v elektrostaticce a magnetostaticce, avšak potenciály budou nyní záviset také na čase.

Vyjdeme ze soustavy Maxwellových rovnic

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad \text{X(1.1)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad \text{X(1.2)}$$

přičemž budeme předpokládat lineární materiálové vztahy

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad \text{X(1.3)}$$

Rovnici $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ lze (obdobně jako ve statickém případě) splnit identicky tak, že položíme (viz čl. I.6)

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \text{X(1.4)}$$

přičemž nyní je

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad \text{X(1.5)}$$

Vektorový potenciál \mathbf{A} není určen jednoznačně, neboť k němu lze přidat gradient libovolné diferencovatelné funkce, aniž by se tím změnilo pole \mathbf{B} . O důsledcích jež z toho plynou, pojednáme v další části této kapitoly.

Po dosazení X(1.4) do první rovnice X(1.2) dostaneme

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Odtud s ohledem na identitu $\text{rot grad} \equiv 0$ plyne

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi, \quad \text{X(1.6)}$$

kde skalární potenciál Φ je funkcí souřadnic a času

$$\Phi \equiv \Phi(\mathbf{r}, t). \quad \text{X(1.7)}$$

Vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} jsme vyjádřili pomocí potenciálů \mathbf{A} a Φ . K tomu, aby takové vyjádření mělo praktickou cenu potřebujeme najít rovnice pro tyto potenciály. Za tím účelem dosadíme X(1.4) a X(1.6) do rovnic obsahujících ρ a \mathbf{j} .

Celkovou proudovou hustotu \mathbf{j} rozdělíme na dvě části: vodivý proud $\gamma \mathbf{E}$ a proudovou hustotu \mathbf{J} vnějších zdrojů

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} + \mathbf{J}. \quad \text{X(1.8)}$$

Po dosazení do druhé rovnice X(1.2) dostaneme

$$\text{rot } \mathbf{B} - \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \gamma \mu \mathbf{E} = \mu \mathbf{J}. \quad \text{X(1.9)}$$

(Nadále budeme mít na mysli homogenní prostředí s konstantními ε , μ , γ .)

Po zavedení vztahů X(1.4) a X(1.6) do X(1.9) dospějeme po jednoduchých úpravách k rovnici

$$\square \mathbf{A} - \gamma \mu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \left(\text{div } \mathbf{A} + \varepsilon \mu \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \gamma \mu \Phi \right) = -\mu \mathbf{J}. \quad \text{X(1.10)}$$

Zde jsme zavedli *d'Alembertův operátor*

$$\square = \nabla^2 - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla^2 - \frac{N^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad \text{X(1.11)}$$

Dosadíme-li vyjádření X(1.6) do první rovnice X(1.1), získáme druhou rovnici pro potenciály

$$\nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad \text{X(1.12)}$$

Rovnice X(1.10) a X(1.12) představují simultánní soustavu parciálních diferenciálních rovnic pro skalární a vektorový potenciál. Řešením této soustavy a pomocí vztahů X(1.4) a X(1.6) získáme vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} .

X.2 Kalibrační invariantnost

Rovnice X(1.10) a X(1.12) pro potenciály jsou zbytečně složité. Ke zjednodušení této soustavy lze s výhodou využít zmíněné nejednoznačnosti (libovůle) v definici potenciálů.

Místo vektorového potenciálu \mathbf{A} lze vzít překalibrovaný potenciál

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f, \quad f \equiv f(\mathbf{r}, t), \quad \text{X(2.1)}$$

aniž by se tím změnilo pole \mathbf{B} . Pole \mathbf{B} vypočtené pomocí tohoto nového potenciálu \mathbf{A}' dá

$$\mathbf{B}' = \text{rot } \mathbf{A}' = \text{rot}(\mathbf{A} + \nabla f) = \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}. \quad \text{X(2.2)}$$

Vektor \mathbf{E} závisí kromě \mathbf{A} také na Φ . Má-li zůstat \mathbf{E} invariantní vůči kalibraci X(2.1), nutno spolu s \mathbf{A} překalibrovat také skalární potenciál.

Ze struktury výrazu X(1.6) je vidět, že když spolu s kalibrací X(2.1) zavedeme překalibrovaný potenciál

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \text{X(2.3)}$$

elektrická intenzita se při tom nemění. Je totiž

$$\mathbf{E}' = -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \Phi' = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi = \mathbf{E}. \quad \text{X(2.4)}$$

Invariantnost vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} vůči transformacím X(2.1) a X(2.3) nazýváme *kalibrační* (neboli též *cejchovací*, popř. *gradientní*) *invariantností*.

Transformace X(2.1) a X(2.3) nemění nejen Maxwellovy rovnice, ale zřejmě i výrazy pro Lorentzovu sílu

$$\mathbf{F} = e \mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}],$$

popř. hustotu této síly

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{j}, \mathbf{B}].$$

Poznámka: V teorii relativity se zavádí čtyřvektor polohy

$$x_\mu \equiv (\mathbf{r}, ict)$$

a čtyřvektorový potenciál

$$\mathfrak{A} \equiv (c\mathbf{A}, i\Phi).$$

Transformace X(2.1) a X(2.3) lze pak sjednotit do jedné čtyřvektorové rovnice

$$A'_\nu = A_\nu + \frac{\partial f}{\partial x_\nu}, \quad (\nu = 1, 2, 3, 4).$$

Veličiny $(\partial f / \partial x_\nu)$ jsou složky gradientu ve čtyřrozměrném prostoru, což vysvětluje původ názvu gradientní invariantnost navrženého V. A. FOKEM.

X.3 Lorentzova podmínka

Nejednoznačnost ve volbě potenciálů lze využít k tomu, abychom na tyto potenciály naložili vhodnou kalibrační podmínku.

Inspiraci lze získat z rovnice X(1.10). Kdyby bylo $\text{div } \mathbf{A} + \epsilon\mu(\partial\Phi/\partial t) + \gamma\mu\Phi = 0$, měli bychom separovanou rovnici pro vektorový potenciál $\square\mathbf{A} - \gamma\mu(\partial\mathbf{A}/\partial t) = -\mu\mathbf{J}$. Ukážeme, že takovou podmínku lze na \mathbf{A} a Φ skutečně naložit.

Nechť \mathbf{A} , Φ je nějaké řešení rovnic X(1.10) a X(1.12). Označme

$$L(\mathbf{r}, t) \equiv \text{div } \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \gamma\mu\Phi \quad \text{X(3.1)}$$

a vypočteme obdobný výraz $L(\mathbf{r}, t)$ vytvořený pomocí překalibrovaných potenciálů \mathbf{A}' , Φ'

$$L'(\mathbf{r}, t) \equiv \text{div } \mathbf{A}' + \epsilon\mu \frac{\partial\Phi'}{\partial t} + \gamma\mu\Phi' = L(\mathbf{r}, t) + \square f - \gamma\mu \frac{\partial f}{\partial t}. \quad \text{X(3.2)}$$

Funkci $f \equiv f(\mathbf{r}, t)$, která byla doposud libovolná, zvolíme tak, aby byla řešením rovnice

$$\square f - \gamma\mu \frac{\partial f}{\partial t} + L(\mathbf{r}, t) = 0. \quad \text{X(3.3)}$$

Tím bude $L' = 0$, tj. bude platit tzv. *Lorentzova podmínka*

$$\text{div } \mathbf{A}' + \gamma\mu \frac{\partial\Phi'}{\partial t} + \gamma\mu\Phi' = 0. \quad \text{X(3.4)}$$

Pro vektorový potenciál \mathbf{A}' tak získáme rovnici

$$\square\mathbf{A}' - \gamma\mu \frac{\partial\mathbf{A}'}{\partial t} = -\mu\mathbf{J}, \quad \text{X(3.5)}$$

která má tvar *nehomogenní telegrafní rovnice* (viz čl. VII.1) neboli telegrafní rovnice s pravou stranou.

Zavedeme-li do rovnice X(1.12) překalibrované potenciály, dostaneme stejnou rovnici

$$\nabla^2\Phi' + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{A}' = -\frac{\rho}{\epsilon}.$$

Člen $\text{div } \mathbf{A}'$ vyloučíme pomocí Lorentzovy podmínky X(3.4). Po jednoduché úpravě dospějeme k rovnici

$$\square\Phi' - \gamma\mu \frac{\partial\Phi'}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad \text{X(3.6)}$$

To je opět separovaná rovnice pro skalární potenciál Φ' , přičemž tato rovnice má stejný tvar jako rovnice X(3.5) pro vektorový potenciál \mathbf{A}' .

Je však třeba říci, že ani kalibracemi X(2.1) a X(2.3) s funkcí f vyhovující rovnici X(3.3) nejsou potenciály \mathbf{A}' , Φ' určeny jednoznačně. V řešení rovnice X(3.3) máme totiž k dispozici ještě řešení f_0 homogenní rovnice

$$\square f_0 - \gamma\mu \frac{\partial f_0}{\partial t} = 0. \quad \text{X(3.7)}$$

Pomocí této funkce f_0 provedeme novou kalibraci

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}'' - \nabla f_0, \quad \Phi' = \Phi'' + \frac{\partial f_0}{\partial t} \quad \text{X(3.8)}$$

Nové potenciály Φ'' , \mathbf{A}'' opět vyhovují Lorentzově podmínce

$$\text{div } \mathbf{A}'' + \epsilon\mu \frac{\partial\Phi''}{\partial t} + \gamma\mu\Phi'' = 0, \quad \text{X(3.9)}$$

a splňují tedy rovnice

$$\left(\square - \gamma\mu \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{A}'' = -\mu\mathbf{J}, \quad \text{X(3.10)}$$

$$\left(\square - \gamma\mu \frac{\partial}{\partial t}\right) \Phi'' = -\frac{\rho}{\epsilon}. \quad \text{X(3.11)}$$

Ve speciálních případech, o nichž se dále zmíníme, lze této další nejednoznačnosti s výhodou využít.

V nevodivém prostředí ($\gamma = 0$) se Lorentzova podmínka zredukuje

$$\text{div } \mathbf{A}' + \epsilon\mu \frac{\partial\Phi'}{\partial t} = 0, \quad (\gamma = 0). \quad \text{X(3.12)}$$

ve vakuu ($\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\epsilon_0\mu_0c^2 = 1$) je

$$\text{div } \mathbf{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\Phi'}{\partial t} = 0, \quad (\text{ve vakuu}), \quad \text{X(3.13)}$$

přičemž \mathbf{A}' , Φ' vyhovují nehomogenním vlnovým rovnicím

$$\square\mathbf{A}' = -\mu_0\mathbf{J}, \quad (\text{ve vakuu}), \quad \text{X(3.14)}$$

$$\square\Phi' = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (\text{ve vakuu}). \quad \text{X(3.15)}$$

V oblasti, kde nejsou ani náboje ani proudy, máme pro potenciály \mathbf{A}' , Φ' homogenní vlnové rovnice

$$\square\mathbf{A}' = 0, \quad \square\Phi' = 0. \quad \text{X(3.16)}$$

V tomto případě lze tyto rovnice dále zjednodušit. Zavedeme-li kalibrační funkci f_0 vyhovující rovnici

$$\square f_0 = 0 \quad \text{X(3.17)}$$

a nové potenciály $\mathbf{A}'' = \mathbf{A}' + \nabla f_0$, $\Phi'' = \Phi' - (\partial f_0 / \partial t)$, pak je

$$\square \left(\Phi'' + \frac{\partial f_0}{\partial t} \right) = 0, \quad \square \Phi'' = 0.$$

Jelikož Φ' , Φ'' a f_0 vyhovují stejné rovnici, lze najít takové řešení, že

$$\Phi'' = 0, \quad \text{X(3.18)}$$

a zbývá pouze rovnice pro vektorový potenciál \mathbf{A}''

$$\square \mathbf{A}'' = 0. \quad \text{X(3.19)}$$

Lorentzova podmínka pro nové potenciály \mathbf{A}'' , Φ'' , tj. rovnice

$$\text{div } \mathbf{A}'' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi''}{\partial t} = 0,$$

se pak zredukuje na tvar

$$\text{div } \mathbf{A}'' = 0. \quad \text{X(3.20)}$$

Výhodnost této podmínky proilustrujeme následujícím příkladem. Rovnice X(3.19) má řešení ve tvaru rovinné monochromatické vlny

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}_0'' \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad \text{X(3.21)}$$

které po dosazení do X(3.20) dá

$$(\mathbf{k}\mathbf{A}'') = 0. \quad \text{X(3.22)}$$

Ve volném prostoru bez nábojů a proudů lze potenciály \mathbf{A}'' , Φ'' překalibrovat tak, aby bylo $\Phi'' = 0$ a vektorový potenciál \mathbf{A}'' byl *transverzální*. Pole \mathbf{E} , \mathbf{B} ve volném prostoru se vypočtou z rovnic

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}''}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}''. \quad \text{X(3.23)}$$

S ohledem na závažnost získaných výsledků provedeme ještě jejich shrnutí. Elektromagnetické pole v prostředí jsme původně popsali dvěma třírozměrnými vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} , tj. celkem šesti veličinami. Pro tyto vektory platí soustava Maxwellových rovnic, což je z matematického hlediska soustava vázaných parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. Vztahy X(1.4) a X(1.6) jsme tyto dva vektory \mathbf{E} a \mathbf{B} vyjádřili pomocí jedné skalární funkce Φ a jednoho třírozměrného vektoru \mathbf{A} , tj. pomocí čtyř veličin A_1, A_2, A_3, Φ . Na tyto čtyři veličiny lze naložit vhodnou vazební podmínku, např. Lorentzova typu X(3.4), takže zbývají pouze tři nezávislé veličiny. Díky této vazební podmínce vznikne pro potenciály \mathbf{A} , Φ

soustava *nezávislých* parciálních diferenciálních rovnic *druhého* řádu. Řešení těchto rovnic jsou však vzájemně *svázána* Lorentzovou podmínkou. Nesmíme při tom zapomenout, že *cenou* za tuto redukci počtu veličin na tři a za separaci rovnic bylo *zvýšení řádu* těchto rovnic. Rovnice druhého řádu mají dvojnásobek počtu řešení rovnic prvního řádu, čímž je vysvětleno pozadí redukce šesti veličin \mathbf{E} , \mathbf{B} na tři.

V prázdném prostoru lze skalární potenciál volného elektromagnetického pole položit rovným nule a na vektorový potenciál naložit podmínku transverzálnosti X(3.20), čímž se stanou nezávislými pouze dvě složky vektorového potenciálu.

Lorentzova podmínka je výhodná také s ohledem na rovnici kontinuity. Jsou-li v rovnicích $\square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}$, $\square \Phi = -\rho/\epsilon$ potenciály \mathbf{A} , Φ vázány podmínkou $\text{div } \mathbf{A} + \epsilon\mu(\partial \Phi / \partial t) = 0$, je tím garantována automaticky také platnost rovnice $\text{div } \mathbf{j} + (\partial \rho / \partial t) = 0$. Zapůsobíme-li na rovnici $\square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}$ operátorem div a na rovnici $\square \Phi = -\rho/\epsilon$ operátorem $\partial / \partial t$, pak $\text{div } \mathbf{A} + \epsilon\mu(\partial \Phi / \partial t) = 0$ implikuje $(\partial \rho / \partial t) + \text{div } \mathbf{j} = 0$.

X.4 Retardované a avanceované potenciály

S ohledem na další aplikace budeme uvažovat elektromagnetické pole ve vakuu vytvořené náboji s prostorovou hustotou $\rho \equiv \rho(\mathbf{r}, t)$ a proudy s proudovou hustotou $\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$.

Vektorový a skalární potenciál vyhovuje rovnicím X(3.14) a X(3.15) a Lorentzově podmínce X(3.13). Vynecháme-li čárky u označení potenciálů, budeme mít výchozí soustavu rovnic

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad \text{X(4.1)}$$

$$\square \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \text{X(4.2)}$$

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \text{X(4.3)}$$

Řešení rovnic X(4.1) a X(4.2) najdeme následující fyzikální úvahou, jejíž správnost později ověříme přímým výpočtem.

Ve statickém případě se X(4.2) redukuje na Laplaceovu—Poissonovu rovnici

$$\nabla^2 \Phi^{(0)} = -\frac{\rho^{(0)}}{\epsilon_0},$$

jejíž řešení známe z úvodní kapitoly

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho^{(0)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'.$$

Rovnici X(4.4) získáme z X(4.2) formální záměnou $c \rightarrow \infty$, tj. přechodem k okamžitému šíření rozruchu.

Víme však, že elektromagnetický rozruch se šíří konečnou rychlostí, která je ve vakuu rovna rychlosti světla c . Nastane-li v rozdělení nábojů a proudů nějaká změna v čase t , vzniknou následné změny v elektromagnetickém poli. Ve vzdálenosti $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ od zdrojů se tato změna projeví se zpožděním $\Delta t = R/c$, tj. o dobu, kterou elektromagnetický signál potřebuje k uražení vzdálenosti mezi polohou zdroje a místem pozorování pole. Dá se proto očekávat, že k určení potenciálu $\Phi(\mathbf{r}, t)$ v čase t nutno znát rozdělení nábojů $\rho(\mathbf{r}', t')$ v čase

$$t_- \equiv t' = t - \frac{R}{c}. \quad \text{X(4.4)}$$

Řešení rovnic X(4.1) a X(4.2) lze vyjádřit vztahy

$$\mathbf{A}^{(a)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} d^3 r', \quad \text{X(4.5)}$$

$$\Phi^{(a)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{R} d^3 r'. \quad \text{X(4.6)}$$

Tyto výrazy jsou obdobou řešení Laplaceovy—Poissonovy rovnice s tím podstatným rozdílem, že berou v úvahu konečnou rychlost šíření elektromagnetických signálů.

Jelikož X(4.5) a X(4.6) respektují retardaci (zpoždění) pole za jeho zdrojem, nazývají se tato řešení *retardované* neboli *zpožděné potenciály*.

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že řešení X(4.5) a X(4.6) vyhovují rovnicím X(4.1) a X(4.2), jakož i Lorentzově podmínce X(4.3). Podrobnosti výpočtu uvádíme v úlohách k této kapitole.

Poněvadž rovnice X(4.1) a X(4.2) jsou invariantní vůči záměně $c \rightarrow -c$, bude jim kromě X(4.5) a X(4.6) vyhovovat také řešení

$$\mathbf{A}^{(a)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t'')}{R} d^3 r', \quad \text{X(4.7)}$$

$$\Phi^{(a)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t'')}{R} d^3 r', \quad \text{X(4.8)}$$

kde

$$t'' \equiv t_+ = t + \frac{R}{c}. \quad \text{X(4.9)}$$

Zde pole předbíhá (avancuje) svůj zdroj, proto se řešením X(4.7) a X(4.8) říká *avanceované* neboli *předbíhavé potenciály*. Pokládáme-li však nábojové a proudové hustoty ρ , \mathbf{J} za zdroj (a tedy i příčinu) elektromagnetického pole,

nutno předbíhavá řešení vyloučit jako fyzikálně nepřipustná při popisu emise elektromagnetického záření.

Zdánlivá jednoduchost rovnice X(4.4) pro retardovaný čas $t' = t - R/c$ je klamná. Náboje se totiž pohybují, a tedy i vzdálenost $R \equiv R(t')$ mezi náboji a bodem pozorování je funkcí retardovaného času. Retardovaný čas je určen implicitní funkcí

$$t' = t - \frac{1}{c} R(t').$$

Nyní přejdeme k odvození řešení X(4.5), X(4.6), popř. též X(4.7) a X(4.8) přímým řešením výchozích rovnic X(4.1) a X(4.2).

K výpočtu uijeme Fourierovy transformace (viz dodatek IV). Funkci $f(t)$ vyjádříme ve tvaru Fourierova integrálu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int f_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad \text{X(4.10)}$$

přičemž Fourierovy komponenty f_ω jsou

$$f_\omega = \int f(t) e^{i\omega t} dt. \quad \text{X(4.11)}$$

V daném případě položíme

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \Phi_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega, \quad \text{X(4.12)}$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int \rho_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} d\omega. \quad \text{X(4.13)}$$

Fourierovy komponenty zde pro přehlednost označujeme symbolem f_ω místo \tilde{f}_ω užívaného na jiných místech.

Vyjádření X(4.12) a X(4.13) dosadíme do X(4.2), čímž dospějeme k rovnici

$$\int \left[\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Phi_\omega(\mathbf{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \rho_\omega(\mathbf{r}) \right] e^{-i\omega t} d\omega = 0.$$

S ohledem na úplnost Fourierovy báze pak máme

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \Phi_\omega(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho_\omega(\mathbf{r}). \quad \text{X(4.14)}$$

Vzniklou rovnici pro Fourierovy komponenty budeme řešit metodou Greenovy funkce (viz dodatek III). Zavedeme Greenovu funkci $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ vyhovující rovnici typu X(4.14) s bodovým zdrojem

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad \text{X(4.15)}$$

Řešení rovnice X(4.14) je pak dáno integrálem

$$\Phi_{\omega}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_{\omega}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad \text{X(4.16)}$$

Víme, že (viz dodatek II) rovnice X(4.15) má při $\omega = 0$ řešení $1/(4\pi R)$, jelikož

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{R}).$$

Položíme-li v X(4.15)

$$G(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi R} g(\mathbf{R}),$$

pak snadno zjistíme, že $g(\mathbf{R}) = \exp(\mp i \omega R/c)$, takže je

$$G^{(\mp)}(\mathbf{R}) = \frac{\exp\left(\mp i \frac{\omega}{c} R\right)}{4\pi R} \quad \text{X(4.17)}$$

Pomocí rovnice X(4.16) pak získáme vztah mezi Fourierovými komponentami

$$\Phi_{\omega}^{(\mp)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\exp\left(\mp i \frac{\omega}{c} R\right)}{R} \rho_{\omega}(\mathbf{r}') d^3 r' \quad \text{X(4.18)}$$

Tuto rovnici vynásobíme $\exp(-i\omega t)$, prointegrujeme přes ω a užijeme rovnice X(4.12) a X(4.13). Dospějeme tak k rovnici

$$\Phi^{(\mp)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_{\mp})}{R} d^3 r',$$

při jejíž úpravě jsme užili vyjádření

$$\frac{1}{2\pi} \int \rho_{\omega}(\mathbf{r}') \exp(-i\omega t_{\mp}) d\omega = \rho(\mathbf{r}', t_{\mp}),$$

kde $t_{\mp} = t \mp R/c$. Horní znaménko odpovídá retardovanému a dolní avanceovanému řešení.

X.5 Greenova funkce vlnové rovnice

Greenova funkce $G(\mathbf{R}, T)$ vlnové rovnice vyhovuje rovnici

$$\square G \equiv \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{R}, T) = -\delta(\mathbf{R}, T), \quad \text{X(5.1)}$$

kde

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad T = t - t'. \quad \text{X(5.2)}$$

Derivace ∇^2 , $\partial^2/\partial t^2$ v X(5.1) se vztahují na nečárkované proměnné.

Rovnici X(5.1) budeme řešit metodou Fourierova integrálu. Diracovu distribuci vyjádříme čtyřnásobným Fourierovým integrálem

$$\delta(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} e^{-i\omega T} d^3 \mathbf{k} d\omega. \quad \text{X(5.3)}$$

Podobně vyjádříme

$$G(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} e^{-i\omega T} d^3 \mathbf{k} d\omega, \quad \text{X(5.4)}$$

kde $g(\mathbf{k}, \omega)$ jsou Fourierovy komponenty. Po dosazení X(5.3) a X(5.4) do X(5.1) získáme pro $g(\mathbf{k}, \omega)$ vztah $(-k^2 + \omega^2/c^2)g(\mathbf{k}, \omega) = -1$, z něhož plyne

$$g(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{k^2 - (\omega/c)^2}. \quad \text{X(5.5)}$$

Tento výraz dosadíme do X(5.4). Výraz $d^3 \mathbf{k}$ vyjádříme ve sférických souřadnicích $k^2 \sin \vartheta dk d\vartheta d\varphi$, což po integraci přes φ dá $d^3 \mathbf{k} = 2\pi k^2 \sin \vartheta dk d\vartheta$. Dále položíme $\mathbf{k}\mathbf{R} = kR \cos \vartheta$, čímž získáme vyjádření

$$\int g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d^3 \mathbf{k} = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{k^2 - (\omega/c)^2} \int_0^{\pi} e^{i k R \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta.$$

Integrál přes ϑ se vypočte elementárně

$$\int_0^{\pi} e^{i k R \cos \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{1}{i k R} [e^{i k R \cos \vartheta}]_0^{\pi} = \frac{1}{i k R} (e^{i k R} - e^{-i k R}).$$

Je tedy

$$\int g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d^3 \mathbf{k} = \frac{2\pi}{i R} \int_0^{\infty} \frac{k dk}{k^2 - (\omega/c)^2} (e^{i k R} - e^{-i k R}),$$

resp.

$$\int g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d^3 \mathbf{k} = \frac{2\pi}{i R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k e^{i k R}}{k^2 - (\omega/c)^2} dk.$$

Vzniklý integrál je znám a dá se počítat mnoha způsoby. Abychom nerušili vlastní sled myšlenek, uvedeme zde pouze výsledný vztah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \sin(kR)}{k^2 - k_0^2} dk = -\pi \cos(k_0 R), \quad \text{X(5.6)}$$

jehož odvození najde čtenář v úlohách k této kapitole. Pomocí posledního vztahu dostaneme

$$\int g(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} d^3 \mathbf{k} = -\frac{2\pi^2}{R} (e^{i\omega R/c} + e^{-i\omega R/c}). \quad \text{X(5.7)}$$

Tento výsledek dosadíme do X(5.4); při integraci přes ω uijeme vztah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\alpha} d\omega = 2\pi\delta(\alpha).$$

Greenova funkce je určena výrazem

$$-G(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi R} \left[\delta\left(T - \frac{R}{c}\right) + \delta\left(T + \frac{R}{c}\right) \right]. \quad X(5.8)$$

Pomocí vztahů

$|a|\delta(aT) = \delta(T)$, $\delta(T-a) + \delta(T+a) = 2|a|\delta(T^2 - a^2)$
dostaneme

$$G(\mathbf{R}, T) = -\frac{c}{4\pi} \delta(c^2 T^2 - R^2). \quad X(5.9)$$

Řešení

$$G^{(r)} = -\frac{1}{4\pi R} \delta\left(t - \frac{R}{c}\right) \quad X(5.10)$$

je retardovanou a

$$G^{(a)} = -\frac{1}{4\pi R} \delta\left(t + \frac{R}{c}\right) \quad X(5.11)$$

avanceovanou Greenovou funkcí. V argumentu X(5.10) anulování $T - R/c = 0$ odpovídá retardovanému času $t' = t - R/c$; obdobně $T + R/c = 0$ odpovídá avanceovanému času $t'' = t + R/c$.

Retardované řešení rovnice

$$\square\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

je

$$\Phi^{(r)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G^{(r)}(\mathbf{R}, T) \rho(\mathbf{r}', t') d^3\mathbf{r}' dt',$$

což s ohledem na X(5.10) dá

$$\Phi^{(r)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right)}{R} d^3\mathbf{r}',$$

což je známé nám již řešení X(4.6). Podobně pomocí Greenovy funkce X(5.10) dostaneme X(4.8).

Greenova funkce má singularitu při $c^2 T^2 - R^2 = 0$, tj. na tzv. světelném kuželi. Z teorie relativity je známo, že interval $s^2 = c^2 T^2 - R^2$ je invariantní vůči Lorentzově transformaci.

Při $T = t - t' > 0$ je druhý člen v hranaté závorce rovnice X(5.8) vždy nulový,

jelikož argument u $\delta(T + R/c)$ neprochází nulou. Je tedy

$$G(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{2} G^{(r)}(\mathbf{R}, T), \quad (T > 0), \quad X(5.12)$$

a obdobně

$$G(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{2} G^{(a)}(\mathbf{R}, T), \quad (T < 0). \quad X(5.13)$$

Z toho můžeme sestavovat Greenovy funkce vyhovující potřebným počátečním podmínkám. Pro funkci

$$D_c(\mathbf{R}, T) \equiv \left(1 + \frac{T}{|T|}\right) G(\mathbf{R}, T) \quad X(5.14)$$

zřejmě platí

$$D_c(\mathbf{R}, T) = 0 \quad \text{pro } T < 0, \quad D_c(\mathbf{R}, T) = G^{(r)} \quad \text{pro } T > 0. \quad X(5.15)$$

Tato funkce tedy vylučuje vliv času $T < 0$ (tj. $t' > t$) na stav v čase t , proto se nazývá *kauzální* nebo *Feynmanovou funkcí*. Vzhledem k singulárnímu charakteru této veličiny by bylo vhodnější mluvit o Feynmanově distribuci. Vžitě označení funkce tedy nutno chápat ve smyslu zobecněné funkce (distribuce). Totéž platí pro všechny Greenovy funkce.

Pro některé účely je výhodné provést v X(5.4) pouze integraci přes ω a ponechat trojrozměrný Fourierův integrál přes \mathbf{k} . Po dosazení X(5.5) do X(5.4) vznikne integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega T}}{k^2 - (\omega/c)^2} d\omega = -\frac{\pi c}{k} \sin(ckT), \quad X(5.16)$$

který se snadno vypočte podle návodu v příkladě 4 k této kapitole. Dostaneme tak vyjádření

$$G(\mathbf{R}, T) = -\frac{c}{16\pi^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \frac{\sin(ckT)}{k} d^3\mathbf{k}. \quad X(5.17)$$

Odtud je vidět, že $G(\mathbf{R}, T)$ splňuje počáteční podmínky

$$G(\mathbf{R}, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{T=0} = -\frac{1}{2} c^2 \delta(\mathbf{R}). \quad X(5.18)$$

Z toho plyne, že funkce $D_c(\mathbf{R}, T)$ je Greenovou funkcí vlnové rovnice $\square D_c(\mathbf{R}, T) = -\delta(\mathbf{R}, T)$, přičemž platí počáteční podmínky

$$D_c(\mathbf{R}, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial D_c}{\partial T}\right)_{T=0} = c^2 \delta(\mathbf{R}). \quad X(5.19)$$

Spojením vztahů X(5.12) a X(5.17) získáme pro retardovanou Greenovou funkci vyjádření

$$G^{(r)}(\mathbf{R}, T) = -\frac{c}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \frac{\sin(ckT)}{k} d^3\mathbf{k}. \quad X(5.20)$$

Zpravidla se zavádí Diracovo řešení vlnové rovnice

$$D(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\sin(ckT)}{k} d^3\mathbf{k}; \quad \text{X(5.21)}$$

vyznačuje se tím, že

$$D(\mathbf{R}, -T) = -D(\mathbf{R}, T), \quad \text{X(5.22)}$$

$$\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_{T=0} = c\delta(\mathbf{R}).$$

Analogická funkce s $\cos(ckT)$ je (viz příklad 5 k této kapitole)

$$D_1(\mathbf{R}, T) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} \frac{\cos(ckT)}{k} d^3\mathbf{k} = \frac{1}{2\pi^2(R^2 - c^2T^2)}. \quad \text{X(5.23)}$$

X.6 Pole pohybujících se bodových nábojů.

Liéardovy—Wiechertovy potenciály

Retardované potenciály jsou určeny rovnicemi X(4.5) a X(4.6). Retardovaný čas je určen rovnicí

$$t' = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

Abychom nemuseli v X(4.5) a X(4.6) uvádět, čemu je rovno t' , přepíšeme tyto rovnice pomocí Diracovy distribuce

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho(\mathbf{r}', \tau) d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left[\tau - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right] d\tau, \quad \text{X(6.1)}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau) d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left[\tau - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right] d\tau. \quad \text{X(6.2)}$$

Index (τ) označující retardované řešení budeme vynechávat. Mějme bodový náboj pohybující se po trajektorii $\mathbf{r}_0(t)$; hustotu $\rho(\mathbf{r}', \tau)$ vyjadřuje rovnice

$$\rho(\mathbf{r}', \tau) = e\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)]. \quad \text{X(6.3)}$$

Tento výraz dosadíme do X(6.1) a prointegrujeme přes \mathbf{r}' , což dá

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|} \delta\left[\tau - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|\right]. \quad \text{X(6.4)}$$

V argumentu u distribuce stojí výraz typu $\delta[F(\tau)]$. Vzniklý integrál vypočteme pomocí vztahu (viz dodatek II)

$$\int f(\tau) \delta[F(\tau)] d\tau = \frac{f(t')}{|dF/dt'|}, \quad \text{X(6.5)}$$

kde t' je kořen rovnice $F(\tau) = 0$. V daném případě je

$$f(\tau) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)|} \equiv \frac{1}{R(\tau)},$$

$$F(\tau) = \tau - t + \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(\tau)| \equiv \tau - t + \frac{1}{c} R(\tau),$$

takže je

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{1 + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial R}{\partial t'}\right)_r}. \quad \text{X(6.6)}$$

Zde $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}(t') = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$. Derivaci $(\partial R/\partial t')_r$ vypočteme derivováním vztahu $R^2 = R'^2$, z něhož plyne

$$2R \left(\frac{\partial R}{\partial t'}\right)_r = 2\mathbf{R} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'}\right)_r = -2\mathbf{R} \frac{d\mathbf{r}_0(t')}{dt'}.$$

Derivace

$$\mathbf{v}(t') = \frac{d\mathbf{r}_0(t')}{dt'} \quad \text{X(6.7)}$$

představuje rychlost náboje v retardovaném čase. Je tedy

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t'}\right)_r = -\frac{\mathbf{v}\mathbf{R}}{R}, \quad \text{X(6.8)}$$

což po dosazení do X(6.6) dá hledaný vztah

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R - \frac{1}{c} \mathbf{v}\mathbf{R}}. \quad \text{X(6.9)}$$

Obdobné řešení pro vektorový potenciál zní

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{v}}{R - \frac{1}{c} \mathbf{v}\mathbf{R}}, \quad \text{X(6.10)}$$

což se získá z rovnice X(6.2), v níž položíme $\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau) = e\mathbf{v}(\tau)\delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(\tau)]$.

Rovnice X(6.9) a X(6.10) určují elektromagnetické potenciály bodového náboje pohybujícího se rychlostí \mathbf{v} ; na počest objevitelů se nazývají *Liéardovým—Wiechertovým* potenciály (1898). Jednoduchost těchto vzorců je pouze zdánlivá, jelikož relativní poloha \mathbf{R} i rychlost \mathbf{v} jsou funkcemi retardovaného času.

Pole \mathbf{E} , \mathbf{B} jsou určena rovnicemi

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A},$$

kde derivování se provádí v pozorovacím bodě \mathbf{r} a v pozorovacím čase t , proto je výpočet derivací poněkud zdlouhavý. (Jedná se o derivování složených a implicitních funkcí.) Naznačíme příslušný postup. Derivováním rovnice

$$R(t') = c(t - t') \quad \text{X(6.11)}$$

podle času t při konstantním \mathbf{r} dostaneme

$$\left(\frac{\partial R}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial R}{\partial t'}\right) \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_r = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right)_r.$$

Odtud po dosazení $(\partial R / \partial t')_r = -(\mathbf{vR})/R$ dostaneme

$$\left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_r = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{vR}}{cR}}. \quad \text{X(6.12)}$$

Obdobně získáme

$$\text{grad } t' = -\frac{R}{cR \left(1 - \frac{\mathbf{vR}}{cR}\right)}. \quad \text{X(6.13)}$$

Ze vztahu $\text{grad}[R(t')] = -c \text{grad } t'$ pak plyne

$$\text{grad } R(t') = \frac{R}{R \left(1 - \frac{\mathbf{vR}}{cR}\right)} = \frac{n}{1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}}, \quad \text{X(6.14)}$$

kde $n = R/R$.

Výpočet \mathbf{E} , \mathbf{B} pomocí těchto vztahů je pak rutinní, i když poměrně zdlouhavou záležitostí. Čtenář se snadno přesvědčí o správnosti rovnic

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}{R^2 \left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3} \left(n - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) + \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R \left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3} \left[n \times \left[\left(n - \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \times \dot{\mathbf{v}}\right]\right], \quad \text{X(6.15)}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \text{X(6.16)}$$

kde $\dot{\mathbf{v}} = \partial \mathbf{v} / \partial t'$ je zrychlení náboje v retardovaném čase t' ; všechny veličiny v X(6.15) a X(6.16) se rovněž berou v retardovaném čase. Magnetické pole je vždy kolmé k poli elektrickému.

Všimneme si nyní struktury výrazů pro pole. První člen pro pole závisí pouze na rychlosti \mathbf{v} , nikoli však na zrychlení. Tento člen ubývá se vzdáleností jako $1/R^3$, takže Poyntingův vektor $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$ ubývá jako $1/R^4$. Při integraci přes nekonečně vzdálenou plochu dá tento člen nulový příspěvek k toku energie $\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$. Druhý člen závisí také na zrychlení, a co je podstatné, ubývá se vzdáleností pouze jako $1/R$; Poyntingův vektor ubývá jako $1/R^2$, takže tento člen má nenulový tok energie i přes nekonečně vzdálenou plochu. Tento člen odpovídá *elektromagnetickému záření*.

Z výrazů X(6.15) a X(6.16) lze snadno odvodit vzorce pro malé rychlosti nábojů ($v \ll c$), což zde dělat nebudeme, poněvadž se k této otázce vrátíme v následující kapitole věnované elektromagnetickému záření.

X.7 Hamiltonovská forma Maxwellových rovnic

V článku VII.5 jsme poukázali na jisté souvislosti, resp. analogie mezi polem rovinné elektromagnetické vlny a soustavou částic. Nyní tyto analogie rozvedeme na bázi formalismu Hamiltonových kanonických rovnic.

Budeme uvažovat elektromagnetické pole ve vakuu (bez nábojů a proudů). Vektorový potenciál \mathbf{A} vyhovuje d'Alembertově rovnici

$$\square \mathbf{A} \equiv \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = 0, \quad \text{X(7.1)}$$

přičemž platí (viz čl. X.3) Lorentzova podmínka

$$\text{div } \mathbf{A} = 0. \quad \text{X(7.2)}$$

Elektrické a magnetické pole jsou určena rovnicemi

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad \text{X(7.3)}$$

Rovnici X(7.1) vyhovuje partikulární řešení $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}_k(t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, přičemž pro amplitudu $\mathbf{a}_k(t)$ platí rovnice

$$\ddot{\mathbf{a}}_k + \omega_k^2 \mathbf{a}_k = 0, \quad \text{X(7.4)}$$

kde

$$\omega_k = ck. \quad \text{X(7.5)}$$

Amplitudy \mathbf{a}_k — jak plyne z X(7.4) — závisí na čase harmonicky, $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{0k} \exp(-i\omega_k t)$, proto je

$$\dot{\mathbf{a}}_k = -i\omega_k \mathbf{a}_k. \quad \text{X(7.6)}$$

Pro komplexně sdruženou amplitudu \mathbf{a}_k platí obdobně

$$\mathbf{a}_k^* = +i\omega_k \mathbf{a}_k. \quad \text{X(7.6')}$$

Možné hodnoty vlnového vektoru \mathbf{k} závisí na objemu V , v němž je pole uzavřeno, a na hraničních podmínkách. Zde budeme předpokládat objem V ve tvaru kvádry o lineárních rozměrech L_1, L_2, L_3 . Ve Fourierově rozvoji

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_k \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$$

se sčítá přes hodnoty $(k_1, k_2, k_3) \equiv \mathbf{k}$

$$k_1 = \frac{2\pi}{L_1} n_1, \quad k_2 = \frac{2\pi}{L_2} n_2, \quad k_3 = \frac{2\pi}{L_3} n_3, \quad \text{X(7.7)}$$

kde n_i jsou celá čísla. Z rovnice X(7.5) pak plynou možné hodnoty frekvencí

$$\omega_k \equiv 2\pi\nu_k = 2\pi c \left[\left(\frac{n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{L_2}\right)^2 + \left(\frac{n_3}{L_3}\right)^2 \right]^{1/2}. \quad \text{X(7.8)}$$

Máme-li polarizovanou vlnu, pak veličina $\Delta\Gamma = \Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3$ udává počet kmitů, jejichž vlnový vektor leží v intervalu $\Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3$. Při velikých rozměrech ($L_1, L_2, L_3 \rightarrow \infty$) bude spektrum veličin k_1, k_2, k_3 takřka spojité (kvazikontinuum). Vyjádříme Δn_i z rovnic X(7.7) a uvážíme obě polarizace; pro počet kmitů $d\Gamma(\mathbf{k})$ v intervalu $d^3\mathbf{k} = dk_1 dk_2 dk_3$ vlnového vektoru pak platí vztah ($V = L_1 L_2 L_3$)

$$d\Gamma(\mathbf{k}) = \frac{2V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{k} = \frac{2V}{(2\pi)^3} k^2 dk d\Omega. \quad \text{X(7.9)}$$

Fourierovy funkce

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad \text{X(7.10)}$$

tvoří úplnou ortonormální bázi

$$\int \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad \text{X(7.11)}$$

V skalárním součinu $\mathbf{k}\mathbf{r}$ zavedeme X(7.7), takže je

$$\mathbf{k}\mathbf{r} = 2\pi[(n_1 x/L_1) + (n_2 y/L_2) + (n_3 z/L_3)].$$

V integrandu X(7.11) pak vzniknou výrazy typu

$$\exp\{2\pi i[(n'_i - n_i)(x/L_i)]\}.$$

Při $n_i \neq n'_i$ jsou integrály nulové (ortogonálnost trigonometrických funkcí) a při $n'_i = n_i$ dá integrace objem V , jenž se vykrátí s faktorem $1/V$ od funkcí X(7.10).

Úplnost báze X(7.10) nám umožňuje zapsat vektorový potenciál ve tvaru součtu

$$\mathbf{A} = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{a}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}_k^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}), \quad \text{X(7.12)}$$

který explicitně vyjadřuje reálnost vektorového potenciálu.

Amplitudy \mathbf{a}_k vyhovují očividnému vztahu

$$\mathbf{a}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{a}_k^*.$$

Jelikož \mathbf{A} vyhovuje Lorentzově podmínce X(7.2), budou také amplitudy $\mathbf{a}_k, \mathbf{a}_k^*$ splňovat relace transversálnosti

$$(\mathbf{k}\mathbf{a}_k) = (\mathbf{k}\mathbf{a}_k^*) = 0. \quad \text{X(7.13)}$$

Pole \mathbf{E}, \mathbf{B} vyjádříme pomocí X(7.3), což po jednoduché úpravě vede k rovnicím

$$\mathbf{E} = iV^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} \omega_k (\mathbf{a}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \mathbf{a}_k^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}), \quad \text{X(7.14)}$$

$$\mathbf{B} = iV^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} ([\mathbf{k}, \mathbf{a}_k] e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - [\mathbf{k}, \mathbf{a}_k^*] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}). \quad \text{X(7.15)}$$

Tyto výrazy dosadíme do vyjádření energie elektromagnetického pole

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) dV = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int (E^2 + c^2 B^2) dV. \quad \text{X(7.16)}$$

Energii zde značíme symbolem \mathcal{E} obvyklým v mechanice.

Při výpočtu integrálů v X(7.16) se vyskytnou výrazy

$$I_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \equiv \frac{1}{V} \int \exp[i(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\mathbf{r}] d^3\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{k}, \pm\mathbf{k}'};$$

smíšené součiny typu $c^2[\mathbf{k}, \mathbf{a}_k^*] \cdot [\mathbf{k}, \mathbf{a}_k]$ upravíme pomocí X(7.13), což dá

$$c^2[\mathbf{k}, \mathbf{a}_k^*] \cdot [\mathbf{k}, \mathbf{a}_k] = c^2 k^2 (\mathbf{a}_k^* \mathbf{a}_k) = \omega_k^2 (\mathbf{a}_k^* \mathbf{a}_k).$$

Po jednoduchých algebraických úpravách dostaneme

$$\mathcal{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathcal{E}_{\mathbf{k}}, \quad \text{X(7.17)}$$

kde

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = 2\epsilon_0 (\mathbf{a}_k^* \mathbf{a}_k) \omega_k^2. \quad \text{X(7.18)}$$

Energie \mathcal{E} elektromagnetického pole je rovna součtu energií jednotlivých Fourierových komponent. To je přirozený výsledek s ohledem na ortogonálnost funkcí X(7.5) a linearitu rovnic pole.

Hybnost \mathbf{G} elektromagnetického pole je určena rovnicí VI(2.15), kterou přepíšeme ve tvaru

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{g} dV = \epsilon_0 \mu_0 \int [\mathbf{E}, \mathbf{H}] dV = \epsilon_0 \int [\mathbf{E}, \mathbf{B}] dV. \quad \text{X(7.19)}$$

Po analogických úpravách jako při výpočtu energie dostaneme

$$\mathbf{G} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{G}_{\mathbf{k}}, \quad \text{X(7.20)}$$

kde

$$\mathbf{G}_{\mathbf{k}} = \frac{\mathcal{E}_{\mathbf{k}}}{c} \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad \text{X(7.21)}$$

Hybnost elektromagnetického pole je součtem hybností \mathbf{G}_k jednotlivých Fourierových komponent (rovinných vln). Mezi \mathcal{E}_k a \mathbf{G}_k platí vztah

$$\mathcal{E}_k^2 = c^2 \mathbf{G}_k^2, \quad \text{X(7.22)}$$

s nímž jsme se již setkali při studiu (izolované) rovinné monochromatické vlny.

Místo komplexních amplitud \mathbf{a}_k , \mathbf{a}_k^* zavedeme reálné vektory \mathbf{Q}_k a \mathbf{P}_k pomocí vztahů

$$\mathbf{Q}_k = \varepsilon_0^{1/2} (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*), \quad \text{X(7.23)}$$

$$\mathbf{P}_k = -i \omega_k \varepsilon_0^{1/2} (\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^*) = \dot{\mathbf{Q}}_k. \quad \text{X(7.24)}$$

Poslední vztah jsme získali pomocí X(7.6) a X(7.6').

V těchto reálných proměnných dostaneme pro \mathcal{E}_k vztah

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_k^2 + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k^2). \quad \text{X(7.25)}$$

Z rovnic X(7.4), jež jsou důsledkem vlnové rovnice, plyne, že pro \mathbf{Q}_k platí oscilátorová rovnice

$$\ddot{\mathbf{Q}}_k + \omega_k^2 \mathbf{Q}_k = 0, \quad \text{X(7.26)}$$

přičemž místo X(7.13) bude

$$(\mathbf{kQ}_k) = 0, \quad (\mathbf{kP}_k) = 0. \quad \text{X(7.27)}$$

To znamená, že každý z vektorů \mathbf{Q}_k , \mathbf{P}_k má dvě nezávislé (a obecně nenulové) komponenty v rovině kolmé ke směru vlnového vektoru \mathbf{k} . Tyto dvě složky označíme $\mathbf{Q}_{k\sigma}$, $\mathbf{P}_{k\sigma}$, $\sigma = 1, 2$, přičemž

$$\mathbf{Q}_k^2 = Q_{k1}^2 + Q_{k2}^2, \quad \mathbf{P}_k^2 = P_{k1}^2 + P_{k2}^2.$$

Výraz pro energii elektromagnetického pole v těchto reálných proměnných označíme symbolem H (hamiltonián), takže je

$$H = \sum_k \sum_{\sigma} \frac{1}{2} (P_{k\sigma}^2 + \omega_k^2 Q_{k\sigma}^2). \quad \text{X(7.28)}$$

Vypočteme derivace $(\partial H / \partial Q_{k\sigma}) = \omega_k^2 Q_{k\sigma}$, $(\partial H / \partial P_{k\sigma}) = P_{k\sigma} = \dot{Q}_{k\sigma}$. Při úpravě druhé rovnice jsme použili definice $\mathbf{P}_k \equiv \dot{\mathbf{Q}}_k$. Vhodnou volbou proměnných jsme tak dosáhli toho, že tato druhá rovnice má automaticky (definitoricky) tvar Hamiltonovy kanonické rovnice $\dot{q}_j = (\partial H / \partial p_j)$. Zkusíme proto, zdali platí také $\dot{P}_{k\sigma} = -(\partial H / \partial Q_{k\sigma})$. Je-li tomu tak, pak to implikuje rovnici $\dot{P}_{k\sigma} \equiv \ddot{Q}_{k\sigma} = -\omega_k^2 Q_{k\sigma}$, tj.

$$\ddot{Q}_{k\sigma} + \omega_k^2 Q_{k\sigma} = 0. \quad \text{X(7.29)}$$

Tento předpoklad tedy vede k rovnici X(7.26), která je důsledkem Maxwellových rovnic.

To tedy znamená, že proměnné $Q_{k\sigma}$, $P_{k\sigma}$ v rovnici X(7.28) pro hamiltonián

elektromagnetického pole můžeme interpretovat jako kanonické proměnné (zobecněné souřadnice a zobecněné hybnosti), pro něž platí Hamiltonovy kanonické rovnice

$$\dot{Q}_{k\sigma} = \frac{\partial H}{\partial P_{k\sigma}}, \quad \dot{P}_{k\sigma} = -\frac{\partial H}{\partial Q_{k\sigma}}. \quad \text{X(7.30)}$$

Ještě jednou zdůrazníme, že tato interpretace vede k rovnici X(7.29), tedy ke stejné závislosti $Q_{k\sigma}$ k jaké přivádí vlnová rovnice. Navíc je při tom respektována i Lorentzova podmínka, takže rovnice X(7.30) vedou ke stejným vztahům jako odpovídající soustava Maxwellových rovnic.

Rovnice X(7.29) je známou rovnicí pro lineární harmonický oscilátor, takže $\frac{1}{2}(P_{k\sigma}^2 + \omega_k^2 Q_{k\sigma}^2)$ je energií lineárního harmonického oscilátoru \mathbf{k} , σ s frekvencí $\omega_k = ck$. (Oba oscilátory $\sigma = 1, 2$ kmitají se stejnou frekvencí.) Přicházíme tak k následujícímu závaznému výsledku:

Energii vlnového elektromagnetického pole lze vyjádřit jako součet energií nezávislých lineárních harmonických oscilátorů.

S ohledem na pozdější reference uvedeme ještě lagrangián L elektromagnetického pole. Z mechaniky víme, že lagrangián L a hamiltonián H jsou spolu svázány

vztahem $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$, což v našem případě dá

$$L = \sum_k \sum_{\sigma} \frac{1}{2} (P_{k\sigma}^2 - \omega_k^2 Q_{k\sigma}^2),$$

resp.

$$L = \sum_k \sum_{\sigma} \frac{1}{2} (\dot{Q}_{k\sigma}^2 - \omega_k^2 Q_{k\sigma}^2). \quad \text{X(7.31)}$$

Z Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_{k\sigma}} - \frac{\partial L}{\partial Q_{k\sigma}} = 0 \quad \text{X(7.32)}$$

opět plyne rovnice X(7.29).

Lagrangián X(7.31) reprezentující soustavu nezávislých lineárních harmonických oscilátorů je vyjádřen pomocí zobecněných souřadnic $Q_{k\sigma}$ a zobecněných rychlostí $\dot{Q}_{k\sigma}$. Při výpočtu hamiltoniánu pole jsme vyšli z vyjádření X(7.16) pomocí vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} a pak jsme dospěli ke kanonickému vyjádření X(7.28). Vzniká proto otázka, jak je vyjádřen lagrangián X(7.31) pomocí vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} . Snadno se přesvědčíme, že

$$L = \frac{1}{2} \int (\varepsilon_0 E^2 - \mu_0 H^2) dV = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int (E^2 - c^2 B^2) dV. \quad \text{X(7.33)}$$

V relativistické elektrodynamice uvidíme, že $E^2 - c^2 B^2$ je invariantní vůči Lorentzově transformaci, takže objemová hustota lagrangiánu je relativistickým invariantem. Tento poznatek je vodítkem při konstrukci lorentzovsky invariantních pohybových rovnic.

Po těchto poznámkách se vrátíme k rozkladu X(7.26) elektromagnetického pole na soustavu nezávislých lineárních harmonických oscilátorů. Dokud na tyto oscilátory nahlížíme *klasicky* (nekvantově), je jejich energie *spojitá* (spojitá změna $P_{k\sigma}, Q_{k\sigma}$), takže tento korpuskulární (oscilátorový) aspekt elektromagnetického pole nepřivádí k podstatně novým výsledkům, popř. obsahuje stejné potíže jako klasická mechanika. Proilustrujeme to na jednoduchém příkladě.

Zavedeme do X(7.9) frekvenci $\omega = ck$ a prointegrujeme přes prostorový úhel Ω orientace vlnového vektoru. Pro počet kmitů $d\Gamma(\omega)$ ve frekvenčním intervalu $d\omega$ získáme vztah

$$d\Gamma(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega. \quad \text{X(7.34)}$$

V klasické fyzice platí tzv. ekvipartiční teorém: na každou kanonickou proměnnou vystupující v energii kvadraticky připadá střední energie $k\mathcal{T}/2$, kde k je Boltzmannova konstanta ($k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$) a \mathcal{T} je absolutní teplota. U oscilátoru jsou takovými proměnnými $P_{k\sigma}, Q_{k\sigma}$, takže střední energie jednoho oscilátoru je $k\mathcal{T}$. Po vynásobení střední energie jednoho oscilátoru počtem oscilátorů $d\Gamma(\omega)$ dostaneme energii $d\mathcal{E}_\omega$ pole

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} k\mathcal{T} \omega^2 d\omega, \quad \text{X(7.35)}$$

což je známý *Rayleighův—Jeansův zákon záření absolutně černého tělesa*. Je ihned vidět, že tento vztah nemůže platit v celém rozsahu frekvencí, jelikož celková energie

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty d\mathcal{E}_\omega$$

diverguje při všech teplotách $\mathcal{T} \neq 0$, což je zřejmý nesmysl. Východisko z této situace přináší kvantová teorie.

V kvantové teorii se ukazuje, že energie lineárního harmonického oscilátoru je⁹⁾

$$\mathcal{E}_{k\sigma} = N_{k\sigma} \hbar \omega_k, \quad \text{X(7.36)}$$

kde $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ je redukovaná Planckova konstanta a

$$N_{k\sigma} = 0, 1, 2, \dots \quad \text{X(7.37)}$$

Výraz X(7.36) má stejný tvar jako energie $N_{k\sigma}$ nezávislých částic, z nichž každá nese energii $\hbar \omega_k$. Místo toho, abychom říkali, že oscilátor k, σ je ve stavu s kvantovým číslem $N_{k\sigma}$, můžeme říci, že máme $N_{k\sigma}$ částic (*světelných kvant*,

⁹⁾ Energii odečítáme od tzv. nulové energie $\hbar \omega/2$.

fotonů), z nichž každá nese energii $\hbar \omega_k$. Ze vztahu X(7.21) plyne, že každá tato částice nese také hybnost, přičemž

$$\mathbf{G}_{k\sigma} = N_{k\sigma} \frac{\hbar \omega_k}{c} \frac{\mathbf{k}}{k} = N_{k\sigma} \hbar \mathbf{k}. \quad \text{X(7.38)}$$

Zde $\hbar \mathbf{k}$ je hybnost fotonu. Vlnový vektor \mathbf{k} je tak jednoduše spojen s hybností fotonu.

V kvantové teorii se ukazuje, že střední energie jednoho oscilátoru je (viz příklad 7 k této kapitole)

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k\mathcal{T}) - 1}. \quad \text{X(7.39)}$$

Při $(\hbar \omega / k\mathcal{T}) \ll 1$ je $\exp(\hbar \omega / k\mathcal{T}) - 1 \approx k\mathcal{T}$, což vede ke klasickému výrazu. Po vynásobení X(7.39) počtem oscilátorů X(7.34) dostáváme slavný Planckův zákon (M. PLANCK, 1900)

$$d\mathcal{E}_\omega = \frac{V \omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega}{\exp(\hbar \omega / k\mathcal{T}) - 1} d\omega. \quad \text{X(7.40)}$$

X.8 Lagrangián a hamiltonián pro Lorentzovu sílu

V článku I.10 jsme ukázali, že magnetickou část Lorentzovy síly $\mathbf{F}_m = e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ lze odvodit z lagrangiánu

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + e \mathbf{v} \mathbf{A}.$$

Působí-li na nabitou bodovou částici současně elektrické pole $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ a magnetické pole $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, pak síla je

$$\mathbf{F} = e \mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad \text{X(8.1)}$$

Ukážeme, že této síle odpovídá lagrangián¹⁰⁾

$$L = \frac{1}{2} m v^2 + e \mathbf{v} \mathbf{A} - e \Phi, \quad \text{X(8.2)}$$

kde skalární a vektorový potenciál souvisí s \mathbf{E} a \mathbf{B} vztahy X(1.4) a X(1.6). Postup je podobný jako v čl. I.10.

Zobecněná hybnost \mathbf{p} se vypočte ze vztahu

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v} + e \mathbf{A}, \quad \text{X(8.3)}$$

¹⁰⁾ Tento lagrangián se vztahuje na nerelativistický pohyb částice. Relativistický lagrangián je dán vztahem X(8.10).

jenž je stejný jako v případě statického magnetického pole. Lagrangova rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_x} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

vede ke vztahu

$$\frac{d}{dt} (mv_x + eA_x) = e \frac{\partial}{\partial x} (A_x v_x + A_y v_y + A_z v_z - \Phi).$$

Vzniklou rovnici upravíme pomocí vztahů

$$\frac{dA_x}{dt} = \frac{\partial A_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial A_x}{\partial z} v_z \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A}\mathbf{v} - \Phi) = v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial A_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

$$E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Po jednoduchém přeskupení členů dospějeme k rovnici

$$m\dot{v}_x = eE_x + e[v_y B_z - v_z B_y],$$

což odpovídá x -ové složce rovnice X(8.1).

Z lagrangiánu X(8.2) najdeme odpovídající hamiltonián $H = \sum p_i \dot{q}_i - L$, což v daném případě je

$$H = \mathbf{p}\mathbf{v} - L.$$

Rychlost \mathbf{v} vyloučíme pomocí X(8.3), což po jednoduché úpravě dá

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + e\Phi. \quad \text{X(8.4)}$$

Pomocí tohoto hamiltoniánu snadno zapíšeme Hamiltonovu—Jacobiovu rovnici pro pohyb nabitě bodové částice v elektromagnetickém poli. Účinková funkce $S(\mathbf{r}, t)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = 0, \quad \text{X(8.5)}$$

kde zobecněná hybnost souvisí s účinkovou funkcí S vztahem

$$\mathbf{p} = \nabla S.$$

Hamiltonova—Jacobiova rovnice má tedy tvar

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S - e\mathbf{A})^2 + e\Phi = 0. \quad \text{X(8.6)}$$

Úplný integrál této rovnice obsahuje integrační konstanty, které označíme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Jak známo z teoretické mechaniky, z řešení

$$S \equiv S(t, \mathbf{r}, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad \text{X(8.7)}$$

dostaneme trajektorii tak, že položíme

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \quad \text{X(8.8)}$$

Z rovnic X(8.6) a X(8.7) získáme $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(t, \alpha, \beta)$.

V případě, že hamiltonián H nezávisí explicitně na čase (konzervativní systém), se zavádí $S(\mathbf{r}, t) = S_0(\mathbf{r}) - \mathcal{E}t$. Místo X(8.5) pak máme

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathcal{E},$$

tj.

$$\frac{1}{2m} (\nabla S - e\mathbf{A})^2 + e\Phi = \mathcal{E}.$$

Zdůrazněme, že zde je $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\Phi \equiv \Phi(\mathbf{r})$ na rozdíl od X(8.6), kde je $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$, $\Phi \equiv \Phi(\mathbf{r}, t)$.

Relativistické zobecnění předešlých výsledků je snadné. Hybnost $m\mathbf{v}$ volně nerelativistické částice získáme z lagrangiánu $L_0 = \frac{1}{2} m v^2$, $(\partial L_0 / \partial \mathbf{v}) = m\mathbf{v}$. Relativistický výraz pro hybnost $m\mathbf{v}(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ získáme z Lagrangiánu

$$L_0 = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}, \quad \frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad \text{X(8.9)}$$

Místo lagrangiánu X(8.2) je třeba vzít

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} + e\mathbf{v}\mathbf{A} - e\Phi. \quad \text{X(8.10)}$$

Odtud plyne pro zobecněnou hybnost

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + e\mathbf{A}. \quad \text{X(8.11)}$$

Pro hamiltonián $H = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$ dostaneme

$$H = \frac{mc^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} + e\Phi. \quad \text{X(8.12)}$$

Rychlost \mathbf{v} vyloučíme pomocí X(8.11), čímž získáme hamiltonián

$$H = [c^2(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 + m^2 c^4]^{1/2} + e\Phi, \quad \text{X(8.13)}$$

který se od hamiltoniánu H_0 volné částice $H_0 = (c^2 p^2 + m^2 c^4)^{1/2}$ liší záměnou $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}$, $H_0 \rightarrow H_0 + e\Phi$.

Relativistickou Hamiltonovu—Jacobiovu rovnici volné částice

$$(\nabla S)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + m^2 c^4 = 0$$

je nutno v případě částice v elektromagnetickém poli nahradit rovnicí

$$(\nabla S - e\mathbf{A})^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + e\Phi \right)^2 + m^2 c^4 = 0. \quad \text{X(8.14)}$$

Při kalibrační transformaci $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$, $\Phi' = \Phi - (\partial f / \partial t)$ se lagrangián X(8.10) změní na

$$L' = L + e \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f \right). \quad \text{X(8.15)}$$

Oba lagrangiány se liší o úplnou časovou derivaci

$$e \frac{df}{dt} = e \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f \right),$$

takže lagrangiány L a L' vedou ke stejným pohybovým rovnicím. Nejednoznačnost elektromagnetických potenciálů tedy nevádí při volbě lagrangiánu.

Pro částici v Coulombově poli

$$U(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \left(\alpha = \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0} \right) \quad \text{X(8.16)}$$

se zavádí tzv. Lenzův vektor ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$)

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{m\alpha} [\mathbf{p}, \mathbf{L}]. \quad \text{X(8.17)}$$

V příkladě X.9 je ukázáno, že tento vektor se zachovává, tj.

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0. \quad \text{X(8.18)}$$

Čtenáři obeznámenému s kvantovou mechanikou připomeneme, že se zachováním tohoto vektoru je spojena tzv. náhodná degenerace energetických hladin vodíku-podobného atomu.

XI.1 Radiační zóna a radiační pole

Tok elektromagnetické energie dI ploškou $d\mathbf{s}$ je dán rovnicí

$$dI = S_n ds, \quad \text{XI(1.1)}$$

resp.

$$dI = S_n r^2 d\Omega. \quad \text{XI(1.1')}$$

Tok elektromagnetické energie nevymizí ani na velkých vzdálenostech ($r \rightarrow \infty$), když normálová složka S_n Poyntingova vektoru ubývá se vzdáleností jako $1/r^2$.

V předešlé kapitole (čl. X.6) jsme viděli, že existují speciální řešení Maxwellových rovnic, a to taková řešení, že každé z polí \mathbf{E} , \mathbf{B} ubývá na velkých vzdálenostech jako $1/r$, a tedy Poyntingův vektor ubývá jako $1/r^2$.

Taková řešení Maxwellových rovnic, jež vedou k nevymizejícímu toku energie na libovolně velkých vzdálenostech od zdrojů, nazýváme *radiačními řešeními* a uvedenou oblast pole *radiační* (nebo též vlnovou) *zónou*.

Při studiu elektromagnetického záření budeme z polí \mathbf{E} , \mathbf{H} ponechávat pouze ty části, jež ubývají na velkých vzdálenostech jako $1/r$.

XI.2 Multipólový rozvoj radiačního pole

Vektorový potenciál \mathbf{A} budeme počítat z rovnice

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t')}{R} d^3 r', \quad \text{XI(2.1)}$$

kde

$$R \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad t' = t - \frac{R}{c}. \quad \text{XI(2.2)}$$

Výraz XI(2.1) lze upravit obdobně jako ve statickém případě (viz kap. IV).

Rozvinutím $1/R$ v řadu podle Legendreových polynomů získáme vztah

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} \int \left(\frac{r'}{r}\right)^l \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') P_l(\cos \Theta) d^3 r', \quad \text{XI(2.3)}$$

kde

$$\cos \Theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r r'}$$

Uvidíme, že jednotlivé členy rozvoje XI(2.3) souvisí s multipólovými momenty soustavy.

Budeme se zajímat o pole na velkých vzdálenostech od zdrojů, a to pouze o tu část, která dá nenulový příspěvek k integrálu z Poyntingova vektoru přes libovolně vzdálenou plochu. K tomuto je nutno v součtu XI(2.3) vzít pouze člen $l=0$, takže v radiační zóně bude

$$\mathbf{A}^{(\text{rad})} \equiv \mathfrak{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', t') d^3 r'. \quad \text{XI(2.4)}$$

Radiační části vektorů elektromagnetického pole budeme označovat frakturovým typem odpovídajícího symbolu \mathfrak{A} , \mathfrak{E} , \mathfrak{H} , \mathfrak{B} .

Čas t' je určen implicitně rovnicí XI(2.2). Použijeme-li rozvoje $R \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') \pm \dots$, kde

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{XI(2.5)}$$

s přesností do členů $(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})/c$ bude

$$t' = t - \frac{1}{c} [\mathbf{r} - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}].$$

Veličina

$$\tau = t - \frac{r}{c} \quad \text{XI(2.6)}$$

je společný retardační čas; r/c je doba, kterou potřebuje elektromagnetický signál, aby prošel z počátku souřadnic (středu zdroje) do bodu pozorování. Člen $(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n})/c$ představuje korekci, která zachycuje tu skutečnost, že retardační časy jsou různé pro různá místa zdroje. Retardační čas t' bude

$$t' = \tau + \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}}{c}. \quad \text{XI(2.7)}$$

Integrand $\mathbf{J}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}/c)$ rozvineme v řadu do členů $\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}/c$; po dosazení do XI(2.4) dostaneme

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^{(1)} + \mathfrak{A}^{(2)} + \dots, \quad \text{XI(2.8)}$$

kde

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \int \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau) d^3 r', \quad \text{XI(2.9)}$$

$$\mathfrak{A}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi c r} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}) \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau) d^3 r'. \quad \text{XI(2.10)}$$

Nyní přejdeme k výpočtu radiačních polí $\mathfrak{A}^{(1)}$, $\mathfrak{A}^{(2)}$ a k vyjasnění jejich fyzikálního smyslu.

XI.3 Elektrické dipólové záření

Provedeme výpočet pole $\mathfrak{A}^{(1)}$ pro soustavu bodových nábojů s proudovou hustotou

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau) = \sum_A e_A \mathbf{v}_A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_A). \quad \text{XI(3.1)}$$

Rychlost \mathbf{v}_A bodového náboje se vztahuje ke společnému retardačnímu času $\tau = t - r/c$. Po dosazení XI(3.1) do XI(2.9) dospějeme k rovnici

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_A e_A \mathbf{v}_A.$$

Tento výraz upravíme zavedením rychlostí $\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/d\tau$ a elektrického dipólového momentu

$$\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(\tau) = \sum_A e_A \mathbf{r}_A; \quad \text{XI(3.2)}$$

takže je

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\mathbf{p}}. \quad \text{XI(3.3)}$$

Tečka nad symbolem označuje derivaci podle společného retardačního času τ . První člen rozvoje $\mathfrak{A}^{(1)}$ tak jednoduše souvisí s elektrickým dipólovým momentem soustavy nábojů.

Magnetické pole $\mathfrak{B}^{(1)}$ odpovídající vektorovému potenciálu $\mathfrak{A}^{(1)}$ vypočteme obvyklým způsobem $\mathfrak{B}^{(1)} = \text{rot } \mathfrak{A}^{(1)}$. Vypočteme z-ovou složku

$$\begin{aligned} B_z^{(1)} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \dot{p}_y \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \dot{p}_x \right) \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\left(-\frac{x}{r^3} \dot{p}_y + \frac{y}{r^3} \dot{p}_x \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \dot{p}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned}$$

Člen v první závorce ubývá rychleji než $1/r$, takže radiační část pole $\mathfrak{B}^{(1)}$ — označíme ji $\mathfrak{B}^{(1)}$ — je rovna

$$\mathfrak{B}_z^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left(\frac{\partial \dot{p}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial y} \right). \quad \text{XI(3.4)}$$

Jelikož $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(\tau)$, upravíme ještě derivace

$$\frac{\partial \dot{p}_y}{\partial x} = \frac{\partial \dot{p}_y}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} = -\frac{x}{cr} \ddot{p}_y,$$

$$\frac{\partial \dot{p}_x}{\partial y} = \frac{\partial \dot{p}_x}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{y}{cr} \ddot{p}_x,$$

takže je

$$\mathfrak{B}_z^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} [\ddot{p}_x n_y - \ddot{p}_y n_x].$$

Obdobně vypočteme zbývající složky pole $\mathfrak{B}^{(1)}$. Výsledek je dán vzorcem

$$\mathfrak{B}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} [\dot{\mathfrak{A}}, \mathbf{n}] = \frac{1}{c} [\mathfrak{A}^{(1)}, \mathbf{n}], \quad \text{XI(3.5)}$$

resp. pro magnetickou intenzitu

$$\mathfrak{H}^{(1)} = \frac{1}{4\pi cr} [\dot{\mathfrak{A}}, \mathbf{n}]. \quad \text{XI(3.6)}$$

Pro radiační pole vyšších multipolarit se (např. užitím vzorce XI(2.10)) obdobně dostane

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{c} [\mathfrak{A}, \mathbf{n}]. \quad \text{XI(3.7)}$$

Radiační složku \mathfrak{E} elektrické intenzity \mathbf{E} vypočteme ze vztahu

$$\mathfrak{E} = c[\mathfrak{B}, \mathbf{n}] = [\mathfrak{A}, \mathbf{n}] \times \mathbf{n}. \quad \text{XI(3.8)}$$

Poyntingův vektor \mathfrak{S} radiačního pole upravíme pomocí XI(3.8). Při úpravě dvojitého vektorového součinu vezmeme v úvahu, že XI(3.7) implikuje $(\mathfrak{H}, \mathbf{n}) = 0$. Máme tak důležitý vztah

$$\mathfrak{S} = [\mathfrak{E}, \mathfrak{H}] = c\mu_0 \mathfrak{H}^2 \mathbf{n}. \quad \text{XI(3.9)}$$

V elektrické dipólové aproximaci (tzv. aproximaci E1) je

$$\mathfrak{E}^{(1)} = \frac{\mu_0}{4\pi r} [\dot{\mathfrak{p}}, \mathbf{n}] \times \mathbf{n}, \quad \text{XI(3.10)}$$

$$\mathfrak{S}^{(1)} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} [\dot{\mathfrak{p}}, \mathbf{n}]^2 \mathbf{n}. \quad \text{XI(3.11)}$$

Při úpravě jsme do XI(3.9) dosadili XI(3.6) a užili vztahu $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.

Množství energie dI emitované za jednotku času do prostorového úhlu $d\Omega$ je dáno vztahem $\mathfrak{S}_n ds = \mathfrak{S}_n r^2 d\Omega$, což pro záření typu E1 dá

$$dI^{(E1)} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} [\dot{\mathfrak{p}}, \mathbf{n}]^2 d\Omega = \frac{\dot{p}^2 \sin^2 \Theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega, \quad \text{XI(3.12)}$$

kde Θ je úhel mezi $\dot{\mathfrak{p}}$ a \mathbf{n} . Integrací přes Ω dostaneme celkovou intenzitu záření elektrického dipólu

$$I^{(E1)} = \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c^3} \dot{p}^2. \quad \text{XI(3.13)}$$

Připomeňme si ještě jednou, že elektrický dipólový moment \mathbf{p} závisí na společném retardačním čase $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(\tau)$.

Pro jednu částici je $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$, a tudíž

$$I^{(E1)} = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \dot{r}^2. \quad \text{XI(3.14)}$$

Nabitá částice pohybující se zrychleně emituje elektromagnetické záření. V praxi k tomu nejčastěji dochází při nárazu nabitých částic na „brzdící“ překážku, proto mluvíme o *brzdném záření*.

Všimněme si nyní soustavy částic se stejným měrným nábojem $(e_A/m_A) = \text{konst.}$ (V praxi se to vyskytuje u soustavy stejných částic.) Elektrický dipólový moment upravíme takto

$$\mathbf{p} = \sum_A e_A \mathbf{r}_A = \sum_A \left(\frac{e_A}{m_A} \right) m_A \mathbf{r}_A = \text{konst.} \sum_A m_A \mathbf{r}_A.$$

Vzpomeneme-li si na definici hmotného středu (těžiště)

$$\mathbf{r}_0 = \frac{\sum_A m_A \mathbf{r}_A}{\sum_A m_A},$$

pak vidíme, že elektrický dipólový moment je úměrný polohovému vektoru \mathbf{r}_0 hmotného středu, $\mathbf{p} = \text{konst.} \cdot \mathbf{r}_0$. U uzavřené soustavy je zrychlení hmotného středu rovno nule (rovnoměrný přímočarý pohyb hmotného středu), proto uzavřená soustava částic se stejným měrným nábojem nemůže emitovat elektrické dipólové záření E1. U takových soustav nutno zahrnout vyšší členy rozvoje XI(2.8), což provedeme v další části této kapitoly.

Použijeme předešlé výsledky na *Hertzův dipól* kmitající harmonicky

$$\mathbf{p}(\tau) = \mathbf{p}_0 \sin \omega \tau. \quad \text{XI(3.15)}$$

Takový dipól lze užít jako jednoduchý model zářícího atomu anebo antény vysílače. Je-li emitovaná energie neustále doplňována vnějším zdrojem, pak lze zanedbat útlum kmitů a použít vzorce XI(3.12), resp. XI(3.13). Máme tak

$$dI^{(E1)} = \frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2(\omega \tau) \sin^2 \Theta d\Omega, \quad \text{XI(3.16)}$$

$$I^{(E1)} = \frac{\omega^4 p_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \sin^2(\omega\tau). \quad \text{XI(3.17)}$$

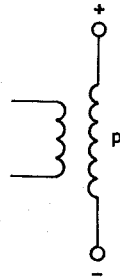
Střední výkon dostaneme tak, že $\sin^2(\omega\tau)$ nahradíme střední hodnotou 1/2, takže je

$$d\langle I^{(E1)} \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \Theta \, d\Omega, \quad \text{XI(3.18)}$$

$$\langle I^{(E1)} \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}. \quad \text{XI(3.19)}$$

Střední emitovaná intenzita záření je přímo úměrná kvadrátu amplitudy elektrického dipólového momentu a roste se čtvrtou mocninou frekvence kmitů. Při stejných amplitudách kmitů intenzita záření roste velice silně s rostoucí frekvencí. Směrová charakteristika je zřejmá z XI(3.18), kde Θ je úhel mezi orientací dipólu a průvodičem bodu pozorování. Intenzita záření je maximální ve směru kolmém k orientaci dipólu.

V praxi se můžeme s elektrickým dipólovým zářením setkat při záření (otevřeně) lineární antény (viz obr. XI.1). Elektrický dipólový moment $p(\tau) = le(\tau)$ se (při



Obr. XI.1.

fixované délce antény l) bude měnit následkem změny náboje na jednom konci antény. Derivace dipólu

$$\frac{dp}{d\tau} = l \frac{de}{d\tau} = l\mathcal{I}$$

pak jednoduše souvisí se zadaným proudem \mathcal{I} .

V případě libovolné závislosti $p \equiv p(\tau)$ je výpočet střední intenzity obdobný. Závislost $p(\tau)$ rozvineme na Fourierovu řadu podle frekvencí $\omega_n = n\omega$. Místo toho, abychom psali

$$p(\tau) = \text{Re} \sum_n p_n \exp(i\omega_n \tau),$$

zapišeme

$$p(\tau) = \frac{1}{2} \sum_n [p_n \exp(i\omega_n \tau) + p_n^* \exp(-i\omega_n \tau)]; \quad \text{XI(3.20)}$$

odtud

$$\ddot{p}(\tau) = -\frac{1}{2} \sum_n \omega_n^2 [p_n \exp(i\omega_n \tau) + p_n^* \exp(-i\omega_n \tau)].$$

Potřebujeme vypočít

$$\langle (\ddot{p})^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\ddot{p})^2 \, d\tau.$$

Při výpočtu se vyskytnou integrály typu

$$R_{mn} = \frac{1}{T} \int_0^T \exp[i(n \pm m)\tau] \, d\tau,$$

které dají nulu, s výjimkou případů, kdy $n \pm m = 0$. Po jednoduchém výpočtu pak dostaneme

$$\langle (\ddot{p})^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n^4 |p_n|^2, \quad \text{XI(3.21)}$$

a tudíž

$$\langle I^{(E1)} \rangle = \frac{1}{12\pi \epsilon_0 c^3} \sum_n \omega_n^4 |p_n|^2. \quad \text{XI(3.22)}$$

Celková střední intenzita záření je rovna součtu středních intenzit jednotlivých harmonických komponent. V případě spojitého spektra se součet XI(3.20), a tudíž i XI(3.22) nahradí odpovídajícími integrály.

XI.4 Betatronové záření

V řadě experimentálních a technických zařízení jsou nabitě částice vychylovány magnetickým polem. Vlivem Lorentzovy síly nabitě částice nabývají zrychlení

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0], \quad \text{XI(4.1)}$$

kde \mathbf{B}_0 je magnetické pole, které zde pokládáme za homogenní a na čase nezávislé. O částici předpokládáme, že se pohybuje rychlostí malou ve srovnání s rychlostí světla ($v \ll c$), takže její zrychlení lze popsat nerelativistickým vzorcem XI(4.1).

Úhlové rozdělení emitovaného záření dostaneme tak, že do XI(3.12) dosadíme

$$\ddot{\mathbf{p}} = e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2}{m} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0], \quad \text{XI(4.2)}$$

což dá

$$dI^{(E)} = \frac{e^4}{4\pi \epsilon_0 m^2 c^3} ([\mathbf{v}, \mathbf{B}_0] \times \mathbf{n})^2 \, d\Omega. \quad \text{XI(4.3)}$$

Obdobně po dosazení XI(4.2) do XI(3.13) dostaneme pro celkovou intenzitu vyjádření

$$I^{(B)} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0]^2. \quad \text{XI(4.4)}$$

Záření tohoto druhu se nazývá *betatronové* nebo *magnetické brzdné záření*. Zvolíme-li magnetické pole \mathbf{B}_0 ve směru osy z , tj. $\mathbf{B}_0 \equiv (0, 0, B_0)$, pak je

$$I^{(B)} = \frac{e^4 B_0^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} (v_x^2 + v_y^2). \quad \text{XI(4.5)}$$

V zařízeních na uskutečnění řízené termonukleární syntézy je ionizovaný plyn (plazma) udržován v uzavřené části prostoru (v tzv. magnetických nádobách) vnějším magnetickým polem.

Nabitě částice (elektrony a atomová jádra) emitují při svém pohybu v magnetickém poli elektromagnetické záření. Jelikož intenzita tohoto záření je nepřímo úměrná čtverci hmotnosti částice, bude podstatný rozdíl těchto radiačních ztrát pocházet od elektronů, jelikož hmotnost je o tři řády menší než hmotnost vodíkových jader. Ve vzorci XI(4.5) bude symbol m označovat hmotnost elektronu.

Ionizovaný plyn je udržován při teplotě \mathcal{T} . Střední intenzitu dostaneme tak, že v XI(4.5) zavedeme střední kvadratické rychlosti. Podle ekvipartičního teorému je

$$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v_y^2 \rangle = \frac{1}{2} k \mathcal{T},$$

kde k je Boltzmannova konstanta, takže pro střední intenzitu platí

$$\langle I^{(B)} \rangle = \frac{e^4 B_0^2 k \mathcal{T}}{6\pi\epsilon_0 m^3 c^3}. \quad \text{XI(4.6)}$$

Je-li v objemové jednotce $N^{(e)}$ elektronů, pak objemová jednotka plazmatu vyzáří za jednotku času (vlivem betatronového záření) střední energii $W^{(B)} = N^{(e)} \langle I^{(B)} \rangle$, tj.

$$W^{(B)} = \frac{e^4}{6\pi\epsilon_0 m^3 c^3} B_0^2 N^{(e)} k \mathcal{T}. \quad \text{XI(4.7)}$$

Kinetický tlak plynu je $2Nk\mathcal{T} \equiv (N^{(i)} + N^{(e)})k\mathcal{T}$, kde $N^{(i)}$ je hustota iontů. Tento tlak je v uvedených zařízeních kompenzován magnetickým tlakem $B_0^2/(2\mu_0)$, což vede k podmínce

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = 2NkT.$$

Tuto hodnotu B_0^2 dosadíme do XI(4.7) a zavedeme tzv. klasický poloměr elektronu¹¹⁾

$$r_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \approx 2,818 \cdot 10^{-15} \text{ m}. \quad \text{XI(4.8)}$$

Po jednoduchých úpravách získáme pro betatronové ztráty plazmatu rovnici

$$W^{(B)} = \frac{32}{3} \pi c r_0^2 m c^2 N^{(e)} N \left(\frac{k \mathcal{T}}{m c^2} \right)^2. \quad \text{XI(4.9)}$$

Betatronové ztráty rostou kvadraticky s teplotou plazmatu.

Pro ilustraci uvedeme, že v typických zařízeních je $N^{(e)} = N^{(i)} = 10^{21} \text{ m}^{-3}$, $\mathcal{T} = 10^7 \text{ K}$; po dosazení číselných hodnot do XI(4.10) dostaneme pro měrný výkon betatronových ztrát překvapivě velikou hodnotu

$$W^{(B)} \approx 5 \text{ M W m}^{-3}.$$

Je-li rychlost částice srovnatelná s rychlostí světla, nutno započít relativistický vzrůst hmotnosti částice s rychlostí, popř. vzít hybnost částice $mv(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Místo XI(4.4) pak platí

$$I^{(B)} = \frac{e^4 [\mathbf{v}, \mathbf{B}]^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}. \quad \text{XI(4.10)}$$

Poznámka: V tzv. magnetických nádobách na udržení horkého plazmatu má magnetické pole značně složitou strukturu, proto i výpočet betatronových ztrát je nutno provádět v závislosti na konkrétním tvaru magnetické nádoby. Použitý zjednodušený model homogenního pole je vhodnou ilustrací metody výpočtu, přičemž získané výsledky vcelku vystihují i závislosti v reálných zařízeních.

XI.5 Magnetické dipólové a elektrické kvadrupólové záření

Přejdeme k úpravě druhého členu multipólového rozvoje radiačního pole

$$\mathcal{N}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi cr} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}) \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau) d^3 r',$$

resp.

$$\mathcal{N}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \frac{\partial}{\partial \tau} \int (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}) \mathbf{J}(\mathbf{r}', \tau) d^3 r'. \quad \text{XI(5.1)}$$

¹¹⁾ Zde nám postačí chápat tuto veličinu jako vhodnou kombinaci univerzálních konstant. O souvislostech této veličiny s „rozměrem“ elektronu pojednáme při jiných příležitostech, např. v čl. XI.8.

Proudovou hustotu bodových nábojů

$$\mathbf{J} = \sum_A e_A \mathbf{v}_A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_A)$$

dosadíme do XI(5.1), což po integraci poskytne vztah

$$\mathfrak{V}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \frac{\partial}{\partial \tau} \sum_A e_A (\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{v}_A. \quad \text{XI(5.2)}$$

Člen $(\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{v}_A \equiv (\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \dot{\mathbf{r}}_A$ upravíme takto

$$(\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{v}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_A \mathbf{n}) \mathbf{r}_A + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{v}_A - \frac{1}{2} (\mathbf{v}_A \mathbf{n}) \mathbf{r}_A.$$

První dva členy na pravé straně jsou derivací výrazu $\frac{1}{2} (\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{r}_A$, tj.

$$\frac{1}{2} (\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{v}_A + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_A \mathbf{n}) \mathbf{r}_A = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{2} (\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{r}_A.$$

Třetí a čtvrtý člen lze spojit do dvojitého vektorového součinu

$$\frac{1}{2} [(\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{v}_A - (\mathbf{v}_A \mathbf{n}) \mathbf{r}_A] = \frac{1}{2} [\mathbf{r}_A, \mathbf{v}_A] \times \mathbf{n}.$$

Tím jsme pro člen $\mathfrak{V}^{(2)}$ získali vyjádření

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}^{(2)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{6} \sum_A 3 e_A (\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{r}_A + \\ &+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{2} \sum_A e_A [\mathbf{r}_A, \mathbf{v}_A] \times \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Veličina

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \sum_A e_A [\mathbf{r}_A, \mathbf{v}_A] \quad \text{XI(5.3)}$$

je magnetický dipólový moment soustavy bodových nábojů.

Člen $\mathfrak{V}^{(2)}$ rozdělíme na dvě části

$$\mathfrak{V}^{(2)} \equiv \mathfrak{V}^{(M1)} + \mathfrak{V}^{(E2)}, \quad \text{XI(5.4)}$$

kde

$$\mathfrak{V}^{(M1)} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} [\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}], \quad \text{XI(5.5)}$$

$$\mathfrak{V}^{(E2)} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{6} \sum_A 3 e_A (\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{r}_A. \quad \text{XI(5.6)}$$

Člen $\mathfrak{V}^{(M1)}$ souvisí s magnetickým dipólovým momentem soustavy (proto označíme M1) a člen $\mathfrak{V}^{(E2)}$ upravíme pomocí elektrického kvadrupólového momentu E2.

Potenciál $\mathfrak{V}^{(E2)}$ překalibrujeme pomocí funkce $f \equiv f(r)$

$$\mathfrak{V}^{(E2)} \rightarrow \mathfrak{V}^{(E2)} + \nabla f = \mathbf{A}^{(E2)} + \frac{\mathbf{r}}{r} f'(r).$$

K $\mathfrak{V}^{(E2)}$ lze přidat libovolný násobek jednotkového vektoru $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Vzpomeneme-li si na definici tenzoru elektrického kvadrupólového momentu

$$Q_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}', \tau) (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) d^3 \mathbf{r}',$$

což pro soustavu bodových nábojů

$$\rho(\mathbf{r}', \tau) = \sum_A e_A \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_A)$$

dá

$$Q_{ij} = \sum_A e_A (3x_{iA} x_{jA} - r_{A}^2 \delta_{ij}), \quad \text{XI(5.7)}$$

vidíme, že je výhodné přecejchovat $\mathfrak{V}^{(E2)}$ na

$$\mathfrak{V}^{(E2)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \frac{1}{6} \sum_A e_A [3(\mathbf{r}_A \mathbf{n}) \mathbf{r}_A - r_{A}^2 \mathbf{n}].$$

Vzniklý součet lze vyjádřit jako skalární součin tenzoru $Q \equiv Q_{ij}$ a jednotkového vektoru \mathbf{n} , takže je $((Q\mathbf{n})_i \equiv Q_{ij} n_j)$

$$\mathfrak{V}^{(E2)} = \frac{1}{24\pi\epsilon_0 c^3 r} (\ddot{Q}\mathbf{n}). \quad \text{XI(5.8)}$$

Pole $\mathfrak{V}^{(E2)}$ tedy souvisí s elektrickým kvadrupólovým momentem soustavy — jak bylo uvedeno výše.

S ohledem na snazší reference uvedeme výsledný vektorový potenciál radičního pole odpovídajícího prvním dvěma členům rozvoje XI(2.8)

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left\{ \dot{\mathbf{p}} + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}] + \frac{1}{6c} \ddot{Q}\mathbf{n} \right\}. \quad \text{XI(5.9)}$$

Pomocí vzorců XI(3.7) a XI(3.8) vypočteme pole \mathfrak{B} , \mathfrak{E} ve stejné aproximaci

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \left\{ [\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}] + \frac{1}{c} [\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}] \times \mathbf{n} + \frac{1}{6c} (\ddot{Q}\mathbf{n}) \times \mathbf{n} \right\}, \quad \text{XI(5.10)}$$

$$\mathfrak{E} = c[\mathfrak{B}, \mathbf{n}]. \quad \text{XI(5.11)}$$

Nyní přejdeme k výpočtu intenzity záření členů M1 a E2. Začneme magnetickým dipólovým členem. Z indukce

$$\mathfrak{B}^{(M1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^4 r} [\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}] \times \mathbf{n} \quad \text{XI(5.12)}$$

určíme intenzitu záření

$$dI = \mathcal{J}_n r^2 d\Omega = \frac{c}{\mu_0} \mathfrak{B}^2 r^2 d\Omega.$$

Po dosazení máme

$$dI^{(M1)} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^5} ([\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}] \times \mathbf{n})^2 d\Omega.$$

Dvojitý vektorový součin upravíme $[\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}] \times \mathbf{n} = (\dot{\mathbf{m}}\mathbf{n})\mathbf{n} - \dot{\mathbf{m}}$, což po povýšení na druhou dá

$$dI^{(M1)} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^5} [\dot{\mathbf{m}}, \mathbf{n}]^2 d\Omega = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^5} \dot{\mathbf{m}}^2 \sin^2 \Theta d\Omega, \quad \text{XI(5.13)}$$

kde Θ je úhel mezi $\dot{\mathbf{m}}$ a \mathbf{n} .

Vzorec XI(5.13) má stejnou strukturu jako vzorec XI(3.12) pro elektrické dipólové záření E1.

Integrací rovnice XI(5.13) získáme celkovou intenzitu magnetického dipólového záření

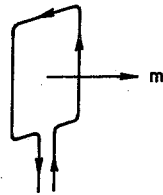
$$I^{(M1)} = \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c^5} \dot{\mathbf{m}}^2. \quad \text{XI(5.14)}$$

Jednoduchým příkladem magnetického dipólového záření je záření rámové antény (viz obr. XI.2). Proud \mathbf{J} protékající smyčkou o ploše \mathbf{s} vytváří magnetický dipólový moment

$$\mathbf{m} = \mathbf{J}\mathbf{s}.$$

Plochu \mathbf{s} lze považovat za danou, takže $\dot{\mathbf{m}} = \dot{\mathbf{J}}\mathbf{s}$. Dosazením tohoto vztahu do XI(5.13) dostaneme směrovou charakteristiku záření rámové antény

$$dI^{(M1)} = \frac{(\dot{\mathbf{J}})^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^5} [\mathbf{s}, \mathbf{n}]^2 d\Omega.$$



Obr. XI.2.

Další postup (harmonická závislost $J = J_0 \sin \omega t$, Fourierův rozklad, střední časový výkon) je stejný jako u lineární antény (viz čl. XI.3), proto jej nebudeme opakovat.

Má-li soustava částic stejný měrný náboj $(e_A/m_A) = \text{konst}$, pak magnetický dipólový moment \mathbf{m} je přímo úměrný momentu hybnosti soustavy $\mathbf{m} = g \mathcal{C}$ (viz čl. IV.3). S ohledem na zachování momentu hybnosti soustavy je v tomto případě $\dot{\mathbf{m}} = 0$, takže taková soustava částic nemůže kromě E1 emitovat ani magnetické dipólové záření M1.

Nyní přejdeme k výpočtu elektrického kvadrupólového záření. Pomocí pole

$$\mathfrak{B}^{(E2)} = \frac{1}{24\pi \epsilon_0 c^3 r} [(\ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{n}) \times \mathbf{n}] \quad \text{XI(5.15)}$$

získáme intenzitu záření

$$dI^{(E2)} = \frac{1}{144\pi \epsilon_0 c^5} [(\ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{n}) \times \mathbf{n}]^2 \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad \text{XI(5.16)}$$

Vzniklý výraz upravíme

$$[(\ddot{\mathbf{Q}}\mathbf{n}) \times \mathbf{n}]^2 = e_{ijk} (\ddot{Q}_n)_j n_k e_{k'j'k'} (\ddot{Q}_n)_{j'} n_{k'} = e_{ijk} e_{j'k'} \ddot{Q}_j \ddot{Q}_{j'} n_r n_r n_k n_{k'}.$$

Dále užijeme

$$e_{ijk} e_{j'k'} = \delta_{jj'} = \delta_{jj'} \delta_{kk'} - \delta_{jk} \delta_{j'k'},$$

čímž převedeme XI(5.16) do tvaru

$$dI^{(E2)} = \frac{1}{144\pi \epsilon_0 c^5} \ddot{Q}_j n_r n_r (\ddot{Q}_{j'} - n_j n_{j'} \ddot{Q}_{j'}) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad \text{XI(5.17)}$$

Celkovou intenzitu získáme integrací, kterou provedeme pomocí vztahů (viz dodatek VII)

$$\int n_r n_r \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{3} \delta_{rr'},$$

$$\int n_j n_{j'} n_r n_r \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{1}{15} (\delta_{jj'} \delta_{rr'} + \delta_{jr} \delta_{j'r'} + \delta_{jr'} \delta_{j'r}).$$

Při úpravě ještě užijeme symetrie tenzoru $Q_{ij} = Q_{ji}$ a nulového součtu diagonálních elementů $Q_{ii} = 0$ (viz čl. III.7). Po těchto rutinních úpravách dospějeme k výslednému vzorci

$$I^{(E2)} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{180 c^5} \ddot{Q}_{jk} \ddot{Q}_{jk}. \quad \text{XI(5.18)}$$

XI.6 Hertzovy vektory

Při odvozování rovnic pro elektromagnetické potenciály v kap. X jsme předpokládali lineární materiálové vztahy $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. V rovnicích

$$\square \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}, \quad \square \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

vystupovaly v roli zdrojů pole náboje s hustotou ρ a proudy s hustotou \mathbf{j} (resp. \mathbf{J}). Při studiu elektromagnetického záření jsme se setkali s případy, kdy elektromagne-

tické pole závisí na elektrickém a magnetickém dipólovém momentu soustavy. To je důvodem k tomu, abychom převedli soustavu rovnic pro potenciály do takového tvaru, v němž v roli zdrojů pole budou vystupovat elektrická polarizace \mathbf{P} a magnetizace \mathbf{M} .

Za tím účelem zavedeme v Maxwellových rovnicích definiční vztahy $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, $\mathbf{H} = (\mathbf{B}/\mu_0) - \mathbf{M}$. Po jednoduchých úpravách, při nichž uijeme $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, získáme výchozí soustavu rovnic

$$\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{XI(6.1)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right), \quad \text{XI(6.2)}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad \text{XI(6.3)}$$

Z druhé rovnice XI(6.1) opět plyne, že lze položit

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad \text{XI(6.4)}$$

Po dosazení XI(6.4) do XI(6.3) dospějeme ke standardnímu vztahu

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \quad \text{XI(6.5)}$$

Vyjádření vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} rovnicemi XI(6.4) a XI(6.5) je nezávislé na volbě materiálových vztahů.

Rovnice pro vektorový a skalární potenciál dostaneme po dosazení vztahů XI(6.4) a XI(6.5) do XI(6.2) a první rovnice XI(6.1). Výsledkem jsou rovnice

$$\square \Phi = -\frac{1}{\epsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}), \quad \text{XI(6.6)}$$

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \left(\mathbf{j} + \operatorname{rot} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right). \quad \text{XI(6.7)}$$

přičemž mezi \mathbf{A} a Φ platí Lorentzova podmínka

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad \text{XI(6.8)}$$

Pro úplnost ještě poznamenáme, že operátor \square zde značí

$$\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Rovnice XI(6.6) a XI(6.7) mají obdobný tvar jako odpovídající rovnice X(3.14) a X(3.15) pro pole ve vakuu s tím důležitým rozdílem, že místo ρ a \mathbf{j} figurují v roli zdrojů $\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}$ a $\mathbf{j} + \operatorname{rot} \mathbf{M} + (\partial \mathbf{P}/\partial t)$.

Budeme uvažovat dva speciální případy rovnic XI(6.6) a XI(6.7). V prvním případě položíme

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{M} = 0, \quad \text{XI(6.9)}$$

což vede k rovnicím

$$\square \Phi = +\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \text{XI(6.10)}$$

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad \text{XI(6.11)}$$

Z kapitoly II víme, že $\rho^{(p)} = -\operatorname{div} \mathbf{P}$ představuje hustotu polarizačního náboje a $\mathbf{j}^{(p)} = (\partial \mathbf{P}/\partial t)$ hustotu polarizačního proudu. V rovnicích XI(6.10) a XI(6.11) vystupuje polarizace \mathbf{P} v roli zdroje elektromagnetického pole.

Ve druhém případě vezmeme

$$\rho = 0, \quad \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{P} = 0, \quad \text{XI(6.12)}$$

což vede k rovnicím

$$\square \Phi = 0, \quad \text{XI(6.13)}$$

$$\square \mathbf{A} = -\mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{M}. \quad \text{XI(6.14)}$$

Zdrojem elektromagnetického pole je zde magnetizace \mathbf{M} , popř. magnetizační proud (viz čl. I.8 a II.3) $\operatorname{rot} \mathbf{M}$.

Poznamenejme ještě, že v obou případech je splněna Lorentzova kalibrační podmínka XI(6.8). Oba případy lze sjednotit zavedením tzv. Hertzových vektorů.

Kalibrační podmínku splníme identicky tak, že položíme

$$\Phi = -\operatorname{div} \mathbf{\Pi}^{(e)}, \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{\Pi}^{(e)}}{\partial t}, \quad \text{XI(6.15)}$$

kde veličina $\mathbf{\Pi}^{(e)}$ je tzv. první Hertzův vektor. Rovnice pro tento vektor dostaneme tak, že XI(6.15) dosadíme do XI(6.10) a XI(6.11). Výsledkem jsou rovnice

$$\operatorname{div} \left(\square \mathbf{\Pi}^{(e)} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\square \mathbf{\Pi}^{(e)} + \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P} \right) = 0.$$

Nejednoznačnost $\mathbf{\Pi}^{(e)}$ umožňuje (viz příklad XI.4) splnit obě rovnice tak, že položíme

$$\square \mathbf{\Pi}^{(e)} = -\frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{P}. \quad \text{XI(6.16)}$$

Poněvadž vektor $\mathbf{\Pi}^{(e)}$ je určen polarizací \mathbf{P} , nazývá se někdy též potenciálem polarizace. Zde však tuto terminologii užívat nebudeme.

Ve druhém případě XI(6.12) položíme

$$\Phi = 0, \quad \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{\Pi}^{(m)}. \quad \text{XI(6.17)}$$

Kalibrační podmínka XI(6.8) je tím splněna identicky. Po dosazení XI(6.17) do XI(6.14) získáme rovnici

$$\text{rot}(\square \mathbf{\Pi}^{(m)} + \mu_0 \mathbf{M}) = 0.$$

Druhý Hertzův vektor $\mathbf{\Pi}^{(m)}$ tak určíme z rovnice

$$\square \mathbf{\Pi}^{(m)} = -\mu_0 \mathbf{M}, \quad \text{XI(6.18)}$$

kteřá je stejného typu jako rovnice XI(6.16) pro první Hertzův vektor. V úloze zdroje $\mathbf{\Pi}^{(m)}$ vystupuje magnetizace \mathbf{M} .

Retardovaná řešení rovnic XI(6.16) a XI(6.18) můžeme zapsat na základě výsledků čl. X.4 ve tvaru

$$\mathbf{\Pi}^{(e)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}', t')}{R} d^3 r', \quad \text{XI(6.19)}$$

$$\mathbf{\Pi}^{(m)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}', t')}{R} d^3 r', \quad \text{XI(6.20)}$$

kde — jako obvykle — $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $t' = t - R/c$.

Pole \mathbf{E} , \mathbf{B} najdeme tak, že v prvním případě uijeme XI(6.15) a pak dosadíme do XI(6.4) a XI(6.5). Výsledkem těchto úprav jsou vztahy

$$\mathbf{E} = \left(\text{grad div} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{\Pi}^{(e)}, \quad \text{XI(6.21)}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{\Pi}^{(e)}. \quad \text{XI(6.22)}$$

Ve druhém případě XI(6.17) máme

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{\Pi}^{(m)}, \quad \text{XI(6.23)}$$

$$\mathbf{B} = \text{rot rot } \mathbf{\Pi}^{(m)}. \quad \text{XI(6.24)}$$

Druhý případ se vyznačuje tím, že pole je čistě vírové, jelikož

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

V oblasti vně zdrojů ($\mathbf{P} = 0$, $\mathbf{M} = 0$) oba vektory $\mathbf{\Pi}^{(e)}$, $\mathbf{\Pi}^{(m)}$ vyhovují stejné rovnici

$$\square \mathbf{\Pi} = 0, \quad \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^{(e)}, \mathbf{\Pi}^{(m)}. \quad \text{XI(6.25)}$$

Vyjádríme-li odtud $(\partial^2 \mathbf{\Pi}^{(e)} / \partial t^2) = c^2 \nabla \mathbf{\Pi}^{(e)}$ a dosadíme do XI(4.21), dostaneme pro první případ

$$\mathbf{E} = \text{rot rot } \mathbf{\Pi}^{(e)}, \quad \text{XI(6.26)}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{\Pi}^{(m)}. \quad \text{XI(6.27)}$$

Ve druhém případě máme obdobné vztahy shodné s XI(6.23) a XI(6.24). Příbuznost rovnic XI(6.26) a XI(6.27) s rovnicemi XI(6.23) a XI(6.24) umožňuje ze známého pole elektrického dipólu najít pole magnetického dipólu a obráceně.

Použijeme získané výsledky na výpočet radiačního pole časově proměnného elektrického dipólu.

Nechť polarizace \mathbf{P} je nenulová uvnitř oblasti

$$r' \equiv |\mathbf{r}'| \leq l.$$

Na vzdálenostech $r \gg l$ lze XI(6.19) vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{\Pi}^{(e)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int \mathbf{P}(\mathbf{r}', t') d^3 r'. \quad \text{XI(6.28)}$$

Čas $t' = t - R/c$ lze přibližně nahradit (viz XI(2.7))

$$t' = \tau + \frac{1}{c} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}) \cong \tau + \frac{l}{c}.$$

Je-li doba (l/c) potřebná k proběhnutí světelného signálu oblastí l velice malá vzhledem ke společné retardační době τ , pak místo XI(6.28) bude

$$\mathbf{\Pi}^{(e)} = \frac{p(\tau)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{p\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad \text{XI(6.29)}$$

Hertzův vektor $\mathbf{\Pi}^{(e)}$ má tvar (viz čl. VIII.8) sférické vlny $r^{-1} f(t - r/c)$, kde v roli funkce $f(t - r/c)$ vystupuje elektrický dipólový moment

$$\mathbf{p}(\tau) = \int \mathbf{P}(\mathbf{r}', \tau) d^3 r'. \quad \text{XI(6.30)}$$

Obdobným způsobem dostaneme z XI(6.20)

$$\mathbf{\Pi}^{(m)} = \frac{m(\tau)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} = \frac{m\left(t - \frac{r}{c}\right)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad \text{XI(6.31)}$$

kde

$$\mathbf{m}(\tau) = \int \mathbf{M}(\mathbf{r}', \tau) d^3 r' \quad \text{XI(6.32)}$$

je magnetický dipólový moment soustavy. Opět se jedná o (rozbíhavou) sférickou vlnu.

Vyjasníme si podmínky, za nichž platí řešení XI(6.29) a XI(6.31). Předpokládejme v XI(6.28) harmonickou závislost

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}', t') = \mathbf{P}_0(\mathbf{r}') e^{-i\omega t'}$$

Abychom mohli zanedbat vliv vnitřní retardace, tj. člen $\exp[i\omega(\mathbf{r}'\mathbf{n})/c]$, musí být $(\omega l/c) \ll 1$, tj.

$$l \ll \lambda, \quad \text{XI(6.33)}$$

kde $\lambda = 2\pi c/\omega$ je vlnová délka. Toto kritérium je snadno pochopitelné, jelikož při vlnové délce $\lambda \gg l$ je změna fáze vlny na vzdálenostech srovnatelných s rozměry systému zanedbatelná. Ke kritériu XI(6.33) je nutno ještě přidat

$$r \gg l. \quad \text{XI(6.34)}$$

Po těchto upřesněních přejdeme k výpočtu polí \mathbf{E} a \mathbf{B} . Klíčem k řešení jsou rovnice XI(6.26) a XI(6.27), v nichž $\mathbf{\Pi}^{(e)}$ je určeno rovnicí XI(6.29). Zavedeme sférické souřadnice r, ϑ, φ tak, že počátek zvolíme ve středu dipólu a zetovou osu ve směru dipólu (viz obr. XI.3). Jelikož $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(\tau)$, zvolená souřadná soustava závisí na τ . Tuto skutečnost nutno respektovat při výpočtu derivací. Je tedy

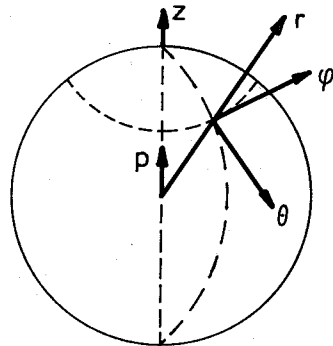
$$\Pi_r = \Pi \cos \vartheta, \quad \Pi_\vartheta = -\Pi \sin \vartheta, \quad \Pi_\varphi = 0, \quad \text{XI(6.35)}$$

kde $\Pi = (4\pi\epsilon_0 r)^{-1} p(t - r/c)$. Složky rotace vektoru \mathbf{a} ve sférických souřadnicích jsou (viz dodatek I)

$$\text{rot } \mathbf{a} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\varphi) - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} \right],$$

$$\text{rot}_\vartheta \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right],$$

$$\text{rot}_\varphi \mathbf{a} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\vartheta) - \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \right].$$



Obr. XI.3.

Na základě toho je

$$\text{rot } \mathbf{\Pi} = 0, \quad \text{rot}_\vartheta \mathbf{\Pi} = 0, \quad \text{rot}_\varphi \mathbf{\Pi} = -\sin \vartheta \frac{\partial \Pi}{\partial r}.$$

Ze vztahu XI(6.27) pak získáme složky magnetického pole

$$B_r = B_\vartheta = 0, \quad B_\varphi = -\frac{1}{c^2} \sin \vartheta \frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial t}. \quad \text{XI(6.36)}$$

Elektrické pole vypočteme ze vztahu XI(6.26). Výsledkem jednoduchých výpočtů jsou rovnice

$$E_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \text{rot}_\varphi \mathbf{\Pi}) = -\frac{2 \cos \vartheta}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad \text{XI(6.37)}$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \text{rot}_\vartheta \mathbf{\Pi}) = \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right), \quad \text{XI(6.38)}$$

$$E_\varphi = 0. \quad \text{XI(6.39)}$$

Elektrická intenzita je vždy v azimutální rovině a je kolmá na vektor \mathbf{B} magnetického pole.

Vypočteme pole \mathbf{E} a \mathbf{B} pro případ harmonické závislosti

$$\mathbf{\Pi} \equiv \mathbf{\Pi}^{(e)} = \frac{\mathbf{p}_0}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-i\omega(t-r/c)}, \quad \text{XI(6.40)}$$

kde \mathbf{p}_0 je konstantní vektor ve směru osy oscilátoru. Po provedení jednoduchých početních operací získáme rovnice

$$B_r = B_\vartheta = 0, \quad B_\varphi = -\frac{i\omega}{c^2 r} \sin \vartheta \left(1 - \frac{i\omega r}{c} \right) \Pi, \quad \text{XI(6.41)}$$

$$E_r = \frac{2 \cos \vartheta}{r^2} \left(1 - \frac{i\omega r}{c} \right) \Pi, \quad \text{XI(6.42)}$$

$$E_\vartheta = \frac{\sin \vartheta}{r^2} \left(1 - \frac{i\omega r}{c} - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \right) \Pi, \quad \text{XI(6.43)}$$

$$E_\varphi = 0. \quad \text{XI(6.44)}$$

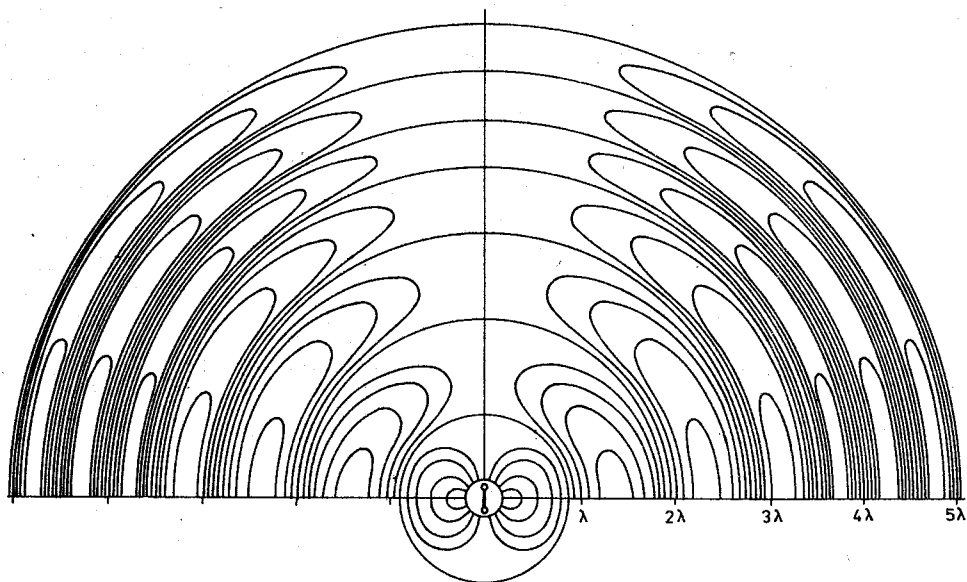
Pole \mathbf{E} , \mathbf{B} obsahují členy s různou rychlostí klesání pole se vzdáleností r . Rozhodujícím faktorem pro posouzení jednotlivých členů je podíl $(\omega r/c)$, resp. (λ/r) . Oblast $r \ll \lambda$ se nazývá blízkou zónou. V této oblasti je $(\omega r/c) \ll 1$, takže hlavní členy budou

$$E_r = \frac{2 \cos \vartheta}{r^2} \Pi, \quad E_\vartheta = \frac{\sin \vartheta}{r^2} \Pi, \quad E_\varphi = 0,$$

kde $\Pi = (4\pi\epsilon_0 r)^{-1} p_0 \exp(-i\omega t) \equiv p(t)$. V blízké oblasti je tedy (viz obr. XI.4)

$$E_r = \frac{2 \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3} p(t), \quad E_\vartheta = \frac{\sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3} p(t), \quad E_\varphi = 0, \quad \text{XI(6.45)}$$

což je stejná závislost jako u statického dipólu (viz čl. III.7). Tento výsledek nepřekvapuje, jelikož při $\lambda \gg r$ je změna fáze vlny na vzdálenosti r velmi malá.



Obr. XI.4. Elektrické pole zářícího elektrického dipólu

V daleké neboli vlnové zóně ($\omega r/c \gg 1$, tj. $r \gg \lambda$), stačí ve výrazech XI(6.41) až XI(6.44) pro pole ponechat pouze členy s nejpomalejším poklesem se vzdáleností, až jsou členy řádu $1/r$. Pole ve vlnové zóně je pak určeno rovnicemi

$$\mathcal{B}_\varphi = \mu_0 \mathcal{H}_\varphi = -\frac{\omega^2}{c^3} \sin \vartheta \Pi, \quad \mathcal{B}_r = \mathcal{B}_\vartheta = 0, \quad \text{XI(6.46)}$$

$$\mathcal{E}_\vartheta = -\frac{\omega^2}{c^3} \sin \vartheta \Pi, \quad \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_\varphi = 0, \quad \text{XI(6.47)}$$

kde

$$\Pi \equiv \frac{p(\tau)}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{p_0 e^{-i\omega\tau}}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Jelikož $\ddot{p}(\tau) \equiv (d^2 p/d\tau^2) = -\omega^2 p(\tau)$, můžeme položit

$$\mathcal{B}_\varphi = \frac{\sin \vartheta \ddot{p}(\tau)}{4\pi\epsilon_0 c^3 r}, \quad \mathcal{E}_\vartheta = \frac{\sin \vartheta \ddot{p}(\tau)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad \text{XI(6.48)}$$

což (po uvážení vztahu $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$) odpovídá vzorcům XI(3.6) a XI(3.10) pro radiální části pole elektrického dipólu. Pro intenzitu záření pak dostaneme vzorce XI(3.12) a XI(3.13).

Výpočet pole (časově proměnného) magnetického dipólu pomocí Hertzova vektoru $\mathbf{\Pi}^{(m)}$ je obdobný, proto jej přenecháváme čtenáři jako příklad ke cvičení.

Poznámka: Z vyjádření pole vzorci XI(6.41) až XI(6.44) je vidět, že v statickém případě $\omega = 0$ neexistují pole ubývající se vzdáleností jako A/r . Na tuto skutečnost jsme upozorňovali již v úvodním článku této kapitoly.

XI.7 Záření dipólového řetězce

Doposud jsme se zabývali zářením jednoho (izolovaného) dipólu. Výsledky lze snadno zobecnit na záření soustavy dipólů. Záření soustavy dipólů se vyznačuje (ve srovnání se zářením individuálního dipólu) některými specifickými rysy, které si stručně vysvětlíme na jednoduchém modelu.

Budeme předpokládat, že soustava elektrických dipólů je rozložena periodicky na přímce (ose x), přičemž rozměry dipólů jsou velmi malé vzhledem k vlnové délce emitovaného záření. Označíme-li a vzdálenost mezi sousedními dipóly, pak vektor polarizace \mathbf{P} bude vyjádřen rovnicí

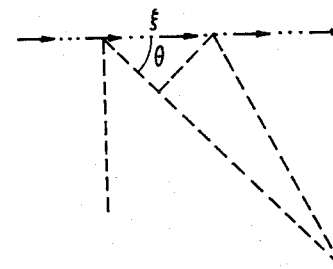
$$\mathbf{P}(r, t) = \sum_N \mathbf{p}_N(t) \delta(x - Na) \delta(y) \delta(z), \quad \text{XI(7.1)}$$

kde sumace se vztahuje na všechny dipóly v objemové jednotce.

Po dosazení XI(7.1) do XI(6.19) najdeme Hertzův vektor

$$\mathbf{\Pi}^{(e)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_N \frac{1}{R_N} \mathbf{p}_N \left(t - \frac{R_N}{c} \right), \quad \text{XI(7.2)}$$

kde R_N je vzdálenost od N -tého dipólu do bodu pozorování. Na velikých vzdálenostech od dipólového řetězce lze položit (viz obr. XI.5.)



Obr. XI.5.

$$R_N \cong r - \xi \cos \vartheta, \quad \text{XI(7.3)}$$

kde

$$\xi = Na \quad \text{XI(7.4)}$$

a ϑ je úhel mezi řetězcem a směrem pozorování.

Ve vlnové zóně bude

$$\Pi^{(e)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_N \mathbf{p}_N \left(\tau + \frac{Na}{c} \cos \vartheta \right), \quad \text{XI(7.5)}$$

kde $\tau = t - r/c$. Vezmeme harmonickou závislost

$$\mathbf{p}_N = \mathbf{p}_0 \exp \left\{ i \left[k\xi - \omega \left(\tau + \frac{\xi}{c} \cos \vartheta \right) \right] \right\}, \quad \text{XI(7.6)}$$

kde k je vlnčet a $\lambda_k = 2\pi/k$ je odpovídající vlnová délka. Disperzní zákon $\omega \equiv \omega(k)$ nebudeme zatím konkretizovat, poněvadž to by znamenalo zvolit nějaký model interakce mezi dipóly.

Za daného předpokladu bude

$$\Pi^{(e)} = \frac{\mathbf{p}_0 e^{-i\omega\tau}}{4\pi\epsilon_0 r} \sum_N \exp \left[i \left(k - \frac{\omega}{c} \cos \vartheta \right) Na \right]. \quad \text{XI(7.7)}$$

Je-li vlnová délka λ mnohem větší než vzdálenost mezi sousedními dipóly ($\lambda \gg a$), lze součet v XI(7.7) nahradit integrací podle vztahu

$$\sum_{N=-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa Na} = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\kappa\xi} d\xi = \frac{2\pi}{a} \delta(\kappa).$$

Je tedy pro řetězce dipólů rovnoměrně rozdělených po celé přímce

$$\Pi^{(e)} = \frac{\mathbf{p}_0 e^{-i\omega\tau}}{2\epsilon_0 a r} \delta(\kappa), \quad \text{XI(7.8)}$$

kde

$$\kappa = k - \frac{\omega}{c} \cos \vartheta. \quad \text{XI(7.9)}$$

Přítomnost Diracovy distribuce $\delta(\kappa)$ v XI(7.8) ukazuje, že ze všech dipólových vln, které se mohou šířit ve zkoumaném řetězce, k vyzařování přispívá pouze ta vlna, u níž je mezi frekvencí ω , vlnčetem k a úhlem ϑ splněn vztah

$$\kappa \equiv k - \frac{\omega}{c} \cos \vartheta = 0. \quad \text{XI(7.10)}$$

Na rozdíl od záření jednoho dipólu, kdy nejsou žádné vybrané směry emise záření, u soustavy dipólů vzniká *jehlovité záření*. Toto jehlovité záření je emitováno pouze ve směrech určených rovnicí

$$\cos \vartheta = \frac{c}{w}, \quad \text{XI(7.11)}$$

kde $w = \omega/k$ je fázová rychlost vln. Jelikož $|\cos \vartheta| \leq 1$, k záření je nutné, aby fázová rychlost dipólových vln byla větší (nebo alespoň rovna) než rychlost světla, $w \geq c$. Je-li okolní prostředí charakterizováno indexem lomu N , pak musí být $w > (c/N)$.

Vzorec XI(7.8) se vztahuje na nekonečně dlouhý dipólový řetězec. V případě řetězce konečné délky L je nutno sumaci v XI(7.7) provést od $N_0 = -L/(2a)$ do $N_1 = +L/(2a)$. Součet představuje geometrickou řadu s kvocientem $q = \exp(i\kappa a)$ a počtem členů $2N_1 + 1 = (L/a) + 1$. Po jednoduché úpravě dostaneme (při $L \gg a$)

$$\sum_N e^{i\kappa Na} = \frac{\sin\left(\frac{\kappa L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right)},$$

a tudíž

$$\Pi^{(e)} = \frac{\mathbf{p}_0 e^{-i\omega\tau}}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\sin\left(\frac{\kappa L}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\kappa a}{2}\right)}. \quad \text{XI(7.12)}$$

Pole a Poyntingův vektor určíme pomocí vztahů XI(6.46) a XI(6.47), čímž dostaneme vyzařovací charakteristiky daného typu antény.

XI.8 Thomsonův rozptyl

Dopadá-li na soustavu nábojů elektromagnetická vlna, pak pod vlivem této dopadající vlny dochází k pohybu nábojů. Tento (zrychlený) pohyb nábojů je pak doprovázen vznikem elektromagnetického záření, jehož směr šíření je obecně odlišný od směru šíření dopadající vlny. Uvedený proces nazýváme rozptylem elektromagnetických vln.

Nechť na volný nepohybující se náboj začne v čase $t=0$ dopadat rovinná lineárně polarizovaná vlna

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha), \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha).$$

Je-li získaná rychlost náboje malá ($v \ll c$), pak Lorentzovu magnetickou sílu lze zanedbat oproti elektrické síle. Při malých rychlostech (a malých rozměrech náboje) lze také zanedbat vliv členu $\mathbf{k}\mathbf{r}$, takže pohybový zákon bude

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha). \quad \text{XI(8.1)}$$

Z řešení

$$\mathbf{r} = -\frac{e\mathbf{E}}{m\omega^2} = -\frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{XI(8.2)}$$

je vidět, že náboj koná harmonický pohyb s frekvencí ω rovnou frekvenci dopadající vlny (fáze se liší o π). Takový náboj emituje sekundární vlny (záření) s frekvencí ω , což odpovídá *koherentnímu* rozptylu.

Z XI(8.2) získáme amplitudu rychlosti náboje

$$\mathbf{v} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega} \sin(\omega t + \alpha).$$

Podmínka $v \ll c$ pak dá příslušné kritérium použité aproximace

$$\frac{v}{c} \cong \frac{eE_0}{m\omega} \ll 1 \quad \text{XI(8.3)}$$

Svazující amplitudu a frekvenci vlny.

Z rovnice XI(8.1) vyjádříme $\dot{\mathbf{p}} = e\dot{\mathbf{r}}$ a dosadíme do vzorce XI(3.12) pro intenzitu elektrického dipólového záření, což dá

$$dI = \frac{e^4}{16\pi^2 m^2 c^3 \epsilon_0} [\mathbf{E}, \mathbf{n}]^2 d\Omega.$$

Zde $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}(\tau)$ je elektrická intenzita v retardovaném čase $\tau = t - r/c$. Označíme-li Θ úhel mezi polarizací (vektorem \mathbf{E}) dopadající vlny a směrem šíření rozptýlené vlny, pak je

$$dI = \frac{e^4}{16\pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} E^2 \sin^2 \Theta d\Omega. \quad \text{XI(8.4)}$$

Hustotu dopadajícího toku elektromagnetické energie charakterizujeme pomocí (absolutní hodnoty) Poyntingova vektoru

$$\mathbf{S} = c\mathbf{u} = c\epsilon_0 \mathbf{E}^2. \quad \text{XI(8.5)}$$

Poměr střední intenzity dI rozptýlené energie k střední hustotě toku dopadající energie má rozměr kvadrátu délky a nazývá se proto *diferenciálním účinným průřezem* $d\sigma$ pro rozptyl.

V daném případě se tento podíl nazývá *Thomsonovým účinným průřezem* pro rozptyl elektromagnetického záření (J. J. THOMSON, 1881)

$$d\sigma = \frac{dI}{S} = r_0^2 \sin^2 \Theta d\Omega. \quad \text{XI(8.6)}$$

Zde jsme znovu zavedli veličinu (viz čl. XI.4)

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2}, \quad \text{XI(8.7)}$$

která se (pro elektron) nazývá *klasickým poloměrem elektronu*. Původ této terminologie je v tom, že r_0^2 vystupuje v roli „efektivní plošky“ pro rozptyl elektromagnetického záření. Jak je však patrné přímo z *definice* $d\sigma = dI/S$ účinný průřez $d\sigma$ (a tedy i r_0) charakterizuje schopnost tělesa rozptylovat elektromagnetické záření, a nikoli rozměry rozptylujícího objektu. Z toho důvodu jsou úvahy o souvislosti r_0 s „geometrickým rozměrem“ elektronu pouhou *bezcestnou spekulací*. Klasický poloměr elektronu se zpravidla zavádí touto úvahou. Elektron vytvoří potenciál $e/(4\pi\epsilon_0 r)$. Interakční energie tohoto pole s nábojem je $e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$. Při vzdálenosti r_0 definované vztahem

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = mc^2$$

se tato energie stává rovnou klidové energii mc^2 elektronu. Z tohoto požadavku plyne pro r_0 vzorec XI(8.7). Při tom jsme veškerou hmotnost elektronu ztotožnili s hmotností odpovídající energii elektrostatického pole. K takovému ztotožnění však nemáme žádné přesvědčivé experimentální, ani teoretické důvody. Kvantový charakter elektromagnetického pole pak vede k tomu, že pokusy ztotožňovat r_0 s rozměrem elektronu jsou vysloveně *zcestné*. Zde budeme pokládat r_0 za vhodnou kombinaci univerzálních konstant.

Po těchto poznámkách se vrátíme k Thomsonovmu vzorci XI(8.6). Integrací přes prostorový úhel dospějeme ke vzorci

$$\sigma = \frac{8}{3}\pi r_0^2. \quad \text{XI(8.8)}$$

Pro elektron je $\sigma \cong 6,57 \cdot 10^{-29} \text{ m}^2$.

Účinný průřez koherentního rozptylu volným elektronem nezávisí na frekvenci a je *univerzální konstantou*.

Vzorec XI(8.6) se vztahuje na rozptyl (lineárně) polarizované vlny. V případě nepolarizované vlny upravíme vzorec takto: Dopadající vlna se šíří ve směru vlnového vektoru \mathbf{k}_0 (jednotkového vektoru $\mathbf{n}_0 = \mathbf{k}_0/k_0$). Rovinu \mathbf{k}_0 , \mathbf{n} zvolíme za rovinu (z, y). Zvolíme-li \mathbf{k}_0 ve směru osy z , pak vektor \mathbf{E} leží v rovině (x, y) a s osou y svírá úhel φ . Úhel rozptylu (úhel mezi \mathbf{n} a \mathbf{k}_0) označíme ϑ , takže $\cos \Theta$ je projekce \mathbf{n} na \mathbf{E} , tj.

$$\cos \Theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_0, \quad \text{XI(8.9)}$$

kde \mathbf{e}_0 je jednotkový vektor polarizace dopadající vlny. Tuto projekci vyjádříme také tak, že promítneme \mathbf{n} na osu y a vzniklou projekci na vektor \mathbf{E} , resp. \mathbf{e} , což vede ke vztahu

$$\cos \Theta = \sin \vartheta \cos \varphi. \quad \text{XI(8.10)}$$

Odtud určíme $\sin^2 \Theta = 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi$. Pro nepolarizovanou vlnu je nutno dosadit $\langle \cos^2 \varphi \rangle = 1/2$, tj. vystředovat přes všechny orientace vektoru \mathbf{E} v rovině kolmé ke \mathbf{k}_0 . Je tedy

$$\langle \sin^2 \Theta \rangle = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \vartheta), \quad \text{XI(8.11)}$$

resp.

$$\langle \cos^2 \Theta \rangle = \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta. \quad \text{XI(8.11')}$$

Thomsonův vzorec pro rozptyl nepolarizované vlny pak je

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 (1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega. \quad \text{XI(8.12)}$$

Účinný průřez je maximální při rozptylových úhlech $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$.

Středování přes polarizace provedeme také podle metody vysvětlené v dodatku VIII. Ze vzorce XI(8.9) vyjádříme

$$\langle \cos^2 \Theta \rangle = \langle (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_0)^2 \rangle = n_i n_j \langle e_{0i} e_{0j} \rangle. \quad \text{XI(8.13)}$$

Směr \mathbf{n} je dán a středování se vztahuje pouze na orientaci vektoru \mathbf{e}_0 . Veličina $e_{0i} e_{0j}$ je symetrický tenzor druhého řádu, proto položíme

$$\langle e_{0i} e_{0j} \rangle = a \delta_{ij} + \kappa_{0i} \kappa_{0j} b, \quad \text{XI(8.14)}$$

kde κ_0 je jednotkový vektor ve směru šíření dopadající vlny. Tento směr je dán a nestředuje se přes něj. Po vynásobení XI(8.14) κ_{0i} vznikne $\kappa_{0i} e_{0i} = \kappa_0 \mathbf{e}_0 = 0$ (transverzálnost vlny), proto je $b = -a$, tj.

$$\langle e_{0i} e_{0j} \rangle = a(\delta_{ij} - \kappa_{0i} \kappa_{0j}).$$

Hodnotu koeficientu a najdeme tak, že položíme $j = i$ (a sečteme přes i), což dá

$$\langle e_{0i} e_{0i} \rangle = \langle e_0^2 \rangle = 1 = a(\delta_{ii} - \kappa_{0i} \kappa_{0i}).$$

Uvážíme-li, že $\delta_{ii} \equiv \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$, $\kappa_{0i} \kappa_{0i} = \kappa_0^2 = 1$, je $2a = 1$, a tudíž

$$\langle e_{0i} e_{0j} \rangle = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - \kappa_{0i} \kappa_{0j}), \quad \text{XI(8.15)}$$

což po dosazení do XI(8.13) vede k XI(8.11).

Thomsonův vzorec XI(8.16), popř. XI(8.12) popisuje rozptyl elektromagnetické vlny na náboji, jenž byl původně v klidu (nepohybujícím se náboji). Provedeme zobecnění těchto výsledků na případ, kdy náboj (elektron) koná vlastní periodické oscilace s frekvencí ω_0 . Pohybová rovnice náboje

$$m(\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r}) = e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{XI(8.16)}$$

má řešení

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t + \alpha). \quad \text{XI(8.17)}$$

Odtud určíme $\dot{\mathbf{p}} = e\dot{\mathbf{r}}$. Místo XI(8.6) budeme mít

$$d\sigma = r_0^2 \left[1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^{-2} \sin^2 \Theta d\Omega. \quad \text{XI(8.18)}$$

Diferenciální účinný průřez $d\sigma$ i celkový účinný průřez

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} \quad \text{XI(8.19)}$$

jsou nyní — na rozdíl od rozptylu na volném náboji — frekvenčně závislé.

Neohraničený růst σ při $\omega \rightarrow \omega_0$ se odstraní zahrnutím tlumení oscilátorů. Zpravidla se předpokládá, že síla tlumení je přímo úměrná $\dot{\mathbf{r}}$. Z pohybové rovnice

$$m(\ddot{\mathbf{r}} + \Gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r}) = e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{XI(8.20)}$$

a jejího řešení

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}_0 \cos(\omega t + \alpha)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega)}$$

najdeme $\dot{\mathbf{p}} = e\dot{\mathbf{r}}$ a pak dospějeme k účinnému průřezu (lord RAYLEIGH, 1898)

$$\sigma = \frac{8}{3} \pi r_0^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}. \quad \text{XI(8.21)}$$

Při $\omega \ll \omega_0$ je účinný průřez úměrný ω^4

$$\sigma \cong \frac{8}{3} \pi r_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4.$$

Z tohoto Rayleighova vztahu plyne, že krátké vlny jsou rozptylovány mnohem intenzivněji než vlny dlouhé.

V blízkosti rezonance lze položit $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \cong (\omega_0 + \omega_0)(\omega_0 - \omega)$, což po dosazení do XI(8.21) dá standardní tvar Lorentzovy závislosti

$$\sigma = \frac{2}{3} \pi r_0^2 \frac{\omega_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad \text{XI(8.22)}$$

XI.9 Rozptyl na atomech

Budeme se zabývat rozptylem rovinných elektromagnetických vln soustavou vázaných nábojů; s ohledem na aplikace budeme mluvit o atomech. Jelikož soustava nábojů koná *finitní* pohyb, existuje alespoň jedna frekvence ω_0 charakterizující pohyb nábojů. K řešení úlohy rozptylu záření je v obecném případě nutno znát řešení pohybových rovnic nábojů dané soustavy.

Úloha se podstatně zjednoduší ve dvou limitních případech, a sice $\omega \gg \omega_0$ a $\omega \ll \omega_0$, kde ω je frekvence dopadající vlny.

Zde se budeme zabývat případem $\omega \gg \omega_0$, s nímž se setkáváme při rozptylu rentgenova záření na atomech.

Radiační část vektorového potenciálu vypočteme z rovnice XI(2.4), v níž položíme

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}', t') = \sum_A e_A \mathbf{v}_A(t') \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_A).$$

Výsledkem je rovnice

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sum e_A \mathbf{v}_A(t'_A), \quad \text{XI(9.1)}$$

kde

$$t'_A = t - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|$$

je retardační čas A -tého náboje. Jelikož se zajímáme o pole na velikých vzdálenostech $r \gg r_A$ od nábojů, lze položit

$$t'_A = \tau + \frac{1}{c} (nr_A),$$

kde $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\tau = t - r/c$.

Poněvadž $\omega \gg \omega_0$, pak perioda $2\pi/\omega_0$ pohybu nábojů je velká ve srovnání s periodou kmitů dopadajícího (primárního) záření. Pro časové intervaly $t \ll 2\pi/\omega_0$ lze zanedbat interakci mezi náboji, takže pohybová rovnice každého náboje v poli dopadající vlny bude

$$m_A \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = e_A \mathbf{E}_0 \exp [i(\mathbf{k}_0 r_A - \omega t)],$$

kde $\mathbf{k}_0 = (\omega/c) \boldsymbol{\kappa}_0$ je vlnový vektor dopadající vlny. Při integraci lze pomalu se měnící faktor $\mathbf{k}_0 r_A$ pokládat za konstantní, což vede k rychlosti

$$\mathbf{v}_A = \frac{i e_A \mathbf{E}_0}{\omega m_A} \exp [i(\mathbf{k}_0 r_A - \omega t)]. \quad \text{XI(9.2)}$$

Vzhledem k tomu, že hmotnost M kladně nabitých částic atomu je značně větší než hmotnost elektronů m , stačí uvažovat pohyb elektronů. V takovém případě je

$$\frac{e_A}{m_A} = \frac{e}{m} = \text{konst.}$$

V rovnici XI(9.2) zaměníme $t \rightarrow t'_A = \tau + (nr_A)/c$, čímž získáme vyjádření rychlosti (v komplexní symbolice)

$$\mathbf{v}_A(t'_A) = \frac{i e \mathbf{E}_0}{m \omega} e^{-i\omega\tau - i\mathbf{q}r_A} \quad \text{XI(9.3)}$$

kde

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}_0 = \frac{\omega}{c} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\kappa}_0) \quad \text{XI(9.4)}$$

je změna vlnového vektoru při rozptylu. Absolutní hodnota $q = |\mathbf{q}|$ je

$$q = \frac{2\omega}{c} \sin \frac{\vartheta}{2} = \frac{4\pi}{\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad \text{XI(9.5)}$$

kde ϑ je úhel mezi $\boldsymbol{\kappa}_0$ a \mathbf{n} (úhel rozptylu). Vztah XI(9.5) se získá povýšením XI(9.4) na druhou a dosazením

$$n^2 = \boldsymbol{\kappa}_0^2 = 1, \quad 1 - n\boldsymbol{\kappa}_0 = 1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Po dosazení XI(9.3) do XI(9.1) získáme vektorový potenciál

$$\mathfrak{A} = \frac{i r_0 \mathbf{E}_0}{\omega r} e^{-i\omega r} \sum_A \exp(-i\mathbf{q}r_A), \quad \text{XI(9.6)}$$

pak pomocí vztahů XI(3.7) radiační pole \mathfrak{B} a z něj vypočteme vztahem XI(3.9) Poyntingův vektor. Z vyšetřované intenzity rozptýleného záření

$$d\langle I \rangle = \langle S \rangle r^2 d\Omega$$

a toku dopadajícího záření XI(8.5) získáme diferenciální účinný průřez

$$d\sigma = r_0^2 |F(\mathbf{q})|^2 \sin^2 \Theta d\Omega. \quad \text{XI(9.7)}$$

Veličina

$$F(\mathbf{q}) = \sum_A \exp(-i\mathbf{q}r_A) \quad \text{XI(9.8)}$$

závisí na rozložení nábojů v atomu, a nazývá se proto *tvarovým faktorem* (formfaktorem). Zde je již provedeno časové středování, tj. středování přes pohyb nábojů v atomu. Toto středování se provádí proto, že rozptyl se pozoruje v časových intervalech převyšujících periody pohybu nábojů v atomu.

Souvislost $F(\mathbf{q})$ s rozdělením náboje v elektronovém oblaku atomu lze zabudovat přímo do definičního vztahu XI(9.8). Je-li $\rho(\mathbf{r})$ (časově vystředovaná) hustota elektronového oblaku, pak $(\rho/e) dV \equiv (\rho/e) d^3r$ je počet částic v objemovém elementu dV . Sumáci v XI(9.8) nahradíme integrací, což vede ke vztahu

$$eF(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q}r) d^3r. \quad \text{XI(9.9)}$$

Vzpomeneme-li si na definici Fourierova integrálu (viz dodatek IV)

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \rho_{\mathbf{q}} \exp(+i\mathbf{q}r) \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3},$$

$$\rho_{\mathbf{q}} = \int \rho(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q}r) d^3r,$$

vidíme, že $F(\mathbf{q})$ je až na numerický faktor (náboj e jedné částice, elementární náboj) rovno Fourierově komponentě hustoty elektrického náboje

$$eF(\mathbf{q}) = \tilde{\rho}(\mathbf{q}) \equiv \rho_{\mathbf{q}}, \quad \text{XI(9.10)}$$

popř.

$$F(\mathbf{q}) = \tilde{n}(\mathbf{q}) \equiv n_{\mathbf{q}}, \quad \text{XI(9.10')}$$

kde $n = \rho/e$ je objemová hustota částic.

Pro některé úvahy je výhodné přepsat $|F(\mathbf{q})|^2$ ve tvaru

$$|F(\mathbf{q})|^2 = \sum_{A,B} \exp[-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)], \quad \text{XI(9.11)}$$

což po úpravě dá

$$|F(\mathbf{q})|^2 = Z + 2 \sum_{A < B} \cos(\mathbf{q}\mathbf{r}_{AB}). \quad \text{XI(9.12)}$$

Zde Z je počet elektronů. Tento člen se objeví tak, že v XI(9.11) separujeme členy $B = A$.

Přejdeme k dvěma limitním případům získaných vzorců. Nechť a je lineární rozměr oblasti, v níž $\rho \neq 0$, tj. a je řádově rozměr atomu. V takovém případě k integrálu v XI(9.9) přispěje pouze oblast $0 \leq r \leq a$. Je-li $qa \ll 1$, tj.

$$a \ll \lambda, \quad \text{XI(9.13)}$$

pak v XI(9.9) se objeví $\int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$, což je celkový náboj atomu

$$eF(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = Ze, \quad (a \ll \lambda). \quad \text{XI(9.14)}$$

Po dosazení do XI(9.7) máme

$$d\sigma = (Zr_0)^2 \sin^2 \Theta d\Omega, \quad \text{XI(9.15)}$$

popř. pro nepolarizovanou dopadající vlnu

$$d\sigma = \frac{1}{2} (Zr_0)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega. \quad \text{XI(9.16)}$$

V opačném limitním případě $qa \gg 1$, tj.

$$\lambda \ll a, \quad \text{XI(9.17)}$$

je výhodné užít vyjádření XI(9.12). Faktory $\cos(\mathbf{q}\mathbf{r}_{AB}) \equiv \cos(qa)$ rychle oscilují, takže jejich střední hodnota bude blízká nule. V takovém případě bude

$$|F(\mathbf{q})|^2 = Z, \quad (\lambda \ll a). \quad \text{XI(9.18)}$$

Odpovídající vzorce pro účinný průřez $d\sigma$ budou

$$d\sigma = Zr_0^2 \sin^2 \Theta d\Omega, \quad \text{XI(9.19)}$$

$$d\sigma = \frac{1}{2} Zr_0^2 (1 + \cos^2 \vartheta) d\Omega. \quad \text{XI(9.20)}$$

Je-li hustota $\rho(\mathbf{r})$ elektrického náboje ve zkoumaném objektu známa, lze určit tvarový faktor $F(\mathbf{q})$, a tím i diferenciální účinný průřez (úhlové rozdělení) rozptylu záření. V praxi je často úloha obrácená: experimentálně se pozoruje (měří) úhlové

rozdělení rozptýleného záření, odkud lze určit tvarový faktor $F(\mathbf{q})$. Je-li tato závislost $F \equiv F(\mathbf{q})$ známá, pak hustotu náboje $\rho(\mathbf{r})$ určíme z rovnice

$$\rho(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} e \int F(\mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) d^3\mathbf{q}. \quad \text{XI(9.21)}$$

V tom je hlavní praktická cena získaných teoretických vzorců, jež slouží k určení hustoty náboje různých objektů. Nábojová hustota se obvykle charakterizuje středním kvadratickým poloměrem

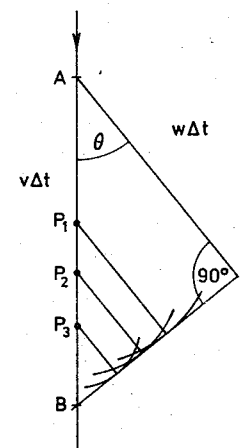
$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{e} \int \rho(\mathbf{r}) r^2 d^3\mathbf{r} = \frac{\int r^2 \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}{\int \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}. \quad \text{XI(9.22)}$$

XI.10 Čerenkovovo záření

V roce 1934 zjistil P. A. ČERENKOV, že při bombardování kapalin zářením γ vzniká viditelné světlo, které je naprosto odlišné od luminiscence a brzdného záření, např. silnou anizotropií. Brzy se ukázalo, že příčinou tohoto záření jsou Comptonovy elektrony vznikající v absorbujícím prostředí působením kvant γ . Stejně záření totiž vzniká, i když místo zářičů γ použijeme přímo zářičů β .

První teorii Čerenkovova jevu podali I. E. TAMM a I. M. FRANK (1937), kteří ukázali, že se jedná o záření nadsvětelného elektronu, tj. záření elektronu, jehož rychlost v je větší než fázová rychlost $w = c/N$ elektromagnetických vln v daném prostředí.

Elektron za čas Δt urazí v dielektrickém prostředí vzdálenost $v\Delta t$. Pole elektronu budeme pokládat za superpozici sférických vln (retardovaných potenciálů). Tyto vlny se šíří rychlostí $w = c/N$. Z obr. XI.6. plyne vztah



Obr. XI.6.

tj.

$$w \Delta t = v \Delta t \cos \vartheta,$$

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\beta N} = \frac{w}{v}, \quad \text{XI(10.1)}$$

kde ϑ je úhel mezi rychlostí částice a směrem šíření záření. Zde i v dalším budeme symbolem β označovat podíl rychlosti částice k rychlosti světla ve vakuu

$$\beta \equiv \frac{v}{c}.$$

V tomto článku budeme předpokládat konstantní rychlost $v = \text{konst}$, poněvadž z výsledku plyne, že ztráty energie jsou velmi malé.

Jelikož $|\cos \vartheta| \leq 1$ při $v = \text{konst}$, může být záření emitováno pouze tehdy, když rychlost nabitě částice je větší než (fázová) rychlost elektromagnetických vln v daném prostředí. Elektron tak předbíhá pole, které sám vytvořil, odtrhuje se od něj. Je to tedy elektromagnetická analogie rázové hydrodynamické vlny, kdy např. letadlo předbíhá zvukovou vlnu jím vytvořenou.

Rovnice XI(10.1) vysvětluje pozorovanou silnou anizotropii záření: záření je emitováno pouze ve směru povrchu kužele (Čerenkovova kužele) o úhlu $\vartheta = \arccos(w/v)$. Uvážíme-li disperzi indexu lomu $N \equiv N(\omega)$, lze podmínku vzniku Čerenkovova záření vyjádřit nerovností

$$\beta N(\omega) \geq 1. \quad \text{XI(10.2)}$$

Na rovnici XI(10.1) jsou založeny čerenkovské detektory částic. Prolétá-li rychlá nabitá částice prostředím s indexem lomu N , emituje Čerenkovovo záření ve směru ϑ . (Toto záření se zpravidla detekuje soustavou fotonásobičů.) Z pozorovaného úhlu emise ϑ lze určit rychlost nabitě částice.

K podobnému záření dochází i při průchodu elektrických a magnetických multipólů látkovým prostředím, avšak vzniklé záření je mnohem slabší, než je tomu u elektrických nábojů, proto se omezíme na teorii Čerenkovova záření vznikajícího při pohybu nadsvětelné nabitě částice v látkovém prostředí.

Budeme vyšetřovat pole náboje pohybujícího se rovnoměrně přímočaře v izotropním látkovém prostředí. Přechodové jevy vznikající při vstupu náboje z vakua do prostředí nebudeme uvažovat.

Pole budeme počítat z rovnic pro skalární (Φ) a vektorový (\mathbf{A}) potenciál

$$\left(\nabla^2 - \frac{N^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \text{XI(10.3)}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{N^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{A} = -\mu \mathbf{j}. \quad \text{XI(10.4)}$$

Ze svých úvah vyloučíme feromagnetika, proto lze položit $\mu \equiv \mu_0$. Index lomu N pak souvisí s relativní permitivitou $\epsilon^{(r)}$ vztahem

$$N^2 = \epsilon^{(r)}. \quad \text{XI(10.5)}$$

Předpokládejme, že nabitá částice se pohybuje podél osy z . V takovém případě je

$$\rho = e \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt), \quad \text{XI(10.6)}$$

$$j_x = j_y = 0, \quad j_z = ev \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt), \quad \text{XI(10.7)}$$

a tudíž

$$\left(\nabla^2 - \frac{N^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi = -\frac{e}{N^2 \epsilon_0} \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt),$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{N^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A_z = -\mu_0 ev \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt). \quad \text{XI(10.8)}$$

Zde jsme s ohledem na XI(10.7) položili

$$A_x = A_y = 0,$$

takže Lorentzova podmínka $\text{div} \mathbf{A} + \epsilon \mu (\partial \Phi / \partial t) = 0$ bude

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{N^2}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0. \quad \text{XI(10.9)}$$

Z rovnic XI(10.8) a XI(10.9) je vidět, že

$$A_z = \frac{N^2}{c^2} v \Phi, \quad \text{XI(10.10)}$$

takže stačí řešit pouze rovnici XI(10.8) pro skalární potenciál, který pak vyhovuje kalibrační podmínce

$$v \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad \text{XI(10.11)}$$

z níž se dá usoudit, že $\Phi = f(x, y)g(z - vt)$.

Z rovnic $\mathbf{E} = -\nabla \Phi - (\partial \mathbf{A} / \partial t)$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \text{rot} \mathbf{A}$ získáme pole

$$E_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad E_z = \alpha^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

$$H_x = \epsilon_0 N^2 v \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad H_y = -\epsilon_0 N^2 v \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad H_z = 0, \quad \text{XI(10.12)}$$

kde

$$\alpha^2 \equiv \beta^2 N^2 - 1 \equiv \text{tg}^2 \vartheta. \quad \text{XI(10.13)}$$

Při úpravě $E_z = -(\partial \Phi / \partial z) - (\partial A_z / \partial t)$ jsme užili vztahů XI(10.11) a XI(10.12).

Tím máme všechny potřebné veličiny vyjádřeny pomocí skalárního potenciálu Φ , proto přejdeme k řešení rovnice XI(10.8).

Směr pohybu částice (osu z) lze zvolit za osu válce, a je tak výhodné použít cylindrických souřadnic r, φ, z . Místo XI(10.10) bude

$$A_r = A_\varphi = 0, \quad \text{XI(10.14)}$$

přičemž vztah XI(10.12) zůstane zachován. Pomocí vztahu $\delta(ax) = |a|^{-1} \delta(x)$ upravíme

$$\delta(z - vt) = \frac{1}{v} \delta\left(t - \frac{z}{v}\right) = \frac{1}{2\pi v} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] d\omega. \quad \text{XI(10.15)}$$

Jelikož pole nezávisí na úhlu φ , lze v rovnici XI(10.8) provést záměnu

$$\nabla^2 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Pro potenciál Φ jsme tak získali rovnici

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{N^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Phi = -\frac{e}{\pi \epsilon_0 v N^2 r} \delta(r) \delta\left(t - \frac{z}{v}\right). \quad \text{XI(10.16)}$$

Obdobně se upraví XI(10.8), což s ohledem na XI(10.10) nebudeme provádět.

Z rovnice XI(10.16) se dá usoudit, že proměnné z a t se budou v řešení $\Phi(r, z, t)$ vyskytovat pouze v kombinaci $z - vt$, resp. $t - z/v$, proto je výhodné vyjádřit Φ ve tvaru Fourierova integrálu¹¹⁾

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(r) \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{z}{v}\right)\right] d\omega, \quad \text{XI(10.17)}$$

kde $u(r) \equiv \Phi_\omega(r)$ je příslušná Fourierova komponenta. Obdobně pro Diracovu distribuci $\delta(t - z/v)$ uijeme vyjádření XI(10.15). Po dosazení XI(10.17) do XI(10.16) získáme pro $u(r)$ rovnici

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + k^2 u = -\frac{e}{\pi \epsilon_0 v N^2 r} \delta(r), \quad \text{XI(10.18)}$$

kde

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{v^2} (\beta^2 N^2 - 1) = \frac{\omega^2}{v^2} \operatorname{tg}^2 \theta. \quad \text{XI(10.18')}$$

Funkce $u(r)$ vyhovuje všude s výjimkou bodu $r = 0$ rovnici

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + k^2 u = 0, \quad (r \neq 0), \quad \text{XI(10.19)}$$

takže místo XI(10.18) stačí řešit homogenní rovnici XI(10.19) a chování v bodě $r = 0$ nahradit odpovídající hraniční podmínkou. Tuto podmínku najdeme tak, že rovnici XI(10.17) vynásobíme r , prointegrujeme v mezích $0 \leq r \leq r_0$ a pak přejdeme k limitě $r_0 \rightarrow 0$. Výsledkem je hraniční podmínka

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[r \frac{du}{dr} \right] = -\frac{e}{2\pi \epsilon_0 v N^2}. \quad \text{XI(10.20)}$$

Problém je tak převeden na řešení rovnice XI(10.19). Jedná se o Besselovu rovnici pro cylindrické funkce $Z_0(kr)$. Lineární kombinaci cylindrických funkcí nutno zvolit tak, aby (při $kr \gg 1$) řešením rovnice XI(10.16) byla rozbíhavá cylindrická vlna $\Phi \sim \exp[i(kr - \omega t)]$. Tomu vyhovují Hankelovy funkce $H_0^{(1)}$ (viz dodatek VI), proto položíme

$$u(r) = a H_0^{(1)}(kr).$$

Jelikož při $|\zeta| \ll 1$ je

$$H_0^{(1)}(\zeta) \cong 1 + \frac{2i}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma \zeta}{2}\right),$$

je $(r du/dr) = 2ia/\pi$, což se spojením s XI(10.20) dá

$$u(r) = \frac{ie}{4\epsilon_0 v N^2} H_0^{(1)}(kr). \quad \text{XI(10.21)}$$

Z asymptotického vztahu ($|\zeta| \gg 1$)

$$H_0^{(1)}(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi \zeta}\right)^{1/2} e^{i(\zeta - \pi/4)}$$

získáme asymptotický tvar (pro $kr \equiv \zeta \gg 1$) radiální funkce

$$u(r) \cong \frac{ie}{4\epsilon_0 v N^2} \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} e^{i(kr - \pi/4)}. \quad \text{XI(10.22)}$$

K této závislosti lze snadno dospět i bez znalosti Besselových funkcí, a to takto: Kdyby v rovnici XI(10.19) nebylo členu $r^{-1} (du/dr)$, rovnici by vyhovovalo řešení $\exp(ikr)$, proto budeme hledat asymptotické řešení rovnice XI(10.19) ve tvaru $u(r) = f(r) \exp(ikr)$. Snadným výpočtem dospějeme k závěru, že tomu vyhovuje klesající funkce $f(r) = \text{konst} \cdot (kr)^{-1/2}$, což vede k závislosti XI(10.22). Multiplikační konstantu lze určit např. z požadavku, aby ve statickém případě měl potenciál chování typu $e/(4\pi \epsilon_0 r)$.

¹¹⁾ Tím také automaticky splníme Lorentzovu kalibrační podmínku XI(10.11).

Po dosazení XI(10.22) do XI(10.17) dostaneme potenciál Φ ve vlnové zóně

$$\Phi = \frac{ie}{8\pi\epsilon_0 v} \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} N^{-2} k^{-1/2} \exp \left\{ i \left[kr - \frac{\pi}{4} - \omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \right\} d\omega.$$

Faktor $kr + \omega z/v$ vyskytující se v exponentě upravíme pomocí XI(10.18) a XI(10.1)

$$kr + \frac{\omega z}{v} = \frac{N\omega}{c} (r \sin \vartheta + z \cos \vartheta).$$

Zavedeme-li označení

$$\chi \equiv \omega \left[\frac{N}{c} (r \sin \vartheta + z \cos \vartheta - t) \right] - \frac{\pi}{4},$$

pak potenciál Φ vyjde ve tvaru

$$\Phi = \frac{ie}{8\pi\epsilon_0 v} \left(\frac{2}{\pi r}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} N^{-2} k^{-1/2} e^{i\chi} d\omega. \quad \text{XI(10.23)}$$

Další výpočet je již rutinní, avšak poměrně zdlouhavý, proto jej zde nebudeme podrobně provádět. Vypočteme Poyntingův vektor

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$$

a pomocí něj úbytek energie za jednotku času

$$-\frac{dU}{dt} = \int S_n ds.$$

Plošku ds zvolíme ve tvaru malého válečku $2\pi r dz$. Výsledkem příslušných výpočtů je vzorec (I. E. TAMM, I. M. FRANK, 1937)

$$\frac{dU}{dt} = \frac{e^2 v}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 N^2} \right) d\omega, \quad \text{XI(10.24)}$$

v němž se integrace provádí přes oblast frekvencí ω , při níž je

$$\beta N(\omega) \geq 1.$$

Vzorec XI(10.24) převedeme na ztráty na jednotkové dráze pomocí vztahu

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dU}{dz} \frac{dz}{dt} = v \frac{dU}{dz}.$$

Rovnice

$$-\frac{dU}{dz} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \omega \left(1 - \frac{1}{\beta^2 N^2} \right) d\omega \quad \text{XI(10.25)}$$

udává energetické ztráty čerenkovským zářením na jednotkové dráze. Pro infor-

maci uvedeme, že pro částici s energií řádově 1 MeV jsou čerenkovské ztráty řádově keV/cm. Další informace najde čtenář ve speciální monografické literatuře¹²⁾.

XI.11 Absorpce záření oscilátorem

Při dopadu elektromagnetického záření na nějaký objekt dochází nejen k rozptylu, ale také k absorpci záření. Rozptylem na volném i vázaném náboji jsme se zabývali v článku XI.9, nyní budeme zkoumat množství energie, které elektromagnetická vlna předá vázanému náboji.

Síla $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ působící na náboj vykoná za jednotku času práci $\mathbf{Fv} = e\mathbf{vE}$. Energie ΔU absorbovaná nábojem je pak dána vztahem ($\mathbf{E} \neq 0$ pouze v konečném intervalu)

$$\Delta U = \int_{-\infty}^{+\infty} e\mathbf{v}(t)\mathbf{E}(t) dt. \quad \text{XI(11.1)}$$

V této formě platí vzorec obecně. Nyní budeme předpokládat, že se jedná o „elasticky vázaný“ elektron. Při započtení tlumení máme pohybovou rovnici

$$m(\ddot{\mathbf{r}} + \Gamma\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r}) = e\mathbf{E}(t). \quad \text{XI(11.2)}$$

Polohový vektor $\mathbf{r}(t)$ a pole $\mathbf{E}(t)$ rozložíme ve Fourierovy integrály

$$\mathbf{r}(t) = (2\pi)^{-1} \int \mathbf{r}_\omega e^{-i\omega t} d\omega, \quad \text{XI(11.3)}$$

$$\mathbf{E}(t) = (2\pi)^{-1} \int \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t} d\omega. \quad \text{XI(11.4)}$$

Po dosazení těchto vztahů do XII(11.2) dostaneme

$$\mathbf{r}_\omega = \frac{e\mathbf{E}_\omega}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}. \quad \text{XI(11.5)}$$

Pro rychlost

$$\mathbf{v}(t) \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (2\pi)^{-1} \int \mathbf{v}_\omega e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{XI(11.6)}$$

získáme obdobně

$$\mathbf{v}_\omega = -\frac{ie\mathbf{E}_\omega}{m} \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma\omega}. \quad \text{XI(11.7)}$$

Reálnost veličin $\mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{E}(t)$ implikuje vztahy

$$\mathbf{r}_\omega^* = \mathbf{r}_{-\omega}, \quad \mathbf{v}_\omega^* = \mathbf{v}_{-\omega}, \quad \mathbf{E}_\omega^* = \mathbf{E}_{-\omega}. \quad \text{XI(11.8)}$$

¹²⁾ Viz např. J. V. JELLEY: Čerenkov radiation, Pergamon Press London 1958; ruský překlad Dželli Dž.: Čerenkovskoe izlučenie, I. L. Moskva 1960.

Tím máme určeny všechny potřebné veličiny k výpočtu absorbované energie XI(11.1). Výpočet provedeme pomocí vzorce, jehož platnost se snadno ověří (viz též příklad XI(10)). Jsou-li

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int f_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad g(t) = (2\pi)^{-1} \int g_{\omega} e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{XI(11.9)}$$

dvě reálné funkce, pak¹³⁾

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt = (2\pi)^{-1} \int_0^{\infty} (f_{\omega}g_{\omega}^* + f_{\omega}^*g_{\omega}) d\omega. \quad \text{XI(11.10)}$$

V daném případě $f_{\omega} = \mathbf{v}_{\omega}$, $g_{\omega} = e\mathbf{E}_{\omega}$ dostaneme

$$\Delta U = \frac{e}{2\pi} \int_0^{\infty} (\mathbf{v}_{\omega}\mathbf{E}_{\omega}^* + \mathbf{v}_{\omega}^*\mathbf{E}_{\omega}) d\omega = \frac{\Gamma e^2}{\pi m} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 |\mathbf{E}_{\omega}|^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} d\omega. \quad \text{XI(11.11)}$$

Při zadaném spektrálním rozdělení \mathbf{E}_{ω} vnějšího pole je vzorcem XI(11.11) daná úloha řešena. Pro ilustraci zde budeme předpokládat, že rezonanční vrchol (tzv. *pík*) je mnohem užší než spektrální šířka vnějšího pole. V takovém případě lze v čitateli integrandu XI(11.11) položit $\omega^2 |\mathbf{E}_{\omega}|^2 \cong \omega_0^2 |\mathbf{E}_{\omega_0}|^2$ a ve jmenovateli

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2 \cong (\omega + \omega_0)^2 (\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2 \omega^2 \cong 2\omega_0 (\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2 \omega_0^2.$$

Pomocí těchto aproximací dostaneme

$$\Delta U = \frac{\Gamma e^2}{\pi m} |\mathbf{E}_{\omega_0}|^2 \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{4(\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2} = \frac{\Gamma e^2}{4\pi m} |\mathbf{E}_{\omega_0}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^2 + (\Gamma/2)^2}.$$

Ve vzniklém integrálu lze integraci rozšířit do $-\infty$, což dá

$$\Delta U = \frac{e^2}{2m} |\mathbf{E}_{\omega_0}|^2. \quad \text{XI(11.12)}$$

V daném přiblížení nezávisí absorbovaná energie na koeficientu útlumu (šířce spektrální čáry) Γ .

Rovnici XI(11.12) lze dát poněkud jinou interpretaci. Tok energie jednotkovou plochou vyjádříme rovnicí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} c\epsilon_0 \mathbf{E}^2 dt = \frac{c\epsilon_0}{\pi} \int_0^{\infty} |\mathbf{E}_{\omega}|^2 d\omega \cong \int_0^{\infty} S_{\omega} d\omega.$$

Spektrální rozdělení S_{ω} toku energie jednotkovou plochou je tedy $S_{\omega} = \pi^{-1} c\epsilon_0 |\mathbf{E}_{\omega}|^2$, takže

$$\Delta U = 2\pi^2 cr_0 S_{\omega_0}, \quad \text{XI(11.13)}$$

kde $r_0 = e^2/(4\pi\epsilon_0 mc^2)$ je klasický poloměr elektronu.

¹³⁾ V literatuře se na pravé straně tohoto vzorce vyskytují různé numerické faktory, což souvisí s různou definicí Fourierových komponent. Viz též poznámku na konci dodatku IV.

XII.1 Úvodní poznámky

Vodivé tekutiny (elektrolyty, ionizované plyny) obsahují relativně vysokou koncentraci elektricky nabitých částic-elektronů a iontů. Při hydrodynamickém pohybu takové tekutiny dochází k přenosu elektrického náboje, a tedy ke vzniku makroskopického elektrického proudu. Pohybuje-li se vodivá tekutina ve vnějším magnetickém poli, pak se v ní indukuje elektrické pole. Na nabitě částice (elektrický proud) v magnetickém poli působí (magnetická) Lorentzova síla, která může dosti podstatně ovlivnit pohyb částic (proudění tekutiny). Tento změněný pohyb se projeví ve změně makroskopického elektrického proudu, a tím nakonec i ve změně samotného magnetického pole. Už z této kvalitativní úvahy je zřejmé, že dochází ke vzájemné vazbě hydrodynamických a elektromagnetických jevů.

Kvantitativní zkoumání těchto jevů bude (v makroskopické teorii) založeno na vzájemně svázané (simultánní) soustavě rovnic hydrodynamiky (doplněné o magnetickou sílu) a Maxwellových rovnic pro pohybující se (vodivé) prostředí. Odtud také plyne název *magnetohydrodynamika* — zkráceně MHD. Vyskytují se i jiné podobné názvy, avšak termín magnetohydrodynamika je převládajícím, proto jej zde budeme používat.

Výsledky a metody magnetohydrodynamiky mají široké spektrum aplikací ve vědecké a technické praxi: od teorie čerpadel tekutých kovů přes teorii elektrických výbojů a šíření elektromagnetických vln v ionosféře až po popis astrofyzikálních jevů. Od poloviny padesátých let našeho století k tomu přistupují prakticky nejvýznamnější aplikace, jež jsou spojeny s MHD generátory a s pokusy o ovládnutí řízené termonukleární syntézy.

Pro snažší uvedení do dané problematiky a pochopení struktury rovnic magnetohydrodynamiky začneme výklad přehledem potřebných hydrodynamických vztahů.

XII.2 Přehled základních rovnic hydrodynamiky

Tekutinu budeme charakterizovat jako spojité prostředí (kontinuum) s místně i časově proměnnou hustotou¹⁴⁾ (hmotností objemové jednotky)

$$\rho \equiv \rho(\mathbf{r}, t)$$

a místně i časově proměnným polem rychlostí

$$\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Vektor proudové hustoty $\rho\mathbf{v}$ je s hustotou ρ svázán zákonem zachování hmotnosti — rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\rho + \rho \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \quad \text{XII(2.1)}$$

Operace

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) \quad \text{XII(2.2)}$$

se někdy nazývá substanciální derivací, pomocí níž upravíme rovnici kontinuity

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \quad \text{XII(2.3)}$$

Pro neztlačitelnou tekutinu $\rho = \text{konst}$ je

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \quad \text{XII(2.4)}$$

Pro ideální tekutinu, na niž působí pouze tlak P , zapíšeme pohybový zákon

$$\int \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = - \oint P d\mathbf{s} = - \int \nabla P dV,$$

odkud plynou Eulerovy rovnice pro ideální tekutinu

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = - \frac{\nabla P}{\rho}. \quad \text{XII(2.5)}$$

Tyto Eulerovy rovnice spolu s rovnicí kontinuity představují čtyři rovnice pro pět veličin ρ , v_x , v_y , v_z a tlak P . Soustavu rovnic hydrodynamiky je nutno doplnit termodynamickou stavovou rovnicí

$$P \equiv P(\rho), \quad \text{XII(2.6)}$$

¹⁴⁾ Hustotu tekutiny zde budeme značit obvyklým symbolem ρ , jímž ve zbývajících kapitolách označujeme hustotu elektrického náboje. V rovnicích této kapitoly se hustota elektrického náboje nevyskytuje, proto nemůže dojít k záměně.

popř. jinou ekvivalentní termodynamickou rovnicí. Pro účely dalších referencí upravíme tuto podmínku ideálnosti tekutiny.

Označíme-li \mathcal{U} , \mathcal{S} , \mathcal{T} vnitřní energii, entropii a absolutní teplotu tekutiny, pak podle známé termodynamické rovnice je

$$d\mathcal{U} = \mathcal{T} d\mathcal{S} - P dV.$$

Objem V tekutiny vyjádříme pomocí hmotnosti M a hustoty $V = M/\rho$. Zavedeme měrnou vnitřní energii $u = \mathcal{U}/M$ a měrnou entropii $s = \mathcal{S}/M$ (energie a entropii jednoho kilogramu), pak je

$$du = \mathcal{T} ds + \frac{P}{\rho^2} d\rho. \quad \text{XII(2.7)}$$

Zpravidla se zavádí měrná entalpie

$$h = u + \frac{P}{\rho}, \quad \text{XII(2.8)}$$

pro niž pak platí

$$dh = \mathcal{T} ds + \frac{1}{\rho} dP. \quad \text{XII(2.9)}$$

Při adiabatickém ději je

$$\frac{d}{dt} \int s dV = 0,$$

a tudíž

$$\frac{ds}{dt} \equiv \frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)s = 0. \quad \text{XII(2.10)}$$

Poslední rovnici lze pomocí XII(2.1) převést na rovnici kontinuity pro entropii

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho s) + \operatorname{div}(\rho s \mathbf{v}) = 0. \quad \text{XII(2.11)}$$

Veličina ρs je entropií objemové jednotky a $\rho s \mathbf{v}$ je vektor proudové hustoty entropie. Je-li v čase $t = t_0$ ve všech bodech $s = \text{konst}$, pak je s konstantní vždycky, tj.

$$ds = 0, \quad s = \text{konst}. \quad \text{XII(2.12)}$$

Jelikož $s \equiv s(P, \rho)$, plyne odtud rovnice adiabaty $P \equiv P(\rho)$.

Položíme-li v XII(2.9) $ds = 0$, pak je

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = \nabla h, \quad \text{XII(2.13)}$$

a tudíž Eulerovy rovnice budou mít tvar

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla h = 0. \quad \text{XII(2.14)}$$

K vnitřní energii ρu jednotkového objemu nutno přidat kinetickou energii $\frac{1}{2}\rho v^2$ objemové jednotky. Z hydrodynamiky je znám (viz též příklad 1 k této kapitole) vztah

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u + \frac{1}{2}\rho v^2) + \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad \text{XII(2.15)}$$

kde vektor \mathbf{J} proudové hustoty energie je

$$\mathbf{J} = (\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho h)\mathbf{v}. \quad \text{XII(2.16)}$$

Eulerovým rovnicím lze dát tvar rovnice kontinuity pro hybnost. Veličina $\rho \mathbf{v}$ představuje hybnost objemové jednotky. Vypočteme derivaci

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) = \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t}.$$

Z rovnice XII(2.5) dosadíme

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial P}{\partial x_i}$$

a $\partial \rho / \partial t$ vyjádříme pomocí rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j).$$

Po snadné úpravě pak dospějeme k rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij}^{(0)} = 0, \quad \text{XII(2.17)}$$

kde

$$\tau_{ij}^{(0)} = P \delta_{ij} + \rho v_i v_j$$

je tenzor napětí v ideální tekutině. První člen $P \delta_{ij}$ určuje tok hybnosti vlivem tlakové síly, druhý je konvekční přenos hybnosti.

V neideální tekutině dochází k vnitřnímu tření, a tedy i k toku hybnosti, vlivem gradientu rychlosti $\partial v_i / \partial x_j$. Z derivací $\partial v_i / \partial x_j$ lze sestavit symetrický tenzor druhého řádu

$$\tau'_{ij} = a \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + b \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij}.$$

Místo a, b se zavádějí koeficienty viskozity η, ζ , pomocí nichž vyjádříme tenzor τ'_{ij} viskozních napětí

$$\tau'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k}. \quad \text{XII(2.18)}$$

Tenzor τ_{ij} neideální tekutiny bude

$$\tau_{ij} = P \delta_{ij} + \rho v_i v_j - \tau'_{ij}. \quad \text{XII(2.19)}$$

Pohybovou rovnicí tekutiny

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{XII(2.20)}$$

snadno převedeme na standardní tvar Naviérových—Stokesových rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \left(\lambda + \frac{\nu}{3} \right) \nabla \text{div } \mathbf{v}, \quad \text{XII(2.21)}$$

kde

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad \lambda = \frac{\zeta}{\rho} \quad \text{XII(2.22)}$$

jsou koeficienty kinematické viskozity.

Působí-li na tekutinu kromě tlaku jiné objemové síly \mathbf{f} , pak pravou stranu rovnic XII(2.21) nutno doplnit o člen \mathbf{f}/ρ .

Vlivem viskozního tření je proudění tekutiny nevratným procesem, což se projeví na vzrůstu entropie. V hydrodynamice se dokazuje platnost rovnice (viz též příklad 3 k této kapitole)

$$\rho \mathcal{T} \frac{ds}{dt} = \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \text{div} (\kappa \nabla \mathcal{T}), \quad \text{XII(2.23)}$$

kde κ je koeficient tepelné vodivosti.

Pro účely referencí uvedeme ještě vztah pro energetickou bilanci v neideální tekutině (viz též příklad 2 k této kapitole)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u + \frac{1}{2}\rho v^2) = -\text{div } \mathbf{J} \equiv -\frac{\partial J_i}{\partial x_i}, \quad \text{XII(2.24)}$$

kde

$$J_i = (\rho h + \frac{1}{2}\rho v^2) v_i - \tau'_{ij} v_j - \kappa \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} \right). \quad \text{XII(2.25)}$$

Členy mají jednoduchou interpretaci. Dosadíme-li z XII(2.8) $\rho h = \rho u + P$, pak $\rho u \mathbf{v}$ je tok vnitřní energie a $P \mathbf{v}$ souvisí s výkonem tlakových sil. Člen $\tau'_{ij} v_j$ určuje disipaci energie vlivem sil vnitřního tření. Poslední člen $-\kappa \nabla \mathcal{T}$ je standardní výraz pro tok tepla vlivem gradientu teploty.

XII.3 Soustava rovnic magnetohydrodynamiky

V článku V jsme ukázali, že při pohybu vodiče v magnetickém poli je nutno Ohmův zákon $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ nahradit obecnějším výrazem

$$\mathbf{j} = \gamma(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]). \quad \text{XII(3.1)}$$

Veličina

$$\mathbf{E}' \equiv \mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \quad \text{XII(3.2)}$$

je elektrická intenzita v soustavě pohybující se rychlostí \mathbf{v} (viz též XIII(5.6)). Poznamenejme ještě, že vzorce XII(3.1) a XII(3.2) platí pouze při *nerelativistických* rychlostech

$$v \ll c, \quad \text{XII(3.3)}$$

což budeme nadále v této kapitole předpokládat.

Budeme uvažovat kvazistacionární pole (viz kap. V), takže Maxwellův proud $\partial \mathbf{D} / \partial t$ lze zanedbat oproti vodivostnímu proudu. Pro magnetickou intenzitu \mathbf{H} tak máme rovnici

$$\text{rot } \mathbf{H} = \gamma(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]).$$

V prostředích, jimiž se zde budeme zabývat, je relativní magnetická permeabilita velmi blízká jedné, takže lze položit $\mathbf{H} = \mathbf{B} / \mu_0$, čímž je

$$\text{rot } \mathbf{B} = \gamma \mu_0 (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]). \quad \text{XII(3.4)}$$

K tomu přistupuje

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad \text{XII(3.5)}$$

a Faradayův indukční zákon

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad \text{XII(3.6)}$$

Elektrické pole \mathbf{E} vyjádříme z rovnice XII(3.4), tj.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\gamma \mu_0} \text{rot } \mathbf{B} - [\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Po dosazení tohoto vztahu do XII(3.6) a jednoduché úpravě ($\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}$) dospějeme k rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} + \text{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad \text{XII(3.7)}$$

s níž jsme se již setkali (viz V(5.7)) při studiu kvazistacionárního pole.

Rovnice XII(3.7) určuje vývoj magnetického pole \mathbf{B} v závislosti na rychlosti proudění. Jak jsme již uvedli v úvodní části této kapitoly, existuje v proudící tekutině také obrácený vliv magnetického pole na pole rychlostí $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Proto

potřebujeme doplnit Navierovy—Stokesovy rovnice XII(2.21) o magnetickou složku Lorentzovy síly

$$\mathbf{f} = [\mathbf{j}, \mathbf{B}] = -\frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{B}].$$

Elektrická složka síly $\rho^{(e)} \mathbf{E}$ je zpravidla zanedbatelná, jelikož v dobrých vodičích je objemová hustota $\rho^{(e)}$ elektrického náboje zpravidla velmi malá. Situacemi, kdy tomu tak není, se zde zabývat nebudeme¹⁵⁾.

Přidáním členu \mathbf{f} / ρ na pravou stranu rovnic XII(2.21) dostaneme hledanou soustavu

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left(\xi + \frac{\eta}{3} \right) \nabla \text{div } \mathbf{v} - \frac{1}{\mu_0 \rho} [\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{B}], \quad \text{XII(3.8)}$$

kteřá vyjadřuje vliv magnetického pole \mathbf{B} na pole rychlosti \mathbf{v} .

Rovnice XII(3.7) a XII(3.8) představují (již v úvodu zmíněnou) svázanou (simultánní) soustavu parciálních diferenciálních rovnic pro pole \mathbf{B} a rychlost \mathbf{v} . K tomu je nutno připojit rovnici kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{XII(3.9)}$$

a stavovou rovnici

$$P \equiv P(\rho, \mathbf{B}, \mathcal{T}) \quad \text{XII(3.10)}$$

nebo jiný ekvivalentní termodynamický vztah.

Rovnice XII(3.7) až XII(3.10) představují soustavu osmi rovnic pro osm veličin $B_1, B_2, B_3, v_1, v_2, v_3, \rho, P$, takže soustava je *úplná*.

K rovnicím XII(3.8) lze dospět také tak, že k tenzoru napětí XII(2.19) přidáme magnetickou část Maxwellova tenzoru napětí (viz čl. VI.2)

$$T_{ij} = \frac{B^2}{2\mu_0} \delta_{ij} - \frac{B_i B_j}{\mu_0}. \quad \text{XII(3.11)}$$

Z rovnic

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \text{XII(3.12)}$$

kde

$$\tau_{ij} = P \delta_{ij} + \rho v_i v_j - \tau'_{ij} + T_{ij}, \quad \text{XII(3.13)}$$

pak plyne XII(3.8). Rovnice XII(3.12) je tedy bilanční rovnicí pro hybnost magnetohydrodynamické tekutiny.

¹⁵⁾ Rovnice XII(3.7) se často užívá samostatně k modelování magnetických polí generovaných pohybem nabitě tekutiny.

Energetickou bilanci najdeme takto: K hustotě energie $\rho u + \frac{1}{2}\rho v^2$ je nutno přidat hustotu $B^2/(2\mu_0)$ magnetické energie. Vektor XII(2.25) proudové hustoty energie nutno doplnit o vektor proudové hustoty toku elektromagnetické energie (Poyntingův vektor)

$$\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{E}, \mathbf{B}].$$

Elektrické pole \mathbf{E} vyloučíme pomocí vztahu XII(3.4), čímž vyjádříme Poyntingův vektor pomocí magnetického pole \mathbf{B} a rychlosti \mathbf{v} proudění tekutiny. Výsledkem je rovnice

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{\gamma\mu_0^2} [\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{B}] + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times [\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad \text{XII(3.14)}$$

Energetická bilanční rovnice MHD tekutiny pak je

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho u + \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{\partial J_i}{\partial x_i} \equiv -\text{div } \mathbf{J}, \quad \text{XII(3.15)}$$

kde vektor \mathbf{J} proudové hustoty energie má komponenty

$$J_i = (\rho h + \frac{1}{2}\rho v^2)v_i - (\tau'_{ij}v_j) - \kappa \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial x_i} + S_i. \quad \text{XII(3.16)}$$

Entropickou bilanci najdeme obdobně. V tekutině se generuje Jouleovo teplo

$$q = \frac{j^2}{\gamma} = \frac{1}{\gamma\mu_0^2} (\text{rot } \mathbf{B})^2, \quad \text{XII(3.17)}$$

jímž je nutno doplnit pravou stranu rovnice XII(2.23). Hledaná rovnice je

$$\rho \mathcal{T} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \tau'_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \text{div} (\kappa \nabla \mathcal{T}) + \frac{1}{\gamma\mu_0^2} (\text{rot } \mathbf{B})^2. \quad \text{XII(3.18)}$$

Obecná soustava rovnic magnetohydrodynamiky je velice složitá (nelineární simultánní soustava), takže její obecné analytické řešení nepřichází v úvahu. Příznivější je situace v některých speciálních případech (ideální, neztlačitelná, dokonale vodivá tekutina), k nimž se nyní obrátíme.

XII.4 Speciální případy rovnic magnetohydrodynamiky

Při stacionárním proudění je nutno v soustavě magnetohydrodynamických rovnic anulovat časové derivace. Tuto elementární transformaci rovnic XII(3.7) až XII(3.9) si čtenář snadno provede sám, a proto ji zde uvádět nebudeme.

Pro dokonale vodivou tekutinu ($\gamma \rightarrow \infty$) se rovnice XII(3.7) zjednoduší na

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]. \quad \text{XII(4.1)}$$

Ve vektorové identitě

$$\text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}] \equiv (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{B} \quad \text{XII(4.2)}$$

vypadne poslední člen $\text{div } \mathbf{B} = 0$, takže místo XII(4.1) budeme mít

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} \equiv \frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} - \mathbf{B} \text{ div } \mathbf{v}.$$

Z rovnice kontinuity XII(2.3) vyjádříme $\text{div } \mathbf{v} = -\rho^{-1} (d\rho/dt)$. Výsledkem jednoduchých úprav je hledaná rovnice pro vývoj magnetického pole v dokonale vodivé tekutině

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{v}, \quad \text{XII(4.3)}$$

kde

$$\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{B}}{\rho}. \quad \text{XII(4.4)}$$

Rovnice XII(4.3) je podobná rovnici pro proudočáry. Nechť δl je element proudočáry. Na jednom konci nechť je rychlost tekutiny rovna \mathbf{v} , na druhém konci je pak $\mathbf{v} + (\delta l \nabla) \mathbf{v}$. Za čas dt se element δl posune o $dt(\delta l \nabla) \mathbf{v}$, takže je

$$\frac{d}{dt} (\delta l) = (\delta l \nabla) \mathbf{v}. \quad \text{XII(4.5)}$$

Rovnice pro změnu vektorů \mathbf{b} a δl jsou stejné. Jsou-li v počátečním okamžiku t_0 směry obou vektorů stejné, pak směry těchto vektorů zůstanou paralelní i ve všech budoucích okamžicích; délky obou vektorů jsou navzájem úměrné.

Uvedeme ještě soustavu rovnic magnetohydrodynamiky pro neztlačitelnou tekutinu, kdy je $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Pomocí identity XII(4.2) se upraví člen $\text{rot}[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ v rovnici XII(3.7). V rovnici XII(3.8) vypadne člen $\text{grad } \text{div } \mathbf{v} = 0$. Poslední člen upravíme pomocí identity

$$[\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{B}] \equiv -(\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \nabla(\frac{1}{2} B^2).$$

Výsledkem těchto úprav je soustava MHD rovnic pro neztlačitelnou tekutinu

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{XII(4.6)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\gamma\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad \text{XII(4.7)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0 \rho} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}. \quad \text{XII(4.8)}$$

XII.5 Hartmanovo řešení rovnic magnetohydrodynamiky

Budeme zkoumat neztlačitelnou, viskozni, vodivou tekutinu proudici stacionarne mezi dvema rovnoběžnými tuhými rovinami. Ve směru kolmém k těmto rovinám působí vnější homogenní pole B_0 .

Rovnoběžné roviny vezmeme paralelně s rovinou (x, y) . Rychlost tekutiny zvolíme ve směru osy x ; bude tedy

$$v_x \equiv v(z), \quad v_y = v_z = 0. \quad \text{XII(5.1)}$$

Závislost $v \equiv v(z)$ na výšce je způsobena viskozitou. Rovnice $\text{div } \mathbf{v} = 0$ je splněna automaticky.

Pro pole \mathbf{B} bude obdobně

$$B_x \equiv B(z), \quad B_y = 0, \quad B_z = B_0. \quad \text{XII(5.2)}$$

Touto volbou je automaticky splněno $\text{div } \mathbf{B} = 0$, takže obě rovnice XII(4.6) jsou splněny identicky.

Vezmeme z -ovou složku rovnice XII(4.8). Při stacionárním proudění $(\partial \mathbf{v} / \partial t) = 0$ to dá

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0.$$

Ve shodě s XII(5.2) je $B^2 = B_x^2 + B_0^2$, a tudíž

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{B_x^2}{2\mu_0} \right) = 0. \quad \text{XII(5.3)}$$

Z y -ové složky rovnice XII(4.8) plyne

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0. \quad \text{XII(5.4)}$$

Odtud je vidět, že $P + B^2/(2\mu_0)$ závisí pouze na x , což vyjádříme rovnicí

$$P + \frac{B_x^2}{2\mu_0} = \Pi(x). \quad \text{XII(5.5)}$$

Pro x -ovou složku rovnice XII(4.8) snadno odvodíme vztahy

$$\frac{B_0}{\mu_0 \rho} \frac{dB_x}{dz} + \frac{\eta}{\rho} \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial x}.$$

Jelikož levá strana je funkcí pouze z , pravá závisí (ve shodě s XII(5.5)) pouze na x a obě strany musí být rovny stejné konstantě. Přicházíme tak k závěru, že

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \text{konst.} \quad \text{XII(5.6)}$$

Máme tak rovnice

$$B_0 \frac{dB_x}{dz} + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{dP}{dx} = \text{konst.}, \quad \text{XII(5.7)}$$

$$\frac{1}{\gamma \mu_0} \frac{d^2 B_x}{dz^2} + B_0 \frac{dv}{dz} = 0. \quad \text{XII(5.8)}$$

Poslední z těchto rovnic je x -ovou složkou rovnice XII(4.7).

Tekutina proudí mezi rovinami $z = \pm a$. Na těchto rovinách platí hraniční podmínky

$$v(\pm a) = 0, \quad B_x(\pm a) = 0. \quad \text{XII(5.9)}$$

Řešení soustavy rovnic XII(5.7) a XII(5.8) s konstantními koeficienty je jednoduché, proto je provedeme pouze stručně. Rovnici XII(5.7) proderivujeme podle z a za $(d^2 B_x / dz^2)$ dosadíme z XII(5.8). Zavedeme-li ještě označení

$$\Delta \equiv \frac{1}{B_0} \left(\frac{\eta}{\gamma \mu_0} \right)^{1/2}, \quad \text{XII(5.10)}$$

dostaneme rovnici

$$\frac{d^3 v}{dz^3} - \frac{1}{\Delta^2} \frac{dv}{dz} = 0.$$

Integrace této rovnice je triviální, proto uvedeme pouze výsledek

$$v = v_0 \frac{\text{ch} \left(\frac{a}{\Delta} \right) - \text{ch} \left(\frac{z}{\Delta} \right)}{\text{ch} \left(\frac{a}{\Delta} \right) - 1}. \quad \text{XII(5.11)}$$

Veličina v_0 je rychlost při $z = 0$, tj. uprostřed mezi oběma rovinami. Střední rychlost je

$$\langle v \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} v \, dz.$$

Jednoduchý výpočet dá

$$\langle v \rangle = \frac{v_0}{\text{ch} \left(\frac{a}{\Delta} \right) - 1} \left[\text{ch} \left(\frac{a}{\Delta} \right) - \left(\frac{a}{\Delta} \right)^{-1} \text{sh} \left(\frac{a}{\Delta} \right) \right].$$

Z této rovnice vyjádříme v_0 , dosadíme do XII(5.11); z XII(5.7) pak získáme vztah mezi $\langle v \rangle$ a dP/dx

$$\langle v \rangle = -\frac{dP}{dx} \frac{a\Delta}{\eta} \left[\text{cth} \left(\frac{a}{\Delta} \right) - \frac{\Delta}{a} \right]. \quad \text{XII(5.12)}$$

Magnetické pole B_x dostaneme tak, že XII(5.11) dosadíme do XII(5.8).

Integrace vzniklé rovnice — s ohledem na hraniční podmínku XII(5.9) — dá (S. HARTMAN, 1937)

$$B_x = \frac{v_0(\gamma\mu_0\eta)^{1/2}}{\operatorname{ch}\left(\frac{a}{\Delta}\right) - 1} \left[\operatorname{sh}\left(\frac{z}{\Delta}\right) - \frac{z}{a} \operatorname{sh}\left(\frac{a}{\Delta}\right) \right]. \quad \text{XII(5.13)}$$

Kritériem vlivu magnetického pole na proudění tekutiny je veličina a/Δ . Při $a \ll \Delta$ (slabé pole) je

$$v \cong v_0 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right), \quad \langle v \rangle \cong -\frac{dP}{dx} \frac{a^2}{3\eta}, \quad \text{XII(5.14)}$$

což jsou známé výsledky z obyčejné hydrodynamiky (parabolický profil rychlosti). Při $a \gg \Delta$ (silné pole) je

$$v \cong v_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{a - |z|}{\Delta}\right)\right]. \quad \text{XII(5.15)}$$

Vnější pole zplošťuje profil rychlosti; při silných polích je odchylka od rovinného profilu znatelná pouze u stěn.

Obdobně najdeme asymptotické chování podélného pole B_x . Při $a \ll \Delta$ (slabé vnější pole B_0) je

$$B_x \cong \frac{1}{3} v_0(\gamma\mu_0\eta)^{1/2} \frac{z^3}{a^2\Delta}. \quad \text{XII(5.16)}$$

Pro silná vnější pole B_0 (tj. $a \gg \Delta$) je

$$B_x \cong v_0(\gamma\mu_0\eta)^{1/2} \left[\exp\left(-\frac{a - |z|}{\Delta}\right) - \frac{|z|}{a} \right]. \quad \text{XII(5.17)}$$

Výpočet stacionárního magnetohydrodynamického proudění v trubicích obdélníkového a kruhového průřezu je obdobný, i když poněkud delší.

XII.6 Magnetohydrodynamické vlny malé amplitudy

Soustavě magnetohydrodynamických rovnic XII(3.7) až XII(3.10) vyhovují konstantní hodnoty (označíme je indexem nula) $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, $\rho = \rho_0$, $P = P_0$. Při odchylce (poruše) některé z těchto veličin dojde k odpovídajícím změnám i u ostatních veličin — ve shodě s pohybovými rovnicemi tekutiny. Zde se budeme zabývat malými odchylkami. Jedná se o *linearizaci* rovnic.

Pro snazší orientaci začneme ideální ztláčitelnou tekutinou bez magnetického pole. Rovnicím XII(2.1) a XII(2.2) vyhovují konstantní (stacionární) hodnoty

$\rho = \rho_0$, $P = P_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$. Budeme uvažovat pouze malé odchylky od těchto hodnot; položíme

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad P = P_0 + P', \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'. \quad \text{XII(6.1)}$$

V soustavě pevně spojené s tekutinou je $\mathbf{v}_0 = 0$, proto bude $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, což budeme předpokládat. Odchylky ρ' , P' jsou malé, tj.

$$|\rho'| \ll \rho_0, \quad |P'| \ll P_0. \quad \text{XII(6.2)}$$

Změnu tlaku můžeme vyjádřit z XII(2.6) jako

$$P' = w_0^2 \rho', \quad \text{XII(6.3)}$$

kde

$$w_0 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^{1/2} \quad \text{XII(6.4)}$$

je — jak uvidíme — rychlost zvukových vln.

V rovnici kontinuity položíme $\rho \mathbf{v} = (\rho_0 + \rho')(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}') \cong \rho_0 \mathbf{v}' \equiv \rho_0 \mathbf{v}$, takže $(\partial \rho / \partial t) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$ dá

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad \text{XII(6.5)}$$

V Eulerových rovnicích linearizujeme člen $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$, což dá $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} \cong 0$ (s přesností do malých veličin prvního řádu). Je tedy

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\nabla P'}{\rho_0} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{w_0^2}{\rho_0} \nabla \rho'. \quad \text{XII(6.6)}$$

Při poslední úpravě jsme užili vztahu XII(6.3). Na poslední rovnici aplikujeme operaci div a pak $\operatorname{div} \mathbf{v}$ vyjádříme pomocí XII(6.5); výsledkem je vlnová rovnice

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{w_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \rho' = 0, \quad \text{XII(6.7)}$$

v níž w_0 má význam rychlosti šíření rozruchu (zvukové vlny) v tekutině. Obdobnou rovnici dostaneme pro rychlost \mathbf{v} .

Řešení linearizované soustavy XII(6.5) a XII(6.6) budeme hledat ve tvaru rovinných monochromatických vln

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r} - i \omega t), \quad \rho' = \mathbf{b} \exp(i \mathbf{k} \mathbf{r} - i \omega t).$$

Z těchto rovnic plyne

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -i \omega \rho', \quad \nabla \rho' = i \mathbf{k} \rho',$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -i \omega \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = i(\mathbf{k} \mathbf{v}).$$

Po dosazení těchto vztahů do XII(6.5) a XII(6.6) získáme homogenní soustavu rovnic

$$-\omega \rho' + \rho_0(\mathbf{k}\mathbf{v}) = 0, \quad w_0^2 \mathbf{k}\rho' - \omega \rho_0 \mathbf{v} = 0,$$

jež má netriviální řešení pouze tehdy, když je determinant soustavy roven nule. V daném případě to značí $\omega^2 - k^2 w_0^2 = 0$.

Postup pro rovnice magnetohydrodynamiky je obdobný. Budeme uvažovat ideální tekutinu ($\eta = \zeta = 0$) dokonalé vodivosti ($\gamma = \infty$), přičemž zanedbáme také vliv tepelné vodivosti ($\kappa = 0$).

Při úpravě rovnic XII(3.7) a XII(3.8) uijeme vektorové identity

$$\text{rot}[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \equiv (\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div} \mathbf{a}, \\ [\mathbf{a}, \text{rot} \mathbf{a}] = \nabla(\frac{1}{2}\mathbf{a}^2) - (\mathbf{a}\nabla)\mathbf{a}.$$

Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{XII(6.8)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{B} \text{div} \mathbf{v} + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}, \quad \text{XII(6.9)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\rho\mu_0} (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}, \quad \text{XII(6.10)}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \text{XII(6.11)}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)s = 0. \quad \text{XII(6.12)}$$

Tyto rovnice mají řešení při konstantních veličinách $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, $P = P_0$, $\rho = \rho_0$, $s = s_0$. Předpokládejme, že dojde k malé poruše těchto veličin, a příslušné změny označme čárkovanými symboly \mathbf{B}' , \mathbf{v}' , P' , ρ' , s' . Místo polí \mathbf{B}_0 a \mathbf{B}' je výhodné zavést veličiny

$$\mathbf{W}_0 = \frac{\mathbf{B}_0}{(\rho_0\mu_0)^{1/2}}, \quad \mathbf{W}' = \frac{\mathbf{B}'}{(\rho_0\mu_0)^{1/2}}. \quad \text{XII(6.13)}$$

Výsledné hodnoty veličin jsou

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}', \quad \mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad P = P_0 + P', \quad s = s_0 + s'.$$

Tyto veličiny dosadíme do soustavy XII(6.8)—XII(6.12), v níž ponecháme pouze malé veličiny prvního řádu. Linearizovaná soustava zní

$$\text{div} \mathbf{W}' = 0, \quad \text{XII(6.14)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{W}' = (\mathbf{W}\nabla)\mathbf{v}' - \mathbf{W} \text{div} \mathbf{v}', \quad \text{XII(6.15)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho} \nabla(P' + \rho\mathbf{W}\mathbf{W}') + (\mathbf{W}\nabla)\mathbf{W}', \quad \text{XII(6.16)}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\rho' + \rho \text{div} \mathbf{v}' = 0, \quad \text{XII(6.17)}$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla s' = 0. \quad \text{XII(6.18)}$$

Zde jsme pro jednoduchost vynechali index nula u stacionárních hodnot \mathbf{v}_0 , ρ_0 , \mathbf{W}_0 .

Tlak P je funkcí hustoty ρ a entropie s , takže

$$P' = w_0^2 \rho' + b s', \quad \text{XII(6.19)}$$

kde $w_0 = (\partial P / \partial \rho)_0^{1/2}$ je rychlost zvukových vln v obyčejné hydrodynamice (při $\mathbf{B} = 0$, což je vyznačeno indexem u w).

V linearizované soustavě XII(6.14)—XII(6.18) lze každou z veličin \mathbf{W}' , \mathbf{v}' , ρ' , P' , s' položit úměrnou $\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$. Po úpravách obdobných těm, jichž jsme užili při úpravě rovnic XII(6.5) a XII(6.6), dospějeme k rovnicím

$$\mathbf{k}\mathbf{W}' = 0, \\ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{W}' + (\mathbf{k}\mathbf{W})\mathbf{v}' - (\mathbf{k}\mathbf{v}')\mathbf{W} = 0, \\ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{v}' + (\mathbf{k}\mathbf{W})\mathbf{W}' - \frac{1}{\rho} (P' + \rho\mathbf{W}\mathbf{W}')\mathbf{k} = 0, \quad \text{XII(6.20)} \\ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\rho' - \rho(\mathbf{k}\mathbf{v}') = 0, \\ (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})s' = 0.$$

Tato soustava devíti lineárních homogenních rovnic pro devět veličin (\mathbf{W}' , \mathbf{v}' , ρ' , P' , s') má netriviální řešení pouze tehdy, když determinant soustavy je roven nule. Determinant nejsnáze vypočteme tak, že vlnový vektor \mathbf{k} položíme do směru některé ze souřadných os. Po delší, avšak jednoduché úpravě dospějeme k podmínce pro existenci netriviálního řešení

$$0 = \omega_0^2 [\omega_0^2 - (\mathbf{k}\mathbf{W})^2] [\omega_0^4 - k^2(w_0^2 + W^2)\omega_0^2 + k^2 w_0^2 (\mathbf{k}\mathbf{W})^2], \quad \text{XII(6.21)}$$

kde je zavedeno označení

$$\omega_0 \equiv \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}. \quad \text{XII(6.22)}$$

Rovnice XII(6.21) určuje čtyři různá řešení $\omega_0^2 = f(\mathbf{k})$ disperzní relace —, pro něž existují různé fázové i grupové rychlosti. Přejdeme nyní k rozboru těchto řešení.

XII.7 Entropická vlna

V disperzním zákonu mohou být rovny nule všechny tři faktory. Je-li roven nule první člen, tj.

$$\omega_0 \equiv \omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0, \quad \text{XII(7.1)}$$

pak z XII(6.20) plyne, že je také

$$\mathbf{W}' = 0, \quad \mathbf{v}' = 0, \quad P' = 0. \quad \text{XII(7.2)}$$

Z poslední rovnice XII(6.20) pak plyne, že je nenulová pouze změna s' entropie a s tím svázaná změna hustoty

$$s' = -\frac{w_0^2}{b} \varrho'. \quad \text{XII(7.3)}$$

Při úpravě jsme v XII(6.19) položili $P' = 0$.

Z definice ω_0 je vidět, že odpovídá frekvenci v souřadném systému, vůči němuž je tekutina v klidu. Jelikož u entropické vlny je rychlost šíření vzhledem k tekutině nulová, je název vlna dosti konvenční. Entropické vlny se uplatní v tzv. rázových vlnách, čímž se zde však zabývat nebudeme.

XII.8 Alfvénovy vlny

Anulováním druhého faktoru v XII(6.21) dostaneme

$$\omega_0 = \pm k\mathbf{W} = \pm \frac{kB_0}{(\varrho_0\mu_0)^{1/2}} \cos \vartheta, \quad \text{XII(8.1)}$$

kde ϑ je úhel mezi směrem šíření vlny a původním polem B_0 . Rychlost šíření těchto vln V_A je

$$V_A = \frac{\omega_0}{k} = \pm \frac{B_0}{(\varrho_0\mu_0)^{1/2}} \cos \vartheta. \quad \text{XII(8.2)}$$

Po dosazení XII(8.1) do XII(6.20) se přesvědčíme, že

$$\varrho' = 0, \quad P' = 0, \quad s' = 0, \quad \text{XII(8.3)}$$

$$\mathbf{v}' = \mp \mathbf{W}', \quad k\mathbf{W}' = 0, \quad \mathbf{W}\mathbf{W}' = 0. \quad \text{XII(8.4)}$$

Jelikož $\varrho' = 0$, mohou tyto vlny existovat i u nestlačitelné tekutiny. Vlny jsou čistě *transverzální*, přičemž kmity probíhají ve směru kolmém k \mathbf{W} , a tedy i k původnímu poli B_0 . Jsou to *specifické magnetohydrodynamické vlny*, jež v roce 1942 předpověděl H. ALFVÉN, a proto nesou jeho jméno. Jejich existenci experimentálně potvrdil S. LUNDQUIST (1949) v pokusech se rtuťovými parami.

Transverzálnost Alfvénových vln značí, že vodivá tekutina nabývá v magnetickém poli jistých *elastických vlastností*.

XII.9 Magneto-zvukové vlny

Anulováním posledního faktoru v XII(6.21) získáme řešení

$$\omega_0^4 - k^2(w_0^2 + W^2)\omega_0^2 + k^2w_0^2(k\mathbf{W})^2 = 0. \quad \text{XII(9.1)}$$

Řešením této bikvadratické rovnice dostaneme dvě vlny s různou rychlostí šíření ($V = \omega_0/k$)

$$V_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \{ w_0^2 + W^2 \pm [(w_0^2 + W^2)^2 - 4W^2w_0^2 \cos^2 \vartheta]^{1/2} \}, \quad \text{XII(9.2)}$$

kde ϑ je úhel mezi \mathbf{k} a \mathbf{W} (řesp. B_0). Je vidět, že rychlosti V_{\pm}^2 jsou ohraničeny nerovnostmi

$$\max(W^2, w_0^2) \leq V_{\pm}^2 \leq w_0^2 + W^2, \quad \text{XII(9.3)}$$

$$V_{\pm}^2 \leq \min(w_0^2, W^2 \cos^2 \vartheta) = \min(w_0^2, V_A^2), \quad \text{XII(9.4)}$$

kde V_A je Alfvénova rychlost XII(8.2).

Je zřejmé, že V_+ představuje vlnu *zrychlenou* ve srovnání se zvukovou anebo Alfvénovou vlnou; obdobně V_- popisuje vlnu *zpomalenou* ve srovnání se zvukovou anebo Alfvénovou vlnou.

Snadno se přesvědčíme, že změny \mathbf{v}' a \mathbf{W}' leží v rovině (\mathbf{k}, B_0) , takže mají komponenty jak ve směru šíření vlny (\mathbf{k}), tak i ve směru kolmém.

Vyjádření změn \mathbf{v}' , \mathbf{W}' a P' pomocí změny hustoty ϱ' je provedeno v příkladě 4 k této kapitole.

XII.10 Magnetohydrodynamické vlny libovolné amplitudy

Alfvénovy vlny jsme získali za předpokladu malých odchylek od stacionárních veličin. Nyní ukážeme, že za jistých podmínek existují Alfvénovy vlny libovolné amplitudy — jako *exaktní řešení* soustavy rovnic magnetohydrodynamiky.

Budeme uvažovat ideální ($\eta = \zeta = 0$) dokonale vodivou ($\gamma = \infty$) neztlačitelnou tekutinu v magnetickém poli.

První dvě rovnice mají standardní tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad \text{XII(10.1)}$$

Pro neztlačitelnou tekutinu se XII(6.9) zjednoduší na

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B}. \quad \text{XII(10.2)}$$

Pro rychlost platí XII(6.10), tj.

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho} \nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\varrho\mu_0} (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}. \quad \text{XII(10.3)}$$

Rovnice pro entropii XII(6.12) zůstane nezměněna. Podmínka neztlačitelnosti $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ značí, že všude budeme předpokládat

$$\varrho = \text{konst.}$$

Budeme uvažovat takový pohyb, při němž všechny veličiny závisí pouze na souřadnici z a na čase t , tj.

$$\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(z, t), \quad \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(z, t), \quad P \equiv P(z, t); \quad \text{XII(10.4)}$$

v takovém případě ze soustavy XII(10.1)—XII(10.3) vypadnou všechny členy obsahující derivace $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$.

Druhá z rovnic XII(10.1) dá $(\partial v_z/\partial z) = 0$. Předpokládáme-li tekutinu na hranici (v nekonečnu) v klidu, pak

$$v_z = 0. \quad \text{XII(10.5)}$$

První z rovnic XII(10.1) dá $(\partial B_z/\partial z) = 0$. Složka pole B_z nezávisí na z . Vezmeme z -ovou složku rovnice XII(10.2) a s ohledem na XII(10.5) dostaneme

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = B_z \frac{\partial v_z}{\partial z} - v_z \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

Je tedy

$$B_z = B_0 = \text{konst.} \quad \text{XII(10.6)}$$

Z rovnic XII(10.2) a XII(10.3) získáme vztahy

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \quad \text{XII(10.7)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\rho\mu_0} B_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}. \quad \text{XII(10.8)}$$

Ze z -ové složky poslední rovnice plyne

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0, \quad \text{XII(10.9)}$$

tj.

$$P + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{konst} = P_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0}. \quad \text{XII(10.9')}$$

Z rovnice XII(10.9) při započtení XII(10.4) plyne, že

$$\nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = 0.$$

Tento člen pak vypadne z XII(10.8), čímž máme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{B_0}{\rho\mu_0} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad \text{XII(10.10)}$$

Pro přehlednost jsme zde přidali rovnici XII(10.7).

Nelineární soustava rovnic magnetohydrodynamiky se zredukovala na *lineární* soustavu XII(10.10).

Předpokládejme, že tekutina se pohybuje v konstantním vnějším magnetickém poli \mathbf{B}_0 , jež zvolíme ve směru osy z , tj. $\mathbf{B}_0 \equiv (0, 0, B_0)$. Indukované (libovolně velké) pole označíme symbolem \mathbf{b} , takže po dosazení

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b} \quad \text{XII(10.11)}$$

do XII(10.10) máme

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{B_0}{\rho\mu_0} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial z}. \quad \text{XII(10.12)}$$

Proderivujeme první z těchto rovnic podle z , druhou podle t . Po jednoduchém výpočtu dospějeme k rovnicím

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{V_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{v} = 0, \quad \text{XII(10.13)}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{V_A^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{b} = 0, \quad \text{XII(10.14)}$$

kde

$$V_A = \frac{B_0}{(\rho\mu_0)^{1/2}} \quad \text{XII(10.15)}$$

je známá nám již rychlost Alfvénových vln. Vztahy XII(10.13) a XII(10.4) pro rychlost \mathbf{v} a pole \mathbf{b} jsou vlnové rovnice pro tyto veličiny.

Symetrie těchto rovnic dává možnost řešení $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{b}$, kde α je konstanta. Po dosazení najdeme $\alpha^2 = (\rho\mu_0)^{-1}$, a tudíž

$$\mathbf{v} = \mp \frac{\mathbf{b}}{(\rho\mu_0)^{1/2}}. \quad \text{XII(10.16)}$$

Předpokládejme sinusoidální řešení vlnových rovnic

$$B_x = b_x = b_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{V_A} \right) \right]. \quad \text{XII(10.17)}$$

Tento vztah dosadíme do druhé rovnice XII(10.12) a po integraci dostaneme rychlost

$$v_x = -\frac{b_0}{(\rho\mu_0)^{1/2}} \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{V_A} \right) \right]. \quad \text{XII(10.18)}$$

Totéž plyne přímo z XII(10.16).

Na Alfvénových vlnách (libovolné amplitudy) lze názorně prodemonstrovat zamrzání magnetických indukčních čar v ideální dokonale vodivé tekutině. Rovnice magnetických indukčních čar jsou

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dz}{B_z}.$$

Položíme $B_z = B_0$ a B_x vezmeme ve tvaru XII(10.17), čímž dostaneme rovnici magnetických indukčních čar

$$\frac{dx}{dz} = \frac{b_0}{B_0} \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{V_A} \right) \right].$$

Integrací dospějeme k rovnici

$$x = x_0 + \frac{b_0}{\omega(\rho\mu_0)^{1/2}} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{V_A} \right) \right]. \quad \text{XII(10.19)}$$

Každý bod této magnetické indukční čáry se pohybuje paralelně s osou x rychlostí

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{b_0}{(\rho\mu_0)^{1/2}} \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{V_A} \right) \right], \quad \text{XII(10.20)}$$

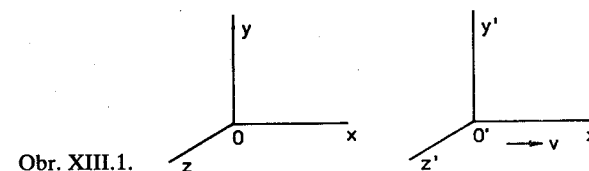
jež je podle XII(10.18) rovna rychlosti v_x přenosu hmoty tekutiny. Magnetické pole se (v takové tekutině) šíří *stejnou rychlostí jako sama tekutina*.

XIII.1 Galileiova transformace a Maxwellova elektrodynamika

Hned v úvodu této kapitoly bychom chtěli zdůraznit, že naším cílem není systematický výklad teorie relativity, která tvoří samostatný předmět vysokoškolského studia. Čtenář zajisté ví, že Einsteinova speciální teorie relativity vznikla z analýzy rovnic elektrodynamiky pohybujících se prostředí, což nakonec přivedlo k radikální změně názorů na prostor a čas. Na půdě speciální teorie relativity vznikl princip lorentzovské kovariantnosti pohybových rovnic, jenž je dnes vůdčím principem ve fyzice. Naším cílem je vysvětlit vznik tohoto principu a jeho aplikace v elektrodynamice.

V naší literatuře existuje znamenitá vysokoškolská učebnice akademika Votruby¹⁶⁾, v níž najde čtenář všestranné poučení o speciální teorii relativity.

Mějme dvě referenční soustavy (x, y, z) a (x', y', z') , jež se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí V . tuto rychlost zvolíme ve směru osy x (viz obr. XIII.1).



Obr. XIII.1.

Newtonův předpoklad absolutního (na pohybu těles nezávislého) prostoru a času vede k tomu, že mezi oběma soustavami platí

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \quad \text{XIII(1.1)}$$

Tato soustava rovnic se obvykle nazývá *Galileiovou transformací*.

¹⁶⁾ V. VOTRUBA: Speciální teorie relativity, Academia Praha 1969.

Rychlosti částice v obou soustavách $v_x = (dx/dt)$ a $v'_x = (dx'/dt')$ jsou svázány vztahem

$$v_x = v'_x + V, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z. \quad \text{XIII(1.2)}$$

Tento *adiční teorém rychlostí* je nerozlučně spojen s předpokladem *nezávislosti chodu času* ($t' = t$) na referenční soustavě. Takový předpoklad však není očividný, proto je nutno jej *experimentálně prověřit*.

Rychlost V vzájemného pohybu obou soustav je podle předpokladu konstantní, takže zrychlení $(d\mathbf{v}'/dt')$ a $(d\mathbf{v}/dt)$ budou v obou soustavách stejná. Newtonovy pohybové rovnice

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = -\nabla U$$

jsou tedy invariantní vůči Galileiově transformaci XIII(1.1).

Referenční soustava, v níž se těleso nepodrobené silovému působení pohybuje konstantní rychlostí, se nazývá *inerciální soustavou*. Invariantností pohybových rovnic mechaniky vůči Galileiově transformaci vyjádříme ekvivalentnost všech inerciálních referenčních soustav v Newtonově mechanice, což se nazývá *Galileiovým principem relativity*.

V Mechanice tedy neexistuje privilegovaná soustava v klidu, jelikož ji nelze principiálně odlišit od ostatních soustav, jež se vůči ní pohybují konstantní nenulovou rychlostí.

Zdálo se, že takové rozlišení bude možné pomocí elektromagnetických jevů. Šíření elektromagnetických vln ve vakuu je popsáno rovnicí typu

$$\square \psi \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0, \quad \text{XIII(1.3)}$$

kde rychlost šíření

$$c = (\epsilon_0 \mu_0)^{1/2} \quad \text{XIII(1.4)}$$

je (s ohledem na ϵ_0, μ_0) univerzální konstanta. Existence této rychlosti se zdála být klíčem k rozlišení soustavy v klidu od soustavy v rovnoměrném přímočarém pohybu. Mějme nějakou privilegovanou soustavu, v níž je rychlost šíření elektromagnetických vln ve směru osy x rovná c . Ve shodě s adičním teorémem rychlostí XIII(1.2) by měla být rychlost šíření $c - V$, resp. $c + V$ v závislosti na vzájemné orientaci obou rychlostí c a V . Takovou závislost rychlosti světla na relativní rychlosti soustav (zdroje a přijímače) je nutno experimentálně prověřit.

Zatímco Newtonovy rovnice jsou invariantní vůči Galileiově transformaci, není tomu tak u rovnic Maxwellových. Proilustrujeme tuto skutečnost na vlnové rovnici XIII(1.3). Budeme zkoumat d'Alembertův operátor v obou soustavách.

Ze vztahu

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

plyne

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2}. \quad \text{XIII(1.5)}$$

Obdobně je

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \left(-V \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right).$$

Opětovanou aplikací tohoto vztahu dostaneme

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}. \quad \text{XIII(1.5')}$$

Kromě toho je $(\partial^2/\partial y^2) = (\partial^2/\partial y'^2)$, $(\partial^2/\partial z^2) = (\partial^2/\partial z'^2)$. Po dosazení XIII(1.5) a XIII(1.5') do vlnové rovnice XIII(1.3) zjistíme, že v pohybující se soustavě by měl být d'Alembertův operátor

$$\square' = \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} + \frac{2V}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}.$$

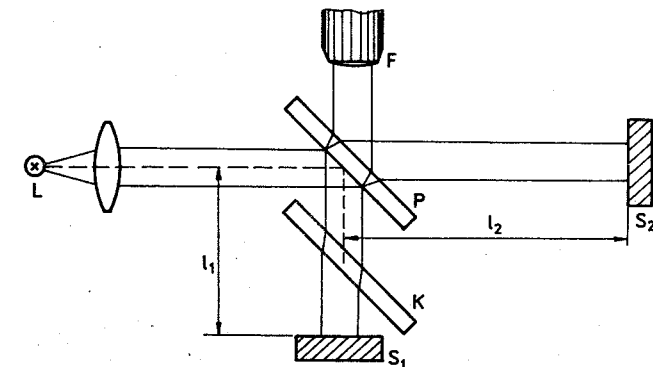
Tento operátor má jiný tvar než XIII(1.3), a tedy vlnová rovnice XIII(1.3) není invariantní vůči Galileiově transformaci.

Máme tak na vybranou dvě možnosti:

1. Ekvivalentnost inerciálních soustav platí v mechanice, nikoli však v elektrodynamice. V takovém případě by měla existovat privilegovaná soustava v klidu, jež by se dala odlišit od soustav s (konstantní) rychlostí $V \neq 0$.

2. Ekvivalentnost inerciálních soustav platí v mechanice i v elektrodynamice. V tom případě je nutno modifikovat buď Maxwellovy nebo Newtonovy rovnice.

Volbu mezi těmito logicky možnými návrhy nutno provést na základě rozhodujícího experimentu. Zde se zmíníme o slavném Michelsonově—Morleyově (MICHELSON, MORLEY, 1887) experimentu. Připomeneme si podstatu tohoto pokusu (viz obr. XIX.2.).



Obr. XIII.2. Schéma Michelsonova—Morleyova pokusu

Světlo vycházející ze zdroje L se polopropustným zrcadlem P rozdělí na dva paprsky. Po odrazu od zrcadel S_1 a S_2 se paprsky vrátí přes polopropustné zrcadlo do okuláru F, pomocí něhož se pozoruje interference obou paprsků. Rozdíl optických délek ramen interferometru se vyrovnává kompenzační destičkou K.

Nechť se interferometr pohybuje (ve směru S_1P) rychlostí V vzhledem k privilegované soustavě. Kdyby platil adiční teorém rychlostí (a tedy i Galileiova transformace), pak doba t_1 potřebná k tomu, aby světlo překonalo vzdálenost PS_1P , by byla rovna

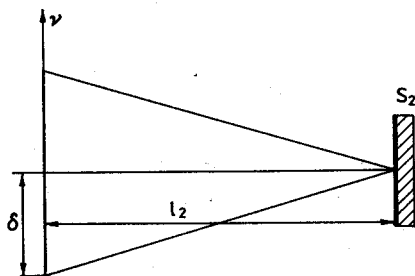
$$t_1 = \frac{l_1}{c-V} + \frac{l_1}{c+V} = \frac{2l_1}{c} \frac{1}{1-\beta^2}. \quad \text{XIII(1.6)}$$

Symbolem β jsme označili poměr rychlosti soustavy k rychlosti světla c , tj.

$$\beta \equiv \frac{V}{c}. \quad \text{XIII(1.7)}$$

Při pohybu světla od P k S_2 se zrcadlo P posune o vzdálenost δ (viz obr. XIII.3.), kterou určíme ze vztahu

$$\frac{Vt}{ct} = \frac{\delta}{(\delta^2 + l_2^2)^{1/2}}.$$



Obr. XIII.3.

Odtud plyne pro δ vyjádření

$$\delta = \beta \gamma l_2, \quad \text{XIII(1.8)}$$

kde jsme zavedli označení

$$\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2} \equiv (1 - V^2/c^2)^{-1/2}. \quad \text{XIII(1.9)}$$

Doba t_2 potřebná na to, aby světlo překonalo vzdálenost PS_2P vypočteme z rovnice $ct_2 = 2(\delta^2 + l_2^2)^{1/2}$, tj.

$$t_2 = \frac{2}{c} (\delta^2 + l_2^2)^{1/2} = \frac{2l_2}{c} \gamma. \quad \text{XIII(1.10)}$$

Pro rozdíl optických drah (označíme jej Δ) obou paprsků pak platí rovnice

$$\Delta \equiv c(t_1 - t_2) = 2\gamma(\gamma l_1 - l_2). \quad \text{XIII(1.11)}$$

Při pootočení interferometru o 90° se postavení ramen l_1 a l_2 vzájemně vymění, což dá pro rozdíl optických drah

$$\Delta' = 2\gamma(l_1 - \gamma l_2). \quad \text{XIII(1.12)}$$

Odtud plyne, že při pootočení přístroje o 90° se má objevit posuv interferenčního obrazce o n proužků, kde

$$n \equiv \frac{\Delta - \Delta'}{\lambda} = \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda} \gamma(\gamma - 1). \quad \text{XIII(1.13)}$$

Při malých rychlostech $\beta \ll 1$ lze užít přiblížení $\gamma \approx 1 + \beta^2/2$, což dá pro posuv interferenčních proužků

$$n \approx \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda} \beta^2. \quad \text{XIII(1.14)}$$

V uvedeném pokusu bylo použito sodíkového světla (vlnová délka $\lambda \approx 5,5 \cdot 10^{-7}$ m) a interferometru s délkou ramen $l_1 = l_2 = 11$ m, což při rychlosti Země kolem Slunce $V \approx 30$ km s^{-1} mělo dát snadno měřitelný posuv $n \approx 0,4$ proužku. Ani v uvedeném pokusu, ani v pozdějších experimentech nebyl takový posuv pozorován.

Z negativních výsledků těchto pokusů ALBERT EINSTEIN v roce 1905 dospěl k těmto závěrům, resp. postulátům:

1. Tvar fyzikálních zákonů je nezávislý na volbě inerciální soustavy, takže nelze žádným pokusem objevit tzv. privilegovanou soustavu, tj. soustavu v absolutním klidu.

2. Princip konstantní rychlosti světla, který dovoluje formulaci teorie relativity nezávisle na pohybových rovnicích elektrodynamiky.

Jak jsme již uvedli, souvisí s tím nutnost pozměnit Maxwellovy nebo Newtonovy rovnice. Einstein akceptoval beze změny Maxwellovy rovnice, které nejsou invariantní vůči Galileiově transformaci. Z toho logicky vyplynul závěr, že je nutno pozměnit transformaci XIII(1.1) tak, aby Maxwellovy rovnice byly invariantní vůči této nové transformaci. Opuštění Galileiovy transformace však současně znamená opuštění představy Newtonova absolutního prostoru a času, a tedy *kardinální revizi názorů na prostor a čas*. Pozdější vývoj fyziky potvrdil správnost Einsteinovy volby v plném rozsahu a ve všech mnohostranných důsledcích.

XIII.2 Lorentzova transformace

Záporný výsledek Michelsonova—Morleyova experimentu vede k závažným důsledkům pro transformaci souřadnic x, y, z a času t při přechodu od jedné inerciální soustavy k jiné x', y', z', t' .

Jelikož čtenář ví již ze střední školy, že tento přechod je popsán slavnou Lorentzovou transformací, naznačíme zde pouze příslušné kroky, aniž bychom zacházeli do podrobností.

Invariantnosti rychlosti světla můžeme dát následující matematickou formu. Mějme dvě referenční soustavy K a K', jež se vůči sobě pohybují konstantní rychlostí. Souřadné osy zvolíme tak, aby osy x a x' splývaly a osy y, z byly paralelní s odpovídajícími osami y', z'. (Obě soustavy se tedy pohybují ve směru osy x). Čas v soustavě K označíme t, v soustavě K' symbolem t'.

Světelný signál je vyslán z bodu x₁, y₁, z₁ v soustavě K v čase t₁ (v téže soustavě K). Budeme pozorovat šíření tohoto signálu v soustavě K. Necht' světelný signál dostihne bod x₂, y₂, z₂ této soustavy v čase t₂ (této soustavy). Signál se šíří rychlostí c, takže urazí vzdálenost c(t₂ - t₁). Tuto vzdálenost lze vyjádřit také jako

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2}.$$

V soustavě K tedy platí

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0.$$

V soustavě K' bylo vyslání světelného signálu zaregistrováno v bodě x'₁, y'₁, z'₁ v čase t'₁ a jeho dopad v bodě x'₂, y'₂, z'₂ v čase t'₂. Jelikož rychlost světla je v obou soustavách stejná (a rovna c), bude v K' — na základě obdobných argumentů — platit

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0.$$

S invariantností rychlosti světla tedy souvisí invariantnost výrazu

$$s^2 \equiv c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2. \quad \text{XIII(2.1)}$$

Novou transformaci, o níž byla řeč na konci předešlého článku, budeme hledat jako zobecnění Galileiovy transformace ve tvaru

$$x' = A(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = B(t - DVx). \quad \text{XIII(2.2)}$$

Koeficienty A, B, D určíme z XIII(2.1). Transformační vztahy XIII(2.2) dosadíme do XIII(2.1) a porovnáme koeficienty u odpovídajících členů. Vzniklé rovnice A² = c²B²D, c²B² - A²V² = k²c², A² - c²B²D²V² = k², kde k² je koeficient úměrnosti, mají řešení

$$D = \frac{1}{c^2}, \quad A^2 = B^2 = \frac{k^2}{1 - (V/c)^2}.$$

Jelikož při V = 0 má být x' = x, t' = t, je A = B = (1 - V²/c²)^{-1/2}. Hledaná transformace tedy zní

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma \left(t - \frac{Vx}{c^2} \right), \quad \text{XIII(2.3)}$$

kde

$$\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}. \quad \text{XIII(2.4)}$$

Rovnice XIII(2.3) představují slavnou Lorentzovu transformaci (H. A. LORENTZ, 1895). Řešením těchto rovnic dostaneme obrácenou transformaci

$$x = \gamma(x' + Vt'), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma \left(t' + \frac{Vx'}{c^2} \right). \quad \text{XIII(2.5)}$$

V obou případech se jedná o tzv. speciální Lorentzovu transformaci.

Při malých rychlostech V ≪ c se Lorentzova transformace XIII(2.3) redukuje na Galileiovu transformaci XIII(1.1).

Najdeme adiční teorém rychlostí pomocí Lorentzovy transformace. Z XIII(2.3) najdeme

$$dx' = \gamma(dx - V dt), \quad dt' = \gamma(dt - Vc^{-2} dx).$$

Vydělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V dt}{dt - c^{-2} V dx}.$$

Zavedeme-li rychlosti v obou soustavách v_x = dx/dt, v'_x = dx'/dt', dostaneme pak Einsteinův adiční teorém rychlostí

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - c^{-2} V v_x}. \quad \text{XIII(2.6)}$$

Pro zbývající dvě složky (dy'/dt') ≡ v'_y, (dz'/dt') ≡ v'_z dostaneme obdobně

$$v'_y = \gamma^{-1} \frac{v_y}{1 - c^{-2} V v_x}, \quad v'_z = \gamma^{-1} \frac{v_z}{1 - c^{-2} V v_x}. \quad \text{XIII(2.7)}$$

Při V ≪ c dostáváme Newtonův adiční teorém XIII(1.2), tj. v'_x = v_x - V, v'_y = v_y, v'_z = v_z. Rychlost světla se ve shodě s XIII(2.6) nemění. Položíme-li v_x = c, pak v'_x ≡ c' = c.

Veličina s² = c²t² - x² - y² - z² je tzv. *prostorčasový interval*. V diferenciální formě vyjádříme lorentzovskou invariantnost tohoto intervalu takto

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \text{invariant}. \quad \text{XIII(2.8)}$$

V pohybující se soustavě je ds² = c² dt'² - dx'² - dy'² - dz'². V soustavě pevně spojené s pohybujícími se hodinami je dx' = dy' = dz' = 0 a časový interval dt'. Z invariantnosti intervalu pak plyne

$$dt' = (1 - v^2/c^2)^{1/2} dt, \quad \text{XIII(2.9)}$$

kde

$$v = \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{XIII(2.10)}$$

je rychlost pohybujících se hodin.

Čas měřený v soustavě pohybující se společně s daným tělesem je tzv. *vlastní čas* tělesa. Rovnicí XIII(2.9) je vyjádřen vlastní čas pomocí času referenční soustavy (vůči níž se zkoumá pohyb). Vlastní čas budeme v dalším označovat symbolem τ , tj.

$$d\tau = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} dt. \quad \text{XIII(2.11)}$$

Vlastní čas je ve všech inerciálních soustavách stejný, tj. τ je lorentzovským invariantem.

XIII.3 Geometrická interpretace. Minkovského formalismus

Místo prostorových souřadnic x, y, z a času t zavedeme čtyřrozměrný prostor, v němž x, y, z, t značí

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ict = x_4. \quad \text{XIII(3.1)}$$

Prostorčasový interval XIII(2.6), popř. XIII(2.9) pak vyjádříme rovnicemi

$$-s^2 = x_\mu x_\mu, \quad \text{XIII(3.2)}$$

$$-ds^2 = dx_\mu dx_\mu. \quad \text{XIII(3.3)}$$

Zde řecké indexy probíhají hodnoty 1, 2, 3, 4 a přes dva stejné řecké indexy se provádí sumace od 1 do 4 bez explicitního vypisování sumačního znaku (Einsteinova sumační konvence). Malé *latinské* indexy budou nadále probíhat hodnoty 1, 2, 3 a budeme pro ně užívat stejnou sumační konvenci jako v předchozích kapitolách.

Veličiny x_1, x_2, x_3, x_4 určují polohu bodu (tzv. událost) ve čtyřrozměrném Minkovského prostoročase (H. MINKOVSKI, 1908).

V označení XIII(3.1) přepíšeme Lorentzovu transformaci XIII(2.2) takto

$$x'_1 = \gamma(x_1 + i\beta x_4), \quad x'_2 = x_2, \quad x'_3 = x_3, \quad x'_4 = \gamma(x_4 - i\beta x_1), \quad \text{XIII(3.4)}$$

kde jako dříve je $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Zavedeme matici $L_{\mu\nu}$ Lorentzovy transformace

$$L_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad \text{XIII(3.5)}$$

Lorentzovu transformaci prostoročasových souřadnic vyjádříme rovnicí

$$x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu. \quad \text{XIII(3.6)}$$

Vyjádříme $x'_\mu x'_\mu = L_{\mu\lambda} L_{\mu\nu} x_\lambda x_\nu$. Jelikož je $x'_\mu x'_\mu = x_\lambda x_\lambda = \delta_{\lambda\nu} x_\lambda x_\nu$, splňují koeficienty Lorentzovy transformace podmínku

$$L_{\mu\lambda} L_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\nu}. \quad \text{XIII(3.7)}$$

Na základě uvedených poznatků můžeme vytvářet další čtyřvektory. Jelikož ds , popř. $d\tau$ (vlastní čas) jsou lorentzovské invarianty (skaláry), bude

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \quad \text{XIII(3.8)}$$

čtyřvektorem. Při transformaci XIII(3.6) souřadnic se bude u_μ transformovat podle zákona

$$u'_\mu = L_{\mu\nu} u_\nu, \quad \text{XIII(3.9)}$$

tj. stejně jako souřadnice, a je tedy *čtyřvektorem*.

Přepíšeme XIII(3.8) pomocí „obyčejné“ rychlosti $v_j = dx_j/dt$. Čtyřvektor u_μ pak bude

$$u_\mu = \left(\frac{\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \frac{ic}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right). \quad \text{XIII(3.10)}$$

Při $v \ll c$ jsou prostorové složky $u_j = v_j$. To nás opravňuje interpretovat vektor u_μ jako *čtyřvektor rychlosti*. Z definice u_μ je zřejmé, že platí

$$u_\mu u_\mu = -1. \quad \text{XIII(3.11)}$$

V Newtonově mechanice je hybnost \mathbf{p} definována vztahem $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, resp. $p_j = mv_j$. V relativistické mechanice definujeme *čtyřvektor hybnosti* (m je klidová hmotnost částice)

$$p_\mu = mu_\mu, \quad \text{XIII(3.12)}$$

jenž s ohledem na XIII(3.1) je omezen podmínkou

$$p_\mu p_\mu = -m^2 c^2. \quad \text{XIII(3.13)}$$

Ve shodě s XIII(3.10) vyjádříme p_μ takto

$$p_\mu = \left(\frac{m\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \frac{imc}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \right). \quad \text{XIII(3.14)}$$

Prostorové složky p_j hybnosti jsou

$$p_j = \frac{mv_j}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad \text{XIII(3.15)}$$

Při $v \ll c$ je to známý Newtonův vztah pro hybnost. Význam čtvrté složky vektoru čtyřhybnosti najdeme takto: V analytické mechanice je hybnost \mathbf{p} určena pomocí lagrangiánu L vztahem $p_i = (\partial L / \partial v_i)$, resp. $\mathbf{p} = (\partial L / \partial \mathbf{v})$. Hybnosti XIII(3.15) pak odpovídá lagrangián

$$L = -mc^2(1 - v^2/c^2)^{1/2}. \quad \text{XIII(3.16)}$$

Hamiltonián H je určen vztahem $H = p_i v_i - L = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$, což dá pro energii $\mathcal{E} = H$ vyjádření

$$\mathcal{E} = H = \frac{mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad \text{XIII(3.17)}$$

Srovnáním s XIII(3.14) plyne, že čtvrtá komponenta p_4 hybnosti souvisí s energií \mathcal{E} vztahem

$$p_4 = i \frac{\mathcal{E}}{c}. \quad \text{XIII(3.18)}$$

Na základě toho přepíšeme vztah XIII(3.13) takto

$$\mathcal{E}^2 = c^2(p^2 + m^2 c^2). \quad \text{XIII(3.19)}$$

Veličina mc^2 je *klidová energie* částice.

Čtyřvektor zrychlení

$$a_\mu \equiv \frac{du_\mu}{d\tau} \equiv \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} \quad \text{XIII(3.20)}$$

je přirozeným zobecněním Newtonova $a_i = dv_i/dt$. Derivací vztahu XIII(3.11) se přesvědčíme o platnosti rovnice

$$u_\mu a_\mu = 0, \quad \text{XIII(3.21)}$$

vyjadřující *ortogonálnost* čtyřrychlosti a čtyřzrychlení. Podle toho je také *čtyřsíla*

$$F_\mu = ma_\mu = m \frac{du_\mu}{d\tau} \quad \text{XIII(3.22)}$$

kolmá na čtyřrychlost, což vyjadřuje rovnice

$$F_\mu u_\mu = 0. \quad \text{XIII(3.22')}$$

Zde jsme již použili zobecnění skalárního součinu $\mathbf{AB} = A_i B_i$. Skalárním součinem \mathbf{AB} dvou čtyřvektorů A_μ a B_μ nazýváme vztah

$$\mathbf{AB} \equiv A_\mu B_\mu = A_j B_j + A_4 B_4 \equiv \mathbf{AB} + A_4 B_4. \quad \text{XIII(3.23)}$$

Máme-li skalár $\psi(x_\mu) = \psi(x'_\mu)$, pak jeho derivací podle souřadnic x_ν dostaneme čtyřvektor

$$V_\nu \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}.$$

Snadno se přesvědčíme, že mezi veličinami V_ν a

$$V'_\mu \equiv \frac{\partial \psi}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\nu}{\partial x'_\mu} \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu}$$

platí

$$V'_\mu = L_{\mu\nu} V_\nu,$$

jelikož $(\partial x_\nu / \partial x'_\mu) = L_{\mu\nu}$. To dokazuje, že čtverice $(\partial \psi / \partial x_\nu)$ představuje složky čtyřvektoru.

Součiny komponent dvou čtyřvektorů

$$T_{\mu\nu} \equiv A_\mu B_\nu$$

se transformují následovně. Dosadíme $T'_{\mu\nu} \equiv A'_\mu B'_\nu$, $A'_\mu = L_{\mu\alpha} A_\alpha$, $B'_\nu = L_{\nu\lambda} B_\lambda$,

$$T'_{\mu\nu} \equiv A'_\mu B'_\nu = L_{\mu\alpha} L_{\nu\lambda} A_\alpha B_\lambda = L_{\mu\alpha} L_{\nu\lambda} T_{\alpha\lambda}.$$

Tenzorem druhého řádu nazýváme soubor veličin $T_{\mu\nu}$, které se při transformaci souřadnic $x'_\mu = L_{\mu\nu} x_\nu$ transformují podle zákona

$$T'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha} L_{\nu\lambda} T_{\alpha\lambda}. \quad \text{XIII(3.24)}$$

Podobně najdeme transformační zákon derivací $\partial A_\nu / \partial x_\mu$ čtyřvektoru. Ve vztazích

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\nu, \quad R'_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x'_\mu} A'_\nu$$

dosadíme

$$A'_\nu = L_{\nu\lambda} A_\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = L_{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}.$$

Dospějeme ke vztahu

$$R'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha} L_{\nu\lambda} R_{\alpha\lambda},$$

jenž dokazuje, že derivace $(\partial A_\nu / \partial x_\mu)$ tvoří čtyřtenzor druhého řádu.

V dalším výkladu budeme potřebovat antisymetrický tenzor druhého řádu

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} A'_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A'_\mu = -F_{\nu\mu}. \quad \text{XIII(3.25)}$$

Obecně má tenzor $4 \cdot 4 = 16$ komponent. Vztah XIII(3.25) pro $\mu \neq \nu$ dá $\binom{4}{2} = 6$ závislostí. Diagonální komponenty $F_{11} = F_{22} = F_{33} = F_{44} = 0$, takže zbývá $16 - (6 + 4) = 6$ nezávislých komponent.

Trojrozměrná hybnost \mathbf{p} a energie \mathcal{E} jsou složkami čtyřhybnosti p_μ . Tento čtyřvektor se transformuje podle zákona

$$p'_\mu = L_{\mu\nu} p_\nu.$$

Po dosazení za $L_{\mu\nu}$ z XIII(3.5) dostaneme

$$p'_1 = \gamma \left(p_1 - \beta \frac{\mathcal{E}}{c} \right), \quad p'_2 = p_2, \quad p'_3 = p_3, \quad \mathcal{E}' = \gamma(\mathcal{E} - \beta c p_1). \quad \text{XIII(3.26)}$$

Při úpravě jsme opětovně užili $cp_4 = i\mathcal{E}$, $cp'_4 = i\mathcal{E}'$.

Závěrem uvedeme ještě užitečný vztah pro objemový element čtyřprostoru

$$d\Omega \equiv d^4x \equiv dx_1 dx_2 dx_3 dx_4.$$

V čárkovaných souřadnicích je

$$d\Omega = dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)}.$$

Ze vztahů XIII(3.5) a XIII(3.6) se snadno přesvědčíme, že jacobíán je roven jedné, což vede k *invariantnosti objemového elementu čtyřprostoru*

$$d\Omega \equiv d^4x = d\Omega' \equiv d^4x'. \quad \text{XIII(3.27)}$$

Dá se dokázat (viz příklad XIII.13), že fáze $\mathbf{kr} - \omega t$ rovinné monochromatické vlny se při Lorentzově transformaci nemění. Jelikož $\mathbf{kr} \equiv k_\mu x_\mu$, musí být $\mathbf{kr} - \omega t$ skalárním součinem dvou čtyřvektorů k_μ , x_μ ,

$$\mathbf{kr} - \omega t = k_\mu x_\mu, \quad \text{XIII(3.28)}$$

kde *vlnový čtyřvektor*

$$k_\mu \equiv \left(\mathbf{k}, i \frac{\omega}{c} \right), \quad k_\mu k_\mu = 0. \quad \text{XIII(3.29)}$$

XIII.4 Čtyřpotenciál

a tenzor elektromagnetického pole

Naším nejbližším úkolem bude najít čtyřrozměrné analogie základních vektorů vyskytujících se v rovinách elektromagnetického pole ve vakuu.

Začneme s vektorem proudové hustoty. Množství náboje de je veličinou nezávislou na volbě referenčního systému. Vyjádříme de pomocí hustoty ρ a (třírozměrného) objemového elementu dV známým vztahem $de = \rho dV$. Po vynásobení této rovnice vektorem dx_μ máme

$$de dx_\mu = \rho dV dt \frac{dx_\mu}{dt}.$$

Levá strana je čtyřvektorem. Jelikož $dV dt$ je podle XII(3.27) invariantem,

veličiny $\rho dx_\mu/dt$ musí být složkami čtyřvektoru. Tento vektor označíme

$$j_\mu = \rho \frac{dx_\mu}{dt}. \quad \text{XIII(4.1)}$$

Aby nedošlo k přehlédnutí upozorňujeme, že zde je derivace dx_μ/dt , a nikoli $dx_\mu/d\tau$.

Čtyřvektor j_μ rozepíšeme na prostorovou a časovou část

$$j_\mu \equiv (\rho \mathbf{v}, i c \rho) \equiv (\mathbf{j}, i c \rho), \quad \text{XIII(4.2)}$$

kde $v_k = dx_k/dt$ jsou složky trojrozměrné rychlosti \mathbf{v} . Z vyjádření XIII(4.2) je vidět, že j_μ je *čtyřvektorem proudové hustoty elektrického náboje*; čtvrtá komponenta j_4 souvisí s hustotou ρ vztahem

$$j_4 = i c \rho. \quad \text{XIII(4.3)}$$

K těmto výsledkům lze dospět i následujícím způsobem. Zavedeme v rovnici kontinuity $(\partial \rho / \partial t) + (\partial j_k / \partial x_k) = 0$, $x_4 = i c t$, $j_4 = i c \rho$. Rovnice pak nabyde tvar

$$\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad \text{XIII(4.4)}$$

což značí, že čtyřdivergence $(\partial j_\mu / \partial x_\mu)$ vektoru j_μ je rovna nule.

Hustota ρ elektrického náboje a vektor \mathbf{j} proudové hustoty jsou tedy složkami čtyřvektoru j_μ . Při přechodu k novému lorentzovskému systému bude

$$j'_1 = \gamma(j_1 + i \beta j_4), \quad j'_4 = \gamma(-i \beta j_1 + j_4).$$

Po dosazení $j_4 = i c \rho$, $j'_4 = i c \rho'$ pak máme hledané vztahy

$$j'_1 = \gamma(j_1 - \rho V), \quad \rho' = \gamma \left(\rho - \frac{V}{c^2} j_1 \right). \quad \text{XIII(4.5)}$$

Komponenty $j'_2 = j_2$, $j'_3 = j_3$ se při transformaci XIII(3.4) nemění.

Z článku XIII.2 víme, že d'Alembertův operátor

$$\square \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \text{XIII(4.6)}$$

se při Lorentzově transformaci nemění. Zapišeme rovnice pro vektorový (\mathbf{A}) a skalární (Φ) potenciál elektromagnetického pole

$$\square \mathbf{A} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j}, \quad \square \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

V poslední rovnici dosadíme $i c \rho = j_4$, což dá

$$\square (c \mathbf{A}_k) = -\frac{1}{\epsilon_0 c} j_k, \quad \square (i \Phi) = -\frac{1}{\epsilon_0 c} j_4.$$

Obě rovnice sjednotíme tak, že místo \mathbf{A} a Φ zavedeme čtyřvektor potenciálu

$$\mathcal{A}_\mu \equiv (c\mathbf{A}, i\Phi), \quad \text{XIII(4.7)}$$

pro nějž pak platí rovnice

$$\square \mathcal{A}_\mu = -\frac{1}{\varepsilon_0 c} j_\mu. \quad \text{XIII(4.8)}$$

K vyjádření XIII(4.8) lze dospět také jinak. V Lorentzově podmínce

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \frac{\partial A_j}{\partial x_j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

zavedeme $\mathcal{A}_4 = i\Phi$, $x_4 = ict$. Lorentzova podmínka má pak tvar čtyřdivergence potenciálu \mathcal{A}_μ

$$\frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \quad \text{XIII(4.9)}$$

Aplikujeme operaci $\partial/\partial x_\mu$ na rovnici XIII(4.8). Budeme mít

$$\square \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\mu} \right) = -\frac{1}{\varepsilon_0 c} \left(\frac{\partial j_\mu}{\partial x_\mu} \right).$$

S ohledem na rovnici kontinuity XIII(4.4) je $\square(\partial \mathcal{A}_\mu/\partial x_\mu) = 0$. Tuto rovnici nejsnáze splníme tak, že položíme $(\partial \mathcal{A}_\mu/\partial x_\mu) = 0$. Rovnice XIII(4.4), XIII(4.8) a XIII(4.9) jsou tedy kompatibilní.

Víme, že vektor \mathbf{B} souvisí s (trojrozměrným) vektorovým potenciálem \mathbf{A} vztahem $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Složky vektoru $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ jsou složkami trojrozměrného antisymetrického tenzoru $(\partial A_k/\partial x_j) - (\partial A_j/\partial x_k)$. To nás přivádí na myšlenku zavést antisymetrický tenzor

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathcal{A}_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{A}_\mu = -F_{\nu\mu}. \quad \text{XIII(4.10)}$$

Prostorové komponenty F_{ij} jsou

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} (cA_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (cA_i) = c\epsilon_{ijk} B_k, \quad \text{XIII(4.11)}$$

a tedy speciálně

$$F_{32} = cB_1, \quad F_{31} = cB_2, \quad F_{12} = cB_3.$$

Vypočteme F_{4j} , což postupně dá

$$\begin{aligned} F_{4j} &= \frac{\partial}{\partial x_4} \mathcal{A}_j - \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{A}_4 = \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} (cA_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (i\Phi) = \\ &= i \left(-\frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \right) = iE_j, \end{aligned}$$

jelikož ve shodě s X(1.6) je $\mathbf{E} = -(\partial \mathbf{A}/\partial t) - \nabla \Phi$. Obecně je

$$F_{4j} = -F_{j4} = iE_j. \quad \text{XIII(4.12)}$$

Složkami tenzoru $F_{\mu\nu}$ jsou složky vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} elektromagnetického pole, proto se $F_{\mu\nu}$ nazývá *tenzorem elektromagnetického pole*. Pro přehlednost uvedeme explicitní vztah

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & cB_3, & -cB_2, & -iE_1 \\ -cB_3, & 0, & cB_1, & -iE_2 \\ cB_2, & -cB_1, & 0, & -iE_3 \\ iE_1, & iE_2, & iE_3, & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{XIII(4.13)}$$

Jelikož v definičním vztahu pro tenzor $F_{\mu\nu}$ vystupuje rozdíl derivací, můžeme potenciál \mathcal{A}_μ překalibrovat

$$\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}, \quad \text{XIII(4.14)}$$

aniž by se při tom změnil tenzor $F_{\mu\nu}$. Snadno se přesvědčíme, že

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathcal{A}'_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{A}'_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathcal{A}_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{A}_\mu,$$

a tedy

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad \text{XIII(4.15)}$$

Invariantnost tenzoru $F_{\mu\nu}$ vůči transformaci XIII(4.14) vyjadřuje *kalibrační* neboli *cejchovací invariantnost elektromagnetického pole*. V označení XIII(4.8) to značí

$$A'_j = A_j + \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial f}{\partial t},$$

což je známá forma kalibrační invariantnosti (viz čl. X.2).

Kalibrační funkci f můžeme zvolit tak, aby čtyřvektor \mathcal{A}_μ splňoval Lorentzovu podmínku XIII(4.9).

XIII.5 Transformace vektorů elektromagnetického pole

Jelikož \mathcal{A}_μ je čtyřvektor, komponenty \mathcal{A}'_μ v nové Lorentzově soustavě jsou

$$\mathcal{A}'_\mu = L_{\mu\nu} \mathcal{A}_\nu.$$

Z vyjádření XIII(3.5) a XIII(4.7) dostaneme

$$\mathcal{A}'_x = \gamma \left(\mathcal{A}_x - \frac{V}{c^2} \Phi \right), \quad \mathcal{A}'_y = \mathcal{A}_y, \quad \mathcal{A}'_z = \mathcal{A}_z,$$

$$\Phi' = \gamma(\Phi - V\mathcal{A}_x). \quad \text{XIII(5.1)}$$

Transformační vztahy vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} najdeme z toho, že složky vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} jsou složkami tenzoru $F_{\mu\nu}$. Podle transformačního zákona XIII(3.24) je $F'_{\mu\nu} = L_{\mu\alpha}L_{\nu\beta}F_{\alpha\beta}$. Tak pro $\mu = 1, \nu = 2$ je

$$F'_{12} = L_{1\alpha}L_{2\beta}F_{\alpha\beta}.$$

Podle XIII(3.5) z koeficientů $L_{2\lambda}$ je nenulový pouze $L_{22} = 1$, takže je

$$F'_{12} = L_{1\alpha}F_{\alpha 2} = L_{11}F_{12} + L_{14}F_{42}.$$

Po dosazení $L_{11} = \gamma, L_{14} = i\beta\gamma, F_{12} = cB_3, F_{42} = iE_2$ dospějeme ke vztahu $cB'_3 = (cB_3 - \beta E_2)$. Výpočet pro další komponenty je obdobný, proto uvedeme pouze výsledky

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - VB_z), \quad E'_z = \gamma(E_z + VB_y), \quad \text{XIII(5.2)}$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma \left(B_y + \frac{V}{c^2} E_z \right), \quad B'_z = \gamma \left(B_z - \frac{V}{c^2} E_y \right). \quad \text{XIII(5.3)}$$

Při malých rychlostech $V \ll c$ se poslední vzorec zjednoduší, jelikož lze položit $\gamma \approx 1$, což dá

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = -VB_z + E_y, \quad E'_z = E_z + VB_y, \quad \text{XIII(5.4)}$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = B_y + \frac{V}{c^2} E_z, \quad B'_z = B_z - \frac{V}{c^2} E_y. \quad \text{XIII(5.5)}$$

Tyto vztahy lze vyjádřit ve vektorové formě

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + [\mathbf{V}, \mathbf{B}], \quad \text{XIII(5.6)}$$

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} - [\mathbf{V}, \mathbf{E}]. \quad \text{XIII(5.7)}$$

XIII.6 Kovariantní tvar Lorentzovy síly

Hybnost relativistické částice souvisí s její (klidovou) hmotností m a rychlostí \mathbf{v} vztahem XIII(3.15), tj.

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \quad \text{XIII(6.1)}$$

Lorentzova síla pak souvisí s časovou změnou hybnosti

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]). \quad \text{XIII(6.2)}$$

Pro i -tou složku máme

$$\frac{dp_i}{dt} = e(E_i + e_{ijk}v_j B_k).$$

Místo E_i a B_k zavedeme pomocí vztahů XIII(4.11) a XIII(4.12) složky elektromagnetického tenzoru. Po dosazení $e_{ijk}B_k = c^{-1}F_{ij}$, $E_i = +iF_{i4}$ bude platit

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{e}{c} (icF_{i4} + F_{ij}v_j). \quad \text{XIII(6.3)}$$

Rovnici vydělíme faktorem $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, zavedeme vlastní čas $d\tau = dt(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ ve shodě s XIII(2.12) a nakonec složky čtyřrychlosti

$$u_j = \frac{v_j}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \quad u_4 = \frac{ic}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}.$$

Místo rovnice XIII(6.3) tak dostaneme

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{i\nu}u_\nu.$$

To nás přivádí ke čtyřrozměrnému zobecnění Lorentzovy síly, resp. ke kovariantnímu zápisu pohybové rovnice

$$m \frac{du_\mu}{d\tau} = \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu}u_\nu. \quad \text{XIII(6.4)}$$

Prostorové složky ($\mu = i = 1, 2, 3$) určují Lorentzovu sílu XIII(6.2). Najdeme význam čtvrté komponenty rovnice XIII(6.4). Položíme $\mu = 4$ a p_4 vyjádříme vztahem XIII(3.18) pomocí energie $p_4 = i\mathcal{E}/c$. Získáme tak rovnice

$$\frac{i}{c} \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{4\nu}u_\nu = \frac{ie}{c} \frac{E_j v_j}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}.$$

Při úpravě jsme vyjádřili F_{4j} pomocí XIII(4.13) a místo u_j jsme zavedli rychlost v_j vztahem XIII(3.10).

Vzniklá rovnice

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e(\mathbf{E}\mathbf{v})$$

představuje výkon elektromagnetických sil. Ve skutečnosti je to výkon elektrické složky Lorentzovy síly, jelikož magnetická složka $e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ je kolmá na rychlost \mathbf{v} ; je tedy $\mathbf{v} \cdot [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = 0$, čímž je vyjádřeno, že magnetická část Lorentzovy síly nevykonává práci.

Ke kovariantnímu vyjádření XIII(6.4) Lorentzovy síly lze dospět i následující úvahou. Složky čtyřsíly jsou rovny $dp_\mu/d\tau$. Tyto složky máme vyjádřit pomocí

rychlosti \mathbf{v} částice a vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} elektromagnetického pole. Vektory \mathbf{E} , \mathbf{B} jsou složkami tenzoru elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$. Jelikož $F_{\mu\nu}$ je tenzor druhého řádu a u_ν je čtyřvektor, veličiny $F_{\mu\nu}u_\nu$ se při Lorentzově transformaci transformují jako složky čtyřvektoru. To nás opravňuje položit

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \text{konst} \cdot F_{\mu\nu}u_\nu. \quad \text{XIII(6.5)}$$

Multiplikační konstantu lze určit z libovolného speciálního případu. Vezmeme situaci, kdy na částici působí pouze elektrické pole. Složky F_{ij} jsou pak rovny nule a z rovnice XIII(6.5) plyne

$$\frac{dp_j}{d\tau} = \text{konst} \cdot F_{j\nu}u_\nu = \text{konst} \cdot (-iE_ju_4).$$

Po dosazení $u_4 = ic(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ je

$$\frac{dp_j}{dt} = \text{konst} \cdot cE_j.$$

Jelikož je $(dp_j/dt) = eE_j$, musí být $\text{konst} = e/c$ ve shodě s XIII(6.4).

Poznamenejme ještě, že vztah XIII(3.22) je pro Lorentzovu sílu splněn identicky, jelikož

$$F_{\mu\nu}u_\mu u_\nu \equiv 0.$$

XIII.7 Kovariantní tvar rovnic elektromagnetického pole

Naším nejbližším úkolem je přepsat rovnice elektromagnetického pole pomocí tenzoru elektromagnetického pole.

Tenzor $F_{\mu\nu}$ souvisí se čtyřpotenciálem $\mathcal{A}_\mu \equiv (c\mathbf{A}, i\Phi)$ vztahem XIII(4.10). Z definice tohoto tenzoru plyne platnost identity

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} F_{\mu\nu} + \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_{\nu\lambda} + \frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\lambda\mu} \equiv 0. \quad \text{XIII(7.1)}$$

Důkaz je elementární. Po dosazení za $F_{\mu\nu}$, $F_{\nu\lambda}$, $F_{\lambda\mu}$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathcal{A}_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{A}_\mu \right) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{A}_\lambda - \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{A}_\nu \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\lambda} \mathcal{A}_\mu - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathcal{A}_\lambda \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Rovnice XIII(7.1) představují celkem $4^3 = 64$ rovnic. Antisymetrie tenzoru $F_{\mu\nu}$ přivádí však k tomu, že nezávislé jsou pouze čtyři rovnice. Vezmeme $\lambda = 1$, $\mu = 2$,

$\nu = 3$ a pro $F_{\mu\nu}$ uijeme hodnoty dané vztahem XIII(4.13). Dospějeme pak ke vztahu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} F_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2} F_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3} F_{12} = \\ = c \left[\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} \right] = c \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned}$$

Podobně volba $\lambda = i$, $\mu = j$, $\nu = 4$ vede k rovnici

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F_{j4} + \frac{\partial}{\partial x_j} F_{4i} + \frac{\partial}{\partial x_4} F_{ij} = 0.$$

Složky F_{j4} a F_{4i} vyjádříme pomocí XIII(4.12) a F_{ij} pomocí XIII(4.11). Dostaneme tak soustavu rovnic

$$\frac{\partial E_j}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_j} + e_{ijk} \frac{\partial B_k}{\partial t} = 0,$$

jež vyjadřuje Faradayův indukční zákon $\operatorname{rot} \mathbf{E} + (\partial \mathbf{B} / \partial t) = 0$ ve složkovém zápisu.

Rovnice XIII(7.1) tedy zastupují sérii Maxwellových rovnic

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad \text{XIII(7.1')}$$

Rovnice XIII(4.8) pro čtyřpotenciál \mathcal{A}_μ lze snadno přepsat pomocí tenzoru $F_{\mu\nu}$. Vypočteme divergenci tenzoru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathcal{A}_\nu - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{A}_\mu \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{A}_\nu}{\partial x_\nu} \right) - \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x_\nu} \mathcal{A}_\mu = -\square \mathcal{A}_\mu, \end{aligned}$$

jelikož $(\partial \mathcal{A}_\nu / \partial x_\nu) = 0$ (Lorentzova podmínka XIII(4.9)) a $(\partial^2 / \partial x_\nu \partial x_\nu) = \square$ je d'Alembertův operátor.

Dospěli jsme tak k závěru, že rovnice XIII(4.8) lze nahradit rovnicemi pro tenzor elektromagnetického pole

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{c\epsilon_0} j_\mu, \quad \text{XIII(7.2)}$$

jež jsou kovariantním zápisem rovnic

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j}. \quad \text{XIII(7.2')}$$

Výhodou kovariantního zápisu XIII(7.2) je to, že tyto rovnice obsahují pouze

tenzor $F_{\mu\nu}$, a jsou tedy evidentně kalibračně invariantní. Kromě toho jsou tyto rovnice očividně kompatibilní s rovnicí kontinuity. Zapůsobíme-li na XIII(7.2) operátorem $\partial/\partial x_\mu$ (a sečítáme přes μ), je pak

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{c\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu.$$

Levá strana je identicky rovna nule, jelikož $(\partial^2/\partial x_\mu \partial x_\nu) = (\partial^2/\partial x_\nu \partial x_\mu)$ je symetrický tenzorový operátor a $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ je antisymetrický tenzor. Je tedy $(\partial j_\mu/\partial x_\mu) = 0$.

Rovnice XIII(7.1) lze přepsat pomocí tzv. duálního tenzoru $\tilde{F}_{\alpha\lambda} = e_{\alpha\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu}$, kde $e_{\alpha\lambda\mu\nu}$ je úplně antisymetrický tenzor čtvrtého řádu (obdoba tenzoru e_{ijk})

$$e_{\alpha\lambda\mu\nu} = \text{Sign}[(\lambda - \kappa)(\mu - \kappa)(\nu - \kappa)(\mu - \lambda)(\nu - \lambda)(\nu - \mu)] \quad \text{XIII(7.3)}$$

kde $\text{Sign } z$ je znaménková funkce

$$\text{Sign } z = \begin{cases} 1 & \text{pro } z > 0, \\ \leq 0 & \text{pro } z = 0, \\ -1 & \text{pro } z < 0. \end{cases} \quad \text{XIII(7.4)}$$

Z formálních důvodů se zavádí numerický faktor $-i/2$, tj.

$$G_{\alpha\lambda} = -\frac{i}{2} e_{\alpha\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu} = -G_{\lambda\alpha}. \quad \text{XIII(7.5)}$$

Soustavu XIII(7.1) můžeme vyjádřit pomocí duálního tenzoru ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x_\lambda} G_{\alpha\lambda} = 0, \quad \text{XIII(7.6)}$$

jenž představuje čtyřdivergenci tenzoru $G_{\alpha\lambda}$, a tedy čtyřvektor. Ze zápisu XIII(7.6) je vidět, že soustava XIII(7.1) reprezentuje čtyři nezávislé rovnice.

Rovnice XIII(7.6) tedy vyjadřují, že čtyřvektor

$$g_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\lambda} G_{\alpha\lambda} \quad \text{XIII(7.7)}$$

je roven nule, $g_\alpha = 0$. Čtvrtá komponenta $g_4 = 0$ odpovídá rovnici $\text{div } \mathbf{B} = 0$, což vyjadřuje neexistenci izolovaných magnetických nábojů. Rovnici XIII(7.6) pak můžeme vyslovit jako neexistenci čtyřproudu g_α izolovaných magnetických nábojů. Zobecnění Maxwellových rovnic XIII(7.6) na případ existence izolovaných magnetických nábojů je tak přímočaré. K této problematice se ještě krátce vrátíme v čl. XIII.16.

XIII.8 Invarianty elektromagnetického pole

Elektromagnetické pole jsme charakterizovali čtyřpotenciálem \mathcal{A}_μ , popř. tenzorem

$F_{\mu\nu}$ elektromagnetického pole. Z těchto veličin lze tvořit různé invarianty, jejichž znalost je potřebná při odvozování kovariantních rovnic pole.

Z vektoru \mathcal{A}_μ lze vytvořit skalár $S_0 = \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\mu$, tj. kvadrát délky čtyřvektoru

$$S_0 = \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\mu = c^2 \mathbf{A}^2 - \Phi^2. \quad \text{XIII(8.1)}$$

Tato veličina je sice invariantní vůči Lorentzově transformaci, není však invariantní vůči kalibrační transformaci XIII(4.14), a nemůže být proto vhodným invariantem pro elektromagnetické pole, jelikož rovnice elektromagnetického pole jsou kalibračně invariantní.

Požadavkům kalibrační invariantnosti vyhovuje tenzor $F_{\mu\nu} = (\partial \mathcal{A}_\nu / \partial x_\mu) - (\partial \mathcal{A}_\mu / \partial x_\nu)$. Z každého tenzoru lze vytvořit lineární invariant — součet diagonálních elementů. V daném případě je však tento invariant $F_{\mu\mu}$ roven nule identicky, a nemá tak fyzikální význam.

Skalárem je součet kvadrátů komponent tenzoru, tj.

$$S = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad \text{XIII(8.2)}$$

Lorentzovská i kalibrační invariantnost tohoto výrazu je očividná. Po dosazení za $F_{\mu\nu}$ z rovnice XIII(4.13) dostaneme

$$S = 2(F_{12}^2 + F_{13}^2 + F_{14}^2 + F_{23}^2 + F_{24}^2 + F_{34}^2),$$

tj.

$$S = F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(c^2 \mathbf{B}^2 - E^2). \quad \text{XIII(8.3)}$$

Z článku II.7 víme, že při prostorové inverzi $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ je $\mathbf{E}' = -\mathbf{E}$, $\mathbf{B}' = +\mathbf{B}$. Z toho plyne, že S je pravým skalárem a respektuje tedy invariantnost elektromagnetických jevů vůči prostorové inverzi.

Víme, že v rovinné elektromagnetické vlně je $E^2 = c^2 B^2$, tj. $S = 0$. Tato vlastnost se zachovává v libovolném Lorentzově systému.

V dalším budeme potřebovat derivace

$$D_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial S}{\partial (\partial \mathcal{A}_\nu / \partial x_\mu)} \equiv \frac{\partial S}{\partial (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu)}. \quad \text{XIII(8.4)}$$

Zde jsme užili úsporné notace

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}. \quad \text{XIII(8.5)}$$

Vypočteme variaci

$$\delta S = 2F_{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} = 2F_{\mu\nu} \delta (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu).$$

Ve druhém členu $F_{\mu\nu} \delta (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu)$ vzájemně vyměníme indexy $\mu \leftrightarrow \nu$, což dá

$$F_{\mu\nu} \delta (\partial_\nu \mathcal{A}_\mu) = F_{\nu\mu} \delta (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu) = -F_{\mu\nu} \delta (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu).$$

Je tedy

$$\delta S \equiv \delta(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = 4F_{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu). \quad \text{XIII(8.6)}$$

Odtud plyne vztah

$$D_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial S}{\partial(\partial_\mu \mathcal{A}_\nu)} = 4F_{\mu\nu}. \quad \text{XIII(8.7)}$$

Ze složek tenzoru $F_{\mu\nu}$ lze vytvořit lorentzovsky invariantní výraz

$$-iP \equiv e_{\lambda\mu\nu} F_{\lambda\mu} F_{\nu\lambda}. \quad \text{XIII(8.8)}$$

Součin $F_{\lambda\mu} F_{\lambda\mu}$ je tenzor čtvrtého řádu, jenž v kontrakci s tenzorem $e_{\lambda\mu\nu}$ dá lorentzovsky i kalibračně invariantní veličinu. V součtu XIII(8.8) dají nenulový příspěvek pouze členy s $\kappa \neq \lambda \neq \mu \neq \nu$, což výpočet značně zjednodušuje. Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$P = 2c(\mathbf{EB}). \quad \text{XIII(8.9)}$$

Kolmost vektorů $\mathbf{EB} = 0$ se při Lorentzově transformaci zachovává.

Z článku II.7 víme, že \mathbf{E} je polárním a \mathbf{B} axiálním vektorem. Při prostorové inverzi je tedy $P' = -P$, což dokazuje pseudoskalární charakter veličiny P .

Místo vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} lze zavést komplexní vektor

$$\mathbf{F} = c\mathbf{B} - i\mathbf{E}, \quad \text{XIII(8.10)}$$

jehož kvadrát

$$F^2 = (c^2 B^2 - E^2) - 2ic(\mathbf{EB})$$

obsahuje oba lorentzovské i kalibrační invarianty S a P .

XIII.9 Variační princip pro pole

V mechanice odvozujeme pohybové rovnice z Hamiltonova variačního principu, jenž praví, že pro každý reálný pohyb je akční funkcionál

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}) dt \quad \text{XIII(9.1)}$$

stacionární

$$\delta S = 0. \quad \text{XIII(9.2)}$$

Při odvození Eulerových—Lagrangeových rovnic

$$\frac{\delta L}{\delta q_\kappa} \equiv -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\kappa} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_\kappa} = 0 \quad \text{XIII(9.3)}$$

z XIII(9.2) se předpokládá, že variace δq_κ souřadnice je na hranicích intervalu

rovna nule, tj.

$$\delta q_\kappa = 0 \quad \text{při } t = t_0 \quad \text{a} \quad t = t_1. \quad \text{XIII(9.4)}$$

Obdobně budeme postupovat i při odvozování rovnic pole z variačního principu. Budeme požadovat, aby akční funkcionál byl lorentzovsky invariantní. Objemový element čtyřprostoru $d\Omega \equiv d^3r dt$ je invariantem Lorentzovy transformace (viz čl. XIII.3), proto zavedeme akční funkcionál

$$S = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) d\Omega, \quad \text{XIII(9.5)}$$

kde

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \quad \text{XIII(9.6)}$$

je lorentzovským invariantem. Akční funkcionál XIII(9.5) je tak očividně lorentzovsky invariantní, jelikož je invariantní jak integrand \mathcal{L} , tak objemový element $d\Omega$ (míra čtyřsvěta).

Zavedeme variaci

$$\delta \varphi(x) \equiv \varphi'(x) - \varphi(x), \quad \text{XIII(9.7)}$$

což je obdoba variace z mechaniky $\delta q(t) = q'(t) - q(t)$. Symbolem (x) je označen čtyřvektor $x \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Hamiltonův princip je vyjádřen stacionaritou akčního funkcionálu

$$\delta S = \int_{\Omega} \delta \mathcal{L} d\Omega = 0, \quad \text{XIII(9.8)}$$

kde variace $\delta \mathcal{L}$ je určena rovnicí

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi). \quad \text{XIII(9.9)}$$

Je to obdobný vztah jako v analytické mechanice, kde je

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}.$$

Dříve než přejdeme k úpravě XIII(9.9), vyjasníme smysl veličiny \mathcal{L} . Integrál

$$L = \int \mathcal{L} d^3r \quad \text{XIII(9.10)}$$

dosazen do XIII(9.5) ukazuje, že akční funkcionál je

$$S = \int L dt,$$

a tedy \mathcal{L} má význam objemové hustoty lagrangiánu.

Z vyjádření XIII(9.7) je vidět, že operace derivace a variace jsou záměnné (komutativní)

$$\partial_\mu(\delta \varphi) = \partial_\mu \varphi'(x) - \partial_\mu \varphi(x) = \delta(\partial_\mu \varphi). \quad \text{XIII(9.11)}$$

Pomocí tohoto vztahu, jenž je obdobou mechanického vztahu $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q$, dostaneme

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} \delta\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\delta\varphi) = \\ &= \delta\varphi \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right] + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi \right). \end{aligned} \quad \text{XIII(9.12)}$$

Tento vztah dosadíme do XIII(9.8), čímž dostaneme

$$\int_\Omega \delta\varphi \cdot \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) \right] d\Omega + \int \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi \right) d\Omega = 0.$$

Poslední integrál převedeme pomocí Gaussovy věty

$$\int_\Omega \frac{\partial V_\mu}{\partial x_\mu} d\Omega = \oint V_\mu ds_\mu,$$

což v daném případě dá

$$\int \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi \right) d\Omega = \oint \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \delta\varphi \right) ds_\mu.$$

Je-li na hranicích integrační oblasti

$$\delta\varphi = 0 \quad \text{na nadploše } s_\mu,$$

pak je

$$\int \delta\varphi \cdot \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) \right] d\Omega = 0,$$

což s ohledem na libovolnost variace $\delta\varphi$ implikuje

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi)} \right) = 0. \quad \text{XIII(9.13)}$$

To jsou *Eulerovy—Lagrangeovy rovnice* pro variační úlohu XIII(9.8). Má-li pole více komponent φ_K , $K = 1, 2, \dots, N$, pak je

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\varphi_K} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_K} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_K)} \right) = 0. \quad \text{XIII(9.14)}$$

Tyto rovnice platí pro libovolné pole φ_K , $K = 1, 2, \dots, N$. Stačí dosadit Lagrangeovu hustotu \mathcal{L} a provést derivace podle rovnice XIII(9.14). Specifikací tohoto problému pro elektromagnetické pole se budeme zabývat v dalším článku.

Poznámka: Z analytické mechaniky je známo, že dva lagrangiany L a L' , jež se liší o úplnou časovou derivaci df/dt libovolné funkce, vedou ke stejným pohybovým rovnicím. Lagrangiany L a $L' = L + (df/dt)$ jsou tedy ekvivalentní.

Obdobně se přesvědčíme, že Lagrangeovy hustoty \mathcal{L} a \mathcal{L}' lišící se o čtyřdivergenci $\partial f_\mu/\partial x_\mu$ jsou ekvivalentní. Lagrangeova hustota

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu f_\mu \quad \text{XIII(9.15)}$$

vede ke stejným rovnicím jako \mathcal{L} . Akční funkcionál

$$S' = \int \mathcal{L}' d\Omega = \int \mathcal{L} d\Omega + \int d\Omega \partial_\mu f_\mu$$

upravíme pomocí Gaussovy věty na tvar

$$S' = S + \oint f_\mu ds_\mu.$$

Na nadploše integrál vymizí, popř. dá konstantu, což se vztahem $\delta S' = \delta S = 0$ dokazuje uvedené tvrzení.

Doposud jsme předpokládali, že lagrangian obsahuje derivace nejvýše prvního řádu. Příslušné Eulerovy—Lagrangeovy rovnice XIII(9.3) a XIII(9.14) jsou pak rovnicemi nejvýše druhého řádu.

Snadno se najde zobecnění pro případ, kdy lagrangian obsahuje derivace vyšších řádů. Je-li v mechanice

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, \ddot{q}) dt, \quad \text{XIII(9.16)}$$

pak stacionárnost akčního funkcionálu $\delta S = 0$ vede k rovnicím

$$\frac{\partial L}{\partial q_K} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_K} = 0. \quad \text{XIII(9.17)}$$

Při tom se předpokládá, že variace trajektorie a variace rychlosti jsou na hranicích intervalu nulové

$$\delta q_K = 0, \quad \delta \dot{q}_K = 0 \quad \text{při } t = t_0 \quad \text{a} \quad t = t_1.$$

Zobecnění na případ derivací vyšších než druhého řádu je přímočaré, proto je nebudeme provádět.

Mějme Lagrangeovu hustotu, jež obsahuje derivace nejvýše druhého řádu, tj.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_K, \partial_\mu \varphi_K, \partial_\mu \partial_\nu \varphi_K). \quad \text{XIII(9.18)}$$

Zde je zkrácený symbol $\partial_\mu \partial_\nu \varphi_K = (\partial^2 \varphi_K / \partial x_\mu \partial x_\nu)$. Budeme dále předpokládat, že na hranicích oblasti Ω jsou nulové variace $\delta\varphi_K$ a variace jejich prvních derivací $\delta(\partial_\mu \varphi_K)$, tj. $\delta\varphi_K = 0$, $\delta(\partial_\mu \varphi_K) = 0$ na hranicích Ω . Ze stacionárnosti $\delta S = 0$ akčního funkcionálu

$$S = \int_\Omega \mathcal{L}(\varphi_K, \partial_\mu \varphi_K, \partial_\mu \partial_\nu \varphi_K) d\Omega \quad \text{XIII(9.19)}$$

se místo XIII(9.14) získají rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_K} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu \varphi_K} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_K)} \right) = 0. \quad \text{XIII(9.20)}$$

XIII.10 Odvození Maxwellových rovnic z variačního principu

K* odvození rovnic elektromagnetického pole potřebujeme znát Lagrangeovu hustotu \mathcal{L} . Tuto funkci \mathcal{L} budeme hledat pomocí následujících požadavků:

1. Lagrangeova hustota musí být lorentzovsky invariantní.
2. Invariantnost vůči operaci prostorové inverze.
3. Invariantnost vůči kalibrační transformaci.
4. Lagrangeova hustota má vést k lineárním rovnicím (nejvýše) druhého řádu.

K těmto postulátům je nutno připojit několik poznámek. První z nich je vůdčím principem současné fyziky, není proti němu ani jediného průkazného argumentu, proto jej budeme přijímat bez výhrad.

Invariantnost přírodních zákonů vůči prostorové inverzi není obecně platným zákonem. Je známo, že při tzv. slabých interakcích (např. při rozpadu beta) je tato invariantnost narušena. V klasické elektrodynamice budeme platnost tohoto postulátu pokládat za experimentálně prokázanou.

Kalibrační invariantnost souvisí s invariantností vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} vůči kalibrační transformaci, a tedy s jednoznačností Lorentzovy síly $\mathbf{F} = e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$ působící na částici. Z těchto (a řady dalších) důvodů budeme požadavek kalibrační invariantnosti pokládat za oprávněný.

Linearita rovnic souvisí s principem superpozice: součet (obecně lineární kombinace) dvou řešení je opět řešením. Tuto vlastnost mají pouze lineární homogenní rovnice. Je však třeba říci, že takové skládání (superponování) polí je experimentálně dokázáno pouze pro nepříliš silná pole; při silných polích může být tento princip narušen. Podobně je tomu s požadavkem řádu výsledných rovnic, jenž má svůj původ v tom, že osvědčené fyzikální rovnice jsou nejvýše rovnicemi druhého řádu. U rychle proměnných polí může být tento požadavek příliš omezujícím. O některých možnostech, jež plynou z opuštění čtvrtého postulátu, pojednáme na jiných místech (viz články XIII.14 a XIII.15).

Zde budeme pokládat postuláty 1 až 4 za splněné a na základě nich budeme hledat rovnice elektromagnetického pole.

Z vektoru \mathcal{A}_μ lze vytvořit invariant $S_0 \equiv \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\mu$, jenž však nevyhovuje požadavku kalibrační invariantnosti, proto jej nutno vyloučit. Z tenzoru $F_{\mu\nu}$ lze vytvořit pravý skalár (viz čl. XIII.8)

$$\mathcal{L}_0 = k F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad \text{XIII(10.1)}$$

kde k je vhodný numerický faktor, který zvolíme v souladu s použitou soustavou jednotek.

Lorentzovský invariant $e_{\alpha\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}$ vyhovuje postulátům 1, 2 a 4 (viz čl. XIII.8); pro narušení druhého postulátu nebudeme tento člen uvažovat.

Člen XIII(10.1) obsahuje derivace $\partial_\mu \mathcal{A}_\nu$ kvadraticky, takže Eulerovy—Lagrangeovy rovnice XIII(9.14) povedou k lineárním rovnicím druhého řádu.

Jsou-li v prostoru elektrické náboje a proudy (charakterizované čtyřvektorem j_μ), je nutno Lagrangián doplnit (mimo lagrangiánu proudů) o interakci těchto proudů s elektromagnetickým polem. Tento člen najdeme následující úvahou. Klidový náboj q dV nabude v potenciálovém poli Φ energii $q\Phi$ dV. Hustota této interakční energie dá do Lagrangeovy hustoty příspěvek s opačným znaménkem, tj. $-q\Phi$ dV. Zavedeme-li $\mathcal{A}_4 = i\Phi$, $j_4 = ic\rho$, bude pro elektrické pole

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{c} j_4 \mathcal{A}_4.$$

To nás opravňuje položit

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{c} j_\mu \mathcal{A}_\mu. \quad \text{XIII(10.2)}$$

Tato tzv. *interakční hustota lagrangiánu* popisuje interakci elektrických proudů s elektromagnetickým polem. Jedná se v podstatě (až na numerický faktor $1/c$) o skalární součin dvou čtyřvektorů j_μ , \mathcal{A}_μ , což je Lorentzův skalár. Zavedeme-li \mathcal{A}_μ podle XIII(4.7) a j_μ podle XIII(4.2), bude

$$\mathcal{L}' = \mathbf{jA} - q\Phi. \quad \text{XIII(10.3)}$$

Člen \mathbf{jA} jsme již použili při výpočtu energie magnetického pole. Lagrangeova hustota \mathcal{L}' má tedy požadované vlastnosti a souhlasí s výsledky získanými jinou cestou.

Zvláštní zmiňky zasluhuje kalibrační invariantnost interakčního lagrangiánu \mathcal{L}' , jelikož se v něm explicitně vyskytuje čtyřpotenciál \mathcal{A}_μ . Při kalibraci $\mathcal{A}'_\mu = \mathcal{A}_\mu + \partial_\mu f$ se změní hustota interakčního lagrangiánu

$$\mathcal{L}'' = \frac{1}{c} j_\mu \mathcal{A}'_\mu = \frac{1}{c} j_\mu \mathcal{A}_\mu + \frac{1}{c} j_\mu \partial_\mu f.$$

Jelikož $\partial_\mu j_\mu = 0$, je také $j_\mu \partial_\mu f = \partial_\mu (j_\mu f)$, a tudíž

$$\mathcal{L}'' = \mathcal{L}' + \partial_\mu F,$$

kde $F_\mu = \frac{1}{c} j_\mu f$ je čtyřvektor. Lagrangiány \mathcal{L}' a \mathcal{L}'' se liší o čtyřdivergenci (viz čl. XIII.9) vektoru, a vedou tedy ke stejným rovnicím. Z toho plyne, že \mathcal{L}' vyhovuje všem čtyřem požadavkům.

Celkovou Lagrangeovu hustotu vezmeme jako součet XIII(10.1) a XIII(10.2), tj.

$$\mathcal{L} = kF_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} j_{\mu} \mathcal{A}_{\mu}. \quad \text{XIII(10.4)}$$

Pohybové rovnice určíme z Eulerových—Lagrangeových rovnic XIII(9.14), v nichž položíme $\varphi_K = \mathcal{A}_{\mu}$. Je tedy

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_{\mu}} - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \mathcal{A}_{\mu})} \right) = 0. \quad \text{XIII(10.5)}$$

První člen se vypočte jednoduše $(\partial \mathcal{L} / \partial \mathcal{A}_{\mu}) = j_{\mu} / c$; k výpočtu $\partial \mathcal{L} / \partial (\partial_{\nu} \mathcal{A}_{\mu})$ užitíme vztahu XIII(8.7), což dá

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \mathcal{A}_{\mu})} = 4kF_{\nu\mu} = -4kF_{\mu\nu}.$$

Z rovnice XIII(10.5) pak dostaneme

$$\partial_{\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{4kc} j_{\mu}.$$

Porovnání s XIII(7.2) ukazuje, že v soustavě SI je nutno položit $-4kc = c\epsilon_0$, tj. $k = -\epsilon_0/4$.

S ohledem na reference uvedeme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \epsilon_0 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{c} j_{\mu} \mathcal{A}_{\mu}, \quad \text{XIII(10.6)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \mathcal{A}_{\mu})} = \epsilon_0 F_{\mu\nu}. \quad \text{XIII(10.7)}$$

K rovnicím

$$\partial_{\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{c\epsilon_0} j_{\mu}$$

nutno připojit ještě rovnice XIII(7.6), tj.

$$e_{\alpha\mu\nu} \partial_{\lambda} F_{\mu\nu} = 0,$$

jež plynou přímo z definice tenzoru $F_{\mu\nu}$.

XIII.11 Teorém Emmy Noetherové

V analytické mechanice se kromě izochronních (stejno-časových) variací

$$\delta q = q'(t) - q(t)$$

vyšetřují i anizochronní (různě-časové) variace

$$\Delta q = q'(t') - q(t).$$

V teorii pole jsou obdobou těchto variací veličiny

$$\delta f = f'(x) - f(x), \quad \text{XIII(11.1)}$$

$$\Delta f = f'(x') - f(x). \quad \text{XIII(11.2)}$$

Zde x je zkrácené označení polohového vektoru (bodu) v Minkovského prostoru. Položíme-li $x' = x + \delta x$ a rozvineme $f'(x + \delta x)$, dostaneme

$$\Delta f = f'(x) - f(x) + \left(\frac{\partial f'}{\partial x'_{\nu}} \right)_0 \delta x_{\nu},$$

což s přesností do δx_{ν} dá vztah mezi oběma variacemi

$$\Delta f = \delta f + \frac{\partial f}{\partial x_{\nu}} \delta x_{\nu}. \quad \text{XIII(11.3)}$$

Aplikací tohoto vztahu na Lagrangeovu hustotu \mathcal{L} dostáváme

$$\Delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\nu}} \delta x_{\nu}, \quad \text{XIII(11.4)}$$

kde $\delta \mathcal{L}$ je (lokální) variace určena rovnicí XIII(8.12).

V dalším výkladu budeme uvažovat pouze takové variace (transformace) souřadnic, při nichž

$$\partial_{\nu} (\delta x_{\nu}) = 0, \quad \text{XIII(11.5)}$$

takže je

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_{\nu}} \delta x_{\nu} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} (\mathcal{L} \delta x_{\nu}).$$

Celková variace $\Delta \mathcal{L}$ vlivem variace $\delta \varphi$ polí a souřadnic δx_{ν} je určena rovnicí

$$\Delta \mathcal{L} = \delta \varphi \cdot \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \varphi)} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left[\mathcal{L} \delta x_{\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi)} \delta \varphi \right].$$

S ohledem na platnost pohybových rovnic XIII(9.14) bude

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left[\mathcal{L} \delta x_{\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi)} \delta \varphi \right], \quad \text{XIII(11.6)}$$

popř. pro vícekomponentové pole

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left[\mathcal{L} \delta x_{\nu} + \sum_{K=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \varphi_K)} \delta \varphi_K \right]. \quad \text{XIII(11.7)}$$

Je-li Lagrangeova hustota (a tedy i variace ΔS účinkového funkcionálu) invariantní vůči spojitě transformaci prostoročasových souřadnic x_ν a polí φ_K , pak

$$\Delta \mathcal{L} = 0, \quad \text{XIII(11.8)}$$

resp.

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\mathcal{L} \delta x_\nu + \sum_K \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_K)} \delta \varphi_K \right] = 0 \quad \text{XIII(11.9)}$$

odpovídají zákonu zachování (E. NOETHER, 1918). Aby nedošlo k přehlédnutí, připomínáme, že XIII(11.8) platí, když za φ_K dosadíme řešení pohybových rovnic.

Rovnicemi typu $(\partial J_\nu / \partial x_\nu) = 0$ popisujeme zákony zachování. Seznámili jsme se již s rovnicí kontinuity $(\partial \rho / \partial t) + \text{div } \mathbf{j} = 0$, jež v kovariantním tvaru zní $(\partial j_\nu / \partial x_\nu) = 0$. Z rovnice $(\partial J_\nu / \partial x_\nu) = 0$ totiž dostaneme $(\partial J_4 / \partial x_4) + (\partial J_k / \partial x_k) = 0$, odkud

$$\frac{d}{dt} \int \rho \, dV = - \int \frac{\partial J_k}{\partial x_k} \, dV = - \oint J_k \, ds_k.$$

(Při úpravě jsme dosadili $J_4 = i c \rho$.) Je-li na hraniční oblasti $\mathbf{J} = 0$, pak je také

$$\frac{d}{dt} \int \rho \, dV = 0,$$

což vyjadřuje zákon zachování veličiny

$$Q = \int \rho \, dV.$$

Obdobně je tomu i u dalších veličin, o čemž pojednáme v následujících člancích.

XIII.12 Tenzor energie-hybnosti

K pojmu tenzoru energie-hybnosti lze dospět následující jednoduchou úvahou. Lagrangeova hustota \mathcal{L} je funkcí pole φ a jeho prvních derivací

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi, \partial_\nu \varphi).$$

Derivací této funkce podle x_μ dostaneme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} \right).$$

Derivaci $(\partial \mathcal{L} / \partial \varphi)$ vyjádříme pomocí pohybových rovnic XIII(9.14), tj.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \right),$$

čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi)} \right] = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

To nás přivádí k zavedení tenzoru

$$T_{\mu\nu} = \sum_K \frac{\partial \varphi_K}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_K)} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}, \quad \text{XIII(12.1)}$$

pro nějž platí

$$\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0. \quad \text{XIII(12.2)}$$

Pro každý index $\mu = 1, 2, 3, 4$ vyjadřuje XIII(12.2) rovnici kontinuity, a tedy zákon zachování. Dříve než přejdeme k vysvětlení tenzoru $T_{\mu\nu}$, zavedeme jej jiným postupem, který vyjasní jeho hlubší podstatu.

Budeme se zabývat *infinitesimální translací* v prostoročase

$$\delta x_\nu = \varepsilon_\nu \quad \text{XIII(12.3)}$$

kde ε_ν jsou konstantní (libovolná) posunutí. Funkce $\varphi(x)$ se při takové transformaci změní na $\varphi'(x')$, přičemž $\varphi'(x') = \varphi(x + \varepsilon) = \varphi(x)$, resp.

$$\varphi'(x) = \varphi(x - \varepsilon). \quad \text{XIII(12.4)}$$

Rozvojem $\varphi(x - \varepsilon) = \varphi(x) - \varepsilon_\mu (\partial \varphi / \partial x_\mu)$ a dosazením dostaneme

$$\delta \varphi \equiv \varphi'(x) - \varphi(x) = -\varepsilon_\mu \partial_\mu \varphi,$$

popř. pro vícekomponentové pole

$$\delta \varphi_K = -\varepsilon_\mu \partial_\mu \varphi_K. \quad \text{XIII(12.5)}$$

Tato variace určuje změnu pole φ_K při translaci v čtyřprostoru o ε_μ .

Vztahy XIII(12.3) a XIII(12.5) dosadíme do XIII(11.7), což dá

$$\Delta \mathcal{L} = -\varepsilon_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\sum_K \frac{\partial \varphi_K}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_K)} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} \right]. \quad \text{XIII(12.6)}$$

Variace $\Delta \mathcal{L}$ je vyvolaná translací v čtyřprostoru o $\delta x_\mu = \varepsilon_\mu$. Tato translace nemůže mít vliv na pohybové rovnice (homogenita prostoročasu), proto $\Delta \mathcal{L} = 0$, což s ohledem na libovolnost ε_μ dá $\partial_\nu T_{\mu\nu} = 0$, kde $T_{\mu\nu}$ je opět určeno rovnicí XIII(12.1). Rovnice XIII(12.4), a tedy i odpovídající zákony zachování, jsou tak svázány s invariantností pohybových rovnic vůči libovolné translaci ε_μ v čtyřprostoru.

Přejdeme k vyjasnění smyslu tenzoru $T_{\mu\nu}$. Položíme $\mu = \nu = 4$, pak je $(\dot{\varphi}_K \equiv \partial \varphi_K / \partial t)$

$$T_{44} = \sum_K \dot{\varphi}_K \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_K} - \mathcal{L}.$$

V mechanice veličina

$$\sum_K \dot{q}_K \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_K} - L = H$$

je hamiltonián (energie). Z toho důvodu veličinu

$$T_{44} \equiv \mathcal{H} \equiv \sum_K \dot{\varphi}_K \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_K} - \mathcal{L} \quad \text{XIII(12.7)}$$

nazýváme *hustotou hamiltoniánu* (Hamiltonovou hustotou) pole. Dá se proto očekávat, že složky $T_{\mu 4}$ budou souviset se čtyřvektorem hybnosti (viz čl. XIII.3).

Rozepsáním rovnice XIII(12.2) dostaneme

$$\frac{i}{c} \frac{\partial T_{\mu 4}}{\partial t} = \frac{\partial T_{\mu j}}{\partial x_j}$$

Integrací přes objem V pak dostaneme

$$\frac{dP_\mu}{dt} = \int \frac{\partial T_{\mu j}}{\partial x_j} dV = \oint T_{\mu j} ds_j$$

Při úpravě jsme zavedli čtyřvektor

$$P_\mu = \frac{i}{c} \int T_{\mu 4} dV \quad \text{XIII(12.8)}$$

a užili Gaussovy věty $\int (\partial T_{\mu j} / \partial x_j) dV = \oint T_{\mu j} ds_j$. Při integraci přes nekonečně vzdálenou plochu, kdy pole φ_K , a tedy i $T_{\mu j}$, dostatečně rychle ubývají se vzdáleností, je povrchový integrál nulový.

Pro čtyřvektor P_μ tak platí zákon zachování

$$\frac{dP_\mu}{dt} = 0. \quad \text{XIII(12.9)}$$

Pro $\mu = 4$ je

$$P_4 = \frac{i}{c} \int T_{44} dV = \frac{i}{c} \mathcal{E},$$

kde

$$\mathcal{E} \equiv \int T_{44} dV \equiv \int \mathcal{H} dV. \quad \text{XIII(12.10)}$$

je energie pole. Prostorové složky P_j pak představují složky třírozměrné hybnosti pole.

Tenzor $T_{\mu\nu}$ zvaný *kanonický tenzor energie hybnosti*, je obecně nesymetrický

$$T_{\mu\nu} \neq T_{\nu\mu}.$$

Tento tenzor není definován jednoznačně. Místo $T_{\mu\nu}$ lze zavést nový tenzor

$$T'_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \partial_\lambda f_{\mu\nu\lambda}, \quad \text{XIII(12.11)}$$

kde $f_{\mu\nu\lambda}$ je tenzor třetího řádu antisymetrický vzhledem k posledním dvěma indexům

$$f_{\mu\nu\lambda} = -f_{\lambda\nu\mu}. \quad \text{XIII(12.12)}$$

Je totiž

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T'_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\mu\nu} + \frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\nu} f_{\mu\nu\lambda}.$$

První člen na pravé straně je v důsledku XIII(12.2) nulový a druhý je nulový identicky v důsledku antisymetrie XIII(12.12). Pro takto získaný tenzor $T'_{\mu\nu}$ tedy opět platí rovnice kontinuity

$$\partial_\nu T'_{\mu\nu} = 0 \quad \text{XIII(12.13)}$$

a stejný zákon zachování XIII(12.9).

Nejednoznačnost tenzoru $T_{\mu\nu}$ lze využít k vhodné volbě $f_{\mu\nu\lambda}$ tak, aby $T'_{\mu\nu}$ bylo symetrickým tenzorem

$$T'_{\mu\nu} = T'_{\nu\mu}. \quad \text{XIII(12.14)}$$

Najdeme kalibrační tenzor $f_{\mu\nu\lambda}$, který povede k rovnici XIII(12.14). Pomocí XIII(12.11) vyjádříme

$$T'_{\nu\mu} = T_{\nu\mu} + \partial_\lambda f_{\nu\mu\lambda}.$$

Tento výraz srovnáme s XIII(12.11) a pak z rovnice XIII(12.14) plyne

$$\partial_\lambda (f_{\nu\mu\lambda} - f_{\mu\nu\lambda}) = T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu} = \sum_K \left[\frac{\partial \varphi_K}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \varphi_K)} - \frac{\partial \varphi_K}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_K)} \right]. \quad \text{XIII(12.15)}$$

Odtud lze určit $f_{\mu\nu\lambda}$, a tím i získat symetrický tenzor $T'_{\mu\nu}$.

Nyní aplikujeme tyto poznatky na získání tenzoru energie hybnosti elektromagnetického pole. Pro volné elektromagnetické pole vezmeme ve shodě s XIII(10.6)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$

V rovnici XIII(12.1) položíme $\varphi_K = \mathcal{A}_\lambda$, takže je

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{A}_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \mathcal{A}_\lambda)} + \frac{1}{4} \varepsilon_0 \delta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}.$$

Ve shodě s XIII(10.7) je

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \mathcal{A}_\lambda)} = -\varepsilon_0 F_{\nu\lambda} = \varepsilon_0 F_{\lambda\nu},$$

a tudíž

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon_0 \left[F_{\lambda\nu} \frac{\partial \mathcal{A}_\lambda}{\partial x_\mu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right]. \quad \text{XIII(12.16)}$$

Tento tenzor není symetrický, lze jej však snadno symetrizovat. Z vektoru \mathcal{A}_μ a tenzoru $F_{\lambda\nu}$ lze sestavit antisymetrický tenzor

$$f_{\mu\nu\lambda} = \varepsilon_0 F_{\lambda\nu} \mathcal{A}_\mu = -f_{\mu\nu\lambda}.$$

Tento tenzor lze použít k symetrizaci tenzoru $T_{\mu\nu}$ tak, že položíme

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu\lambda} = \varepsilon_0 F_{\lambda\nu} \partial_\lambda \mathcal{A}_\mu - \varepsilon_0 \mathcal{A}_\mu [\partial_\lambda F_{\nu\lambda}].$$

Pro volné pole je $\partial_\lambda F_{\nu\lambda} = 0$, a tudíž

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu\lambda} = \varepsilon_0 F_{\lambda\nu} \partial_\lambda \mathcal{A}_\mu.$$

Tento člen odečteme od XIII(12.6), čímž dostaneme

$$T'_{\mu\nu} = \varepsilon_0 [F_{\lambda\nu} (\partial_\mu \mathcal{A}_\lambda - \partial_\lambda \mathcal{A}_\mu) + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}] = T'_{\nu\mu}.$$

Tento symetrický tenzor energie-hybnosti budeme značit místo $T'_{\mu\nu}$ symbolem $\Theta_{\mu\nu}$, přičemž je

$$\Theta_{\mu\nu} = \varepsilon_0 [F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}]. \quad \text{XIII(12.17)}$$

Symetrický tenzor má nulový součet diagonálních komponent

$$\Theta_{\mu\mu} = \varepsilon_0 [-F_{\mu\lambda} F_{\lambda\mu} + \frac{1}{4} \delta_{\mu\mu} F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}] = 0. \quad \text{XIII(12.18)}$$

Prostým dosazením za $F_{\mu\lambda}$ se přesvědčíme, že prostorové složky Θ_{jk} jsou totožné se složkami Maxwellova tenzoru napětí (viz čl. VI.2) volného pole

$$\Theta_{jk} = \varepsilon_0 E_j E_k + \mu_0 H_j H_k - u \delta_{jk}, \quad \text{XIII(12.19)}$$

kde

$$u = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \quad \text{XIII(12.20)}$$

je hustota elektromagnetické energie ve vakuu. (Při úpravách jsme užili vztahu $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$.)

Složka Θ_{44} — jak již víme — souvisí s hustotou energie

$$\Theta_{44} = u = \mathcal{H}. \quad \text{XIII(12.21)}$$

Najdeme ještě význam složek Θ_{j4} . Tak pro Θ_{14} máme

$$\Theta_{14} = \varepsilon_0 F_{1\lambda} F_{4\lambda} = \varepsilon_0 (F_{12} F_{42} + F_{13} F_{43}),$$

což po dosažení z XIII(4.13) dá

$$\Theta_{14} = -i \varepsilon_0 c \mu_0 (E_2 H_3 - E_3 H_2) = \frac{i}{c} S_1,$$

kde S_1 je složka Poyntingova vektoru $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$. Je tedy

$$\Theta_{j4} = \frac{i}{c} S_j, \quad \text{XIII(12.22)}$$

čímž je vysvětlen význam všech složek symetrického tenzoru energie hybnosti elektromagnetického pole. Hustota elektromagnetické hybnosti (viz čl. VI.2) je $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$, což umožňuje přepsat Θ_{j4} pomocí hustoty g_j elektromagnetické hybnosti

$$\Theta_{j4} = i c g_j. \quad \text{XIII(12.23)}$$

Pro pozdější reference uvedeme ještě následující přepisy kanonického a symetrického tenzoru energie hybnosti elektromagnetického pole

$$T_{\mu\nu} = \varepsilon_0 F_{\lambda\nu} \partial_\mu \mathcal{A}_\lambda - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}, \quad \text{XIII(12.24)}$$

$$\Theta_{\mu\nu} = \varepsilon_0 F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} - \mathcal{L} \delta_{\mu\nu}, \quad \text{XIII(12.25)}$$

kde

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \varepsilon_0 F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$$

je Lagrangeova hustota volného elektromagnetického pole ve vakuu.

XIII.13 Tenzor momentu hybnosti

V mechanice je moment hybnosti \mathbf{M} definován jako vektorový součin polohového vektoru \mathbf{r} a hybnosti \mathbf{p} , tj. $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$. Místo vektoru \mathbf{M} můžeme zavést antisymetrický tenzor $x_j p_k - x_k p_j = M_{jk}$.

V poli je hybnost P_j dána vzorcem XIII(12.8), což navádí na myšlenku zavést tenzor hustoty momentu hybnosti

$$M_{jk} = x_j T_{k4} - x_k T_{j4}, \quad \text{XIII(13.1)}$$

popř. pomocí symetrického tenzoru takto

$$M'_{jk} = x_j \Theta_{k4} - x_k \Theta_{j4}, \quad \text{XIII(13.2)}$$

což s ohledem na XIII(12.23) dá

$$M_{jk} = i c (x_j g_k - x_k g_j). \quad \text{XIII(13.3)}$$

Nenulové složky tohoto tenzoru tvoří vektor $[\mathbf{r}, \mathbf{g}]$ s nímž jsme se již setkali v článku VI.4.

Čtyřrozměrným zobecněním XIII(13.1) a XIII(13.2) jsou tenzory

$$L_{\lambda\nu} = x_\lambda T_{\nu 4} - x_\nu T_{\lambda 4}, \quad \text{XIII(13.4)}$$

$$M_{\lambda\nu} = x_\lambda \Theta_{\nu 4} - x_\nu \Theta_{\lambda 4}. \quad \text{XIII(13.5)}$$

Vypočteme čtyřdivergenci $\partial_\nu M_{\lambda\nu}$. Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} M_{\lambda\nu} = \frac{\partial x_\kappa}{\partial x_\nu} \Theta_{\lambda\nu} - \frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\nu} \Theta_{\kappa\nu} + x_\kappa \frac{\partial \Theta_{\lambda\nu}}{\partial x_\nu} - x_\lambda \frac{\partial \Theta_{\kappa\nu}}{\partial x_\nu},$$

což s ohledem na zákon zachování XIII(12.13) a symetrii $T'_{\alpha\lambda} \equiv \Theta_{\alpha\lambda} = \Theta_{\lambda\alpha}$ dá

$$\partial_\nu M_{\alpha\lambda\nu} = 0. \quad \text{XIII(13.6)}$$

S tímto tenzorem je spojeno šest zákonů zachování. O tom, že tři z těchto zákonů představují zákon zachování momentu hybnosti již víme. O zbývajících třech pojednáme později.

Kdybychom provedli stejné úpravy pro tenzor $L_{\alpha\lambda\nu}$ vytvořený pomocí kanonického tenzoru $T_{\mu\nu}$, dospěli bychom k rovnici

$$\partial_\nu L_{\alpha\lambda\nu} = T_{\lambda\alpha} - T_{\alpha\lambda}. \quad \text{XIII(13.7)}$$

Jelikož kanonický tenzor $T_{\alpha\lambda}$ je obecně nesymetrický, tenzor $L_{\alpha\lambda\nu}$ nevede obecně k zákonu zachování. Z toho můžeme usoudit, že tenzor $L_{\alpha\lambda\nu}$ neobsahuje veškerý moment hybnosti, a je tedy nutno doplnit ho o jisté členy, které budou respektovat zákon zachování momentu hybnosti. Tím se zákon zachování momentu hybnosti dostává do souvislosti se symetrií kanonického tenzoru energie-hybnosti $T_{\mu\nu}$. Přejdeme k podrobnějšímu prozkoumání těchto souvislostí.

Nejdříve zavedeme infinitesimální Lorentzovu transformaci. V XIII(3.6) položíme $L_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$, kde $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ jsou koeficienty infinitesimální transformace. Položíme proto

$$x'_\nu = (\delta_{\nu\mu} + \omega_{\nu\mu})x_\mu = x_\nu + \omega_{\nu\mu}x_\mu,$$

tj. variace

$$\delta x_\nu \equiv x'_\nu - x_\nu = \omega_{\nu\mu}x_\mu. \quad \text{XIII(13.8)}$$

Invariantnost $x'_\mu x'_\mu = x_\mu x_\mu$ vyžaduje, aby bylo

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \quad \text{XIII(13.9)}$$

V teorému Noetherové XIII(11.9) položíme $\varphi_K = \mathcal{A}_\mu$. Potřebujeme ještě určit $\delta\varphi_K = \delta\mathcal{A}_\mu$, což provedeme takto: Vektor \mathcal{A}_μ se transformuje jako souřadnice, tj.

$$\mathcal{A}'_\mu(x') = L_{\mu\lambda}\mathcal{A}_\lambda(x) = (\delta_{\mu\lambda} + \omega_{\mu\lambda})\mathcal{A}_\lambda(x),$$

což po dosazení dá

$$\mathcal{A}'_\mu(x') = \mathcal{A}'_\mu(x + \delta x) = \mathcal{A}'_\mu(x) + \frac{\partial \mathcal{A}'_\mu}{\partial x_\lambda} \delta x_\lambda \equiv \mathcal{A}'_\mu(x) + \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\lambda} \omega_{\lambda\kappa} x_\kappa.$$

Máme tak vztah

$$\mathcal{A}'_\mu(x) + \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\lambda} \omega_{\lambda\kappa} x_\kappa = \mathcal{A}_\mu(x) + \omega_{\mu\lambda} \mathcal{A}_\lambda,$$

z něhož pro variaci $\delta\mathcal{A}_\mu \equiv \mathcal{A}'_\mu(x) - \mathcal{A}_\mu(x)$ plyne

$$\delta\mathcal{A}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\lambda} \omega_{\lambda\kappa} x_\kappa + \omega_{\mu\lambda} \mathcal{A}_\lambda. \quad \text{XIII(13.10)}$$

Podle XIII(8.7) je

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \mathcal{A}_\mu)} = \varepsilon_0 F_{\mu\nu}.$$

Je-li Lagrangeova hustota invariantní vůči transformacím XIII(13.8) a XI-II(13.10), pak platí teorém Noetherové XIII(11.9). Po dosazení a jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\mathcal{L} \omega_{\nu\mu} x_\mu - \varepsilon_0 F_{\mu\nu} \frac{\partial \mathcal{A}_\mu}{\partial x_\lambda} \omega_{\lambda\kappa} x_\kappa + \varepsilon_0 F_{\kappa\nu} \omega_{\alpha\lambda} \mathcal{A}_\lambda \right] = 0.$$

Podle XIII(12.24) je

$$\varepsilon_0 F_{\mu\nu} \partial_\lambda \mathcal{A}_\mu = T_{\lambda\nu} + \mathcal{L} \delta_{\lambda\nu},$$

čímž převedeme předchozí rovnici na tvar

$$\omega_{\alpha\lambda} \partial_\nu (x_\alpha T_{\lambda\nu} + \varepsilon_0 F_{\kappa\nu} \mathcal{A}_\lambda) = 0. \quad \text{XIII(13.11)}$$

Zatím jsme ještě nevyužili antisymetrie XIII(13.9), proto v XIII(13.11) provedeme vzájemnou výměnu $\kappa \leftrightarrow \lambda$, což dá

$$-\omega_{\alpha\lambda} \partial_\nu (x_\lambda T_{\kappa\nu} + \varepsilon_0 F_{\lambda\nu} \mathcal{A}_\kappa) = 0. \quad \text{XIII(13.12)}$$

Sečtením XIII(13.11) dospějeme k rovnici

$$\omega_{\alpha\lambda} \partial_\nu M_{\alpha\lambda\nu} = 0, \quad \text{XIII(13.13)}$$

kde antisymetrický tenzor momentu hybnosti

$$M_{\alpha\lambda\nu} \equiv x_\alpha T_{\lambda\nu} - x_\lambda T_{\alpha\nu} + \varepsilon_0 (F_{\nu\alpha} \mathcal{A}_\lambda - F_{\lambda\nu} \mathcal{A}_\alpha). \quad \text{XIII(13.14)}$$

Jelikož $\omega_{\alpha\lambda}$ jsou libovolná, rovnice XIII(13.13) implikuje zákon zachování

$$\partial_\nu M_{\alpha\lambda\nu} = 0. \quad \text{XIII(13.15)}$$

Stejným postupem jako při odvozování rovnic XIII(12.9) se přesvědčíme, že rovnice XIII(13.15) implikují zachování veličin

$$M_{\alpha\lambda} = k \int M_{\alpha\lambda 4} dV = -M_{\lambda\alpha}. \quad \text{XIII(13.16)}$$

Vzhledem k antisymetrii se jedná o šest zákonů zachování.

Tenzor XIII(13.14) lze snadno vyjádřit ve tvaru XIII(13.5). Za tím účelem provedeme kalibraci typu XIII(12.1), tj.

$$T_{\lambda\nu} = \Theta_{\lambda\nu} - \partial_\mu f_{\lambda\nu\mu}, \quad T_{\kappa\nu} = \Theta_{\kappa\nu} - \partial_\mu f_{\kappa\nu\mu}.$$

Tenzor $f_{\lambda\nu\mu}$ pak zvolíme tak, aby bylo

$$x_\lambda \partial_\mu f_{\kappa\nu\mu} - x_\kappa \partial_\mu f_{\lambda\nu\mu} + \varepsilon_0 (F_{\nu\alpha} \mathcal{A}_\lambda - F_{\lambda\nu} \mathcal{A}_\alpha) = 0. \quad \text{XIII(13.17)}$$

Stačí se proto zabývat vyjádřením typu XIII(13.5).

Vezmeme komponenty $M_{\kappa\lambda} = x_\kappa \Theta_{\lambda 4} - x_\lambda \Theta_{\kappa 4}$ a užitíme vyjádření pro čtyřhybnost P_μ a její hustotu p_μ

$$P_\mu = \frac{i}{c} \int \Theta_{\mu 4} dV, \quad p_\mu = \frac{i}{c} \Theta_{\mu 4}. \quad \text{XIII(13.18)}$$

Dostaneme tak (zvolíme $kc = i$)

$$M_{\kappa\lambda} = \int (x_\kappa p_\lambda - x_\lambda p_\kappa) dV. \quad \text{XIII(13.19)}$$

Zákony zachování značí, že platí

$$\frac{d}{dt} M_{\kappa\lambda} = 0. \quad \text{XIII(13.20)}$$

Prostorové komponenty

$$M_{kl} = \int (x_k p_l - x_l p_k) dV = \frac{i}{c} \int (x_k \Theta_{l4} - x_l \Theta_{k4}) dV \quad \text{XIII(13.21)}$$

představují moment hybnosti pole.

Položíme-li v XIII(13.19) $\kappa = k$, $\lambda = 4$, dospějeme k rovnici

$$M_{k4} = \frac{i}{c} \int x_k \mathcal{H} dV = ictP_k, \quad \text{XIII(13.22)}$$

kde jsme zavedli $\Theta_{44} = \mathcal{H}$ (hustotu energie) a hybnost P_k je určena rovnicí XIII(13.18). Jelikož $M_{k4} = \text{konst}$, je také

$$\frac{1}{c^2} \int x_k \mathcal{H} dV - tP_k = \text{konst}. \quad \text{XIII(13.23)}$$

Zavedeme hustotu hmotnosti $\sigma \equiv \mathcal{H}/c^2$, což dá

$$\frac{d}{dt} \int x_k \sigma dV = P_k = \text{konst}, \quad \text{XIII(13.24)}$$

jelikož $(dP_k/dt) = 0$.

Vzorec XIII(13.23) určuje, že celková hybnost P_k je rovna hybnosti hmotného středu (dřívější název — těžiště). Rovnice XIII(13.23), popř. XIII(13.24) tak vyjadřují známou větu o zachování pohybu hmotného středu.

Zákon zachování momentu hybnosti a zákon zachování pohybu hmotného středu jsou tedy důsledkem izotropie prostoročasu.

Tenzor XIII(13.14) můžeme rozdělit na dvě části

$$M_{\kappa\lambda\nu} = L_{\kappa\lambda\nu} + S_{\kappa\lambda\nu}, \quad \text{XIII(13.25)}$$

kde $L_{\kappa\lambda\nu}$ je určeno vztahem XIII(13.4) a druhý člen

$$S_{\kappa\lambda\nu} = \varepsilon_0 (F_{\kappa\nu} \mathcal{A}_\lambda - F_{\lambda\nu} \mathcal{A}_\kappa) \quad \text{XIII(13.26)}$$

pochází od transformačních vlastností čtyřpotenciálu (viz XIII(13.10)), a charakterizuje tedy vnitřní neboli vlastní moment hybnosti pole (tzv. spin). Zatímco členy $L_{\kappa\lambda\nu}$ jsou obdobou vektorového součinu $[\mathbf{r}, \mathbf{p}]$; resp. $x_j p_k - x_k p_j$, člen $S_{\kappa\lambda\nu}$ závisí pouze na poli samotném.

Vypočteme

$$S_{kl4} = \varepsilon_0 (\mathcal{A}_l F_{k4} - \mathcal{A}_k F_{l4}).$$

Po dosazení z XIII(4.13) dostaneme

$$S_{kl4} = ic\varepsilon_0 (A_k E_l - A_l E_k). \quad \text{XIII(13.27)}$$

Hustota vlastního momentu hybnosti pole je tak určena vektorovým součinem $\varepsilon_0[\mathbf{E}, \mathbf{A}]$, takže celkový spin pole (označíme jej Σ) bude

$$\Sigma = \varepsilon_0 \int [\mathbf{E}, \mathbf{A}] dV. \quad \text{XIII(13.28)}$$

Poznámka: Dělení na tzv. orbitální a spinový moment má historický původ a je dosti fiktivní, jelikož smysl má pouze celkový moment. Kromě toho takové dělení není kalibračně invariantní.

XIII.14 Nelineární elektrodynamika

Při odvozování Maxwellových rovnic z variačního principu v článku XIII.10 jsme vycházeli ze čtyřech postulátů. První tři vyjadřují invariantnost vůči Lorentzově transformaci, prostorové inverzi a kalibrační transformaci. Čtvrtý postulát — lineární rovnice nejvýše druhého řádu — má charakter omezení na řád a stupeň rovnic.

Opuštění tohoto čtvrtého postulátu umožňuje vytvořit relativistickou elektrodynamiku, která má některé zajímavé vlastnosti.

Linearita rovnic pole je nerozlučně spojena s platností principu superpozice pro pole. Jak jsme již vícekrát uvedli, lze očekávat narušení principu superpozice u dostatečně silných polí. Narušení principu superpozice se pak projeví v nelinearitě rovnic pole.

Elektromagnetické pole je charakterizováno dvěma invarianty (viz článek XIII.8)

$$I_1 = \mathbf{E}^2 - c^2 \mathbf{B}^2, \quad I_2 = c(\mathbf{E}\mathbf{B}). \quad \text{XIII(14.1)}$$

Obě veličiny jsou invariantní jak vůči Lorentzově, tak i kalibrační transformaci. Invariant I_1 je pravým skalárem, zatímco I_2 je pseudoskalárem.

Relativisticky a kalibračně invariantní elektrodynamiku lze vybudovat tak, že Lagrangeovu hustotu \mathcal{L} vezmeme jako funkci těchto dvou invariantů

$$\mathcal{L} = f(I_1, I_2). \quad \text{XIII(14.2)}$$

Připojíme-li k tomu ještě požadavek invariantnosti vůči prostorové inverzi, pak závislost na I_2 musí být sudou funkcí, což vyjádříme rovnicí

$$\mathcal{L} = f(I_1, I_2). \quad \text{XIII(14.3)}$$

Hlavní potíží při formulaci takové zobecněné (nelineární) elektrodynamiky je v tom, že nemáme žádný univerzální princip, jenž by nám umožnil jednoznačně vybrat ze všech myslitelných funkcí $f(I_1, I_2)$ tu pravou. Zde nezbývá nic jiného než zkoušet různé varianty a zkoumat důsledky, k nimž vedou. Závislost XIII(14.3) je nutno volit tak, aby pro slabá pole přecházela v Lagrangeovu hustotu XIII(10.6), jež vede k lineárním rovnicím.

Zde stručně pojednáme pouze o jednoduché variantě Bornovy—Infeldovy nelineární elektrodynamiky (M. BORN, L. INFELD, 1934).

Pravděpodobným vodítkem při volbě Lagrangeovy hustoty \mathcal{L} byla analogie mezi relativistickým a nerelativistickým Lagrangianem volné částice. Lagrangian L_0 volné relativistické částice

$$L_0 = mc^2 \left[1 - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{1/2} \right] \quad \text{XIII(14.4)}$$

přechází při malých rychlostech $v \ll c$ na nerelativistický vzorec

$$L_0 = \frac{1}{2}mv^2.$$

Tento vzorec lze formálně získat jako limitu vzorec XIII(14.4) pro $c^2 \rightarrow \infty$.

Volnému poli jsme vztahem XIII(10.6) přiřadili Lagrangeovu hustotu

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}\epsilon_0 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_0 (E^2 - c^2 B^2). \quad \text{XIII(14.5)}$$

Bornova—Infeldova hustota

$$\mathcal{L}_0 = \epsilon_0 E_0^2 \left\{ 1 - \left[1 - \frac{1}{E_0^2} (E^2 - c^2 B^2) \right]^{1/2} \right\} \quad \text{XIII(14.6)}$$

přechází při $E_0^2 \rightarrow \infty$ na XIII(14.6). Konkrétněji při polích

$$E \ll E_0, \quad cB \ll E_0, \quad \text{XIII(14.7)}$$

lze v XIII(14.6) užít přibližného vztahu $(1-x)^{1/2} \cong 1 - x/2$ pro $|x| \ll 1$, což vede k XIII(14.5).

Parametr E_0 — jak je vidět z limitního přechodu — má tedy význam jisté maximální hodnoty pole. Tato interpretace se vyjasní dalším výkladem.

Při nulovém magnetickém poli $B = 0$ budeme mít

$$\mathcal{L}_0 = \epsilon_0 E_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{E^2}{E_0^2} \right)^{1/2} \right]. \quad \text{XIII(14.8)}$$

Důsledkem antisymetrie tenzoru $F_{\mu\nu}$ jsou rovnice XIII(7.1), které v daném případě dají

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0. \quad \text{XIII(14.9)}$$

Pole \mathbf{E} je potenciální, a tudíž

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \quad \text{XIII(14.10)}$$

Pro nabitou částici s hustotou náboje ρ je nutno k XIII(14.8) přidat člen $-\rho\Phi$, což pro bodovou částici $\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r})$ dá

$$\mathcal{L} = \epsilon_0 E_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{E^2}{E_0^2} \right)^{1/2} \right] - e\Phi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}). \quad \text{XIII(14.11)}$$

V Eulerových—Lagrangeových rovnicích

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \Phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0$$

užijeme $E_j = -\partial_j \Phi$, takže je

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_j} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} = 0. \quad \text{XIII(14.12)}$$

Derivace

$$D_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial E_j} \quad \text{XIII(14.13)}$$

určují vektor elektrické indukce \mathbf{D} .

Rovnice XIII(14.12) přepíšeme pomocí vektoru \mathbf{D} takto

$$\partial_j D_j \equiv \text{div } \mathbf{D} = e\delta(\mathbf{r}). \quad \text{XIII(14.14)}$$

Pro indukci \mathbf{D} máme tedy známé řešení pro bodový náboj

$$\mathbf{D} = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi r^3}. \quad \text{XIII(14.15)}$$

Závislost indukce \mathbf{D} na intenzitě \mathbf{E} určíme z definičního vztahu XIII(14.13). Vezmeme-li \mathcal{L} ve tvaru XIII(14.11), dospějeme ke vztahu

$$\mathbf{D} = \frac{\epsilon_0 \mathbf{E}}{\left(1 - E^2/E_0^2 \right)^{1/2}}, \quad \text{XIII(14.16)}$$

což je „elektrická analogie“ vztahu $\mathbf{p} = m\mathbf{v}(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Tato podobnost nepřekvapuje, jelikož z XIII(14.4) plyne hybnost $\mathbf{p} = (\partial L_0 / \partial \mathbf{v}) = m\mathbf{v}(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ — a struktury L_0 jsme fakticky použili ke konstrukci Lagrangeovy hustoty XIII(14.8).

Při $E \ll E_0$ je $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, což je standardní lineární vztah mezi indukci a intenzitou. V Bornově—Infeldově elektrodynamice je však vztah $\mathbf{D} \equiv \mathbf{D}(\mathbf{E})$ nelineární i ve vakuu, což je typický prvek nelineárních teorií.

Obrácením vztahu XIII(14.16) dostaneme

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_0 \left(1 + \frac{D^2}{\epsilon_0^2 E_0^2}\right)^{1/2}} \quad \text{XIII(14.17)}$$

Po dosazení za \mathbf{D} z XIII(14.15) získáme závislost

$$\mathbf{E} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{1}{(r^4 + a_0^4)^{1/2}}, \quad \text{XIII(14.18)}$$

kde

$$a_0 = \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0 E_0}\right)^{1/2} \quad \text{XIII(14.19)}$$

je charakteristická veličina rozměru délky. (Lineární elektrodynamice odpovídá $E_0 = \infty$, a tedy $a_0 = 0$.) Elektrická intenzita nabývá maximální hodnoty v bodě $r = 0$ (sídle náboje), a sice

$$E(0) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0^2} = E_0. \quad \text{XIII(14.20)}$$

Tím je vysvětlen význam parametru E_0 . Na rozdíl od lineární elektrodynamiky, kde intenzita bodového náboje diverguje při $r = 0$, je v nelineární elektrodynamice tato veličina konečná.

Elektrostatický potenciál vypočteme z rovnice

$$\Phi = \int_r^\infty E_r dr = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0} \int_{r/a_0}^\infty \frac{dx}{(1+x^4)^{1/2}}. \quad \text{XIII(14.21)}$$

Při $r = 0$ je

$$\Phi_0 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^4)^{1/2}}. \quad \text{XIII(14.22)}$$

Po dosazení číselné hodnoty

$$\alpha_1 \equiv \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^4)^{1/2}} \cong 1,854 \quad \text{XIII(14.23)}$$

je

$$\Phi_0 \cong 1,854 \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0}. \quad \text{XIII(14.24)}$$

Z Lagrangeovy hustoty

$$\mathcal{L}_0 = \epsilon_0 E_0^2 \left[1 - \left(1 - \frac{E^2}{E_0^2}\right)^{1/2}\right] = \epsilon_0 E_0^2 \left[1 - \frac{r^2}{(r^4 + a_0^4)^{1/2}}\right] \quad \text{XIII(14.25)}$$

snadno určíme tenzor energie-hybnosti. Podle definičního vztahu XIII(12.1) je

$$T_{jk} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial (\partial_k \Phi)} - \mathcal{L}_0 \delta_{jk},$$

což dá

$$T_{11} = E_1 D_1 - \mathcal{L}_0. \quad \text{XIII(14.26)}$$

Energii pole určíme ze vztahu

$$\mathcal{E} = \int T_{44} d^3 r = - \int \mathcal{L}_0 d^3 r.$$

S ohledem na sférickou symetrii \mathcal{L}_0 položíme $d^3 r = 4\pi r^2 dr$; po jednoduché úpravě získáme rovnici

$$\mathcal{E} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \alpha_2, \quad \text{XIII(14.27)}$$

kde

$$\alpha_2 \equiv \int_0^\infty \left[1 - \frac{x^2}{(1+x^4)^{1/2}}\right] x^2 dx. \quad \text{XIII(14.28)}$$

Ve vzniklém integrálu položíme $x^2 dx = d(x^3/3)$, a pak integrací per partes dostaneme

$$\alpha_2 = \frac{2}{3} \int_0^\infty \frac{x^4}{(1+x^4)^{3/2}} dx.$$

Opětovnou integrací per partes se přesvědčíme, že

$$\alpha_2 = -\frac{1}{3} \int_0^\infty x d(1+x^4)^{-1/2} = \frac{1}{3} \alpha_1, \quad \text{XIII(14.29)}$$

kde α_1 je integrál XIII(14.23).

Energii

$$\mathcal{E} = \frac{1}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0} \alpha_1 \quad \text{XIII(14.30)}$$

odpovídá hmotnost

$$m^{(e)} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} = \frac{1}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0 c^2}. \quad \text{XIII(14.31)}$$

Kdybychom tuto hmotnost pole ztotožnili s hmotností elektronu $m \cong 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg, dostali bychom pro a_0 hodnotu

$$a_0 \cong 1,14 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad \text{XIII(14.32)}$$

řádově shodnou s klasickým poloměrem elektronu (viz čl. XI.6). Hodnotu maximálního pole E_0 určíme ze vztahu XIII(14.20).

Obdobným postupem upravíme

$$\int T_{11} d^3 r = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a_0} \left(\frac{1}{3} \alpha_1 - \alpha_2\right), \quad \text{XIII(14.33)}$$

což s ohledem na XIII(14.29) dá tzv. *Laueho podmínku stability*

$$\int T_{11} d^3r = 0. \quad \text{XIII(14.34)}$$

Další rozvoj této teorie nemá valnou cenu, jelikož výchozí lagrangián byl vybrán libovolně. Kromě toho teorie polní hmotností musí vycházet z principů kvantové teorie.

Princip superpozice vylučuje rozptyl světla na světlo. V kvantové teorii se může foton změnit na pár elektron—pozitron. Interakce dvou fotonů může probíhat „zprostředkovaně“ tak, že každý z fotonů se změní na pár elektron—pozitron a při opětovné anihilaci těchto párů vzniknou dva nové fotony odlišné od původních. To je kvantová interpretace rozptylu světla na světlo. Formálně tomu odpovídá jistý lagrangián nelineární elektrodynamiky. Studium těchto otázek se však zcela vymyká poslání této učebnice.

XIII.15 Elektrodynamika s vyššími derivacemi

Lagrangeovu hustotu XIII(10.6) jsme sestrojili pomocí (kalibračně invariantního) tenzoru elektromagnetického pole $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$. Rovnice pro potenciál A_μ jsou pak rovnicemi druhého řádu — XIII(4.8), popř. XIII(7.2). Obdobně tomu bylo i v nelineární elektrodynamice u Lagrangeovy hustoty typu XIII(14.3).

Z kalibračně invariantního tenzoru $F_{\alpha\beta}$ lze derivací vytvořit kalibračně invariantní tenzor třetího řádu, a sice $\partial_\gamma F_{\alpha\beta} \equiv (\partial F_{\alpha\beta} / \partial x_\gamma)$. Součet čtverců komponent tenzoru je lorentzovským invariantem

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} = \text{Invariant.}$$

Přidáním tohoto členu (s vhodnou multiplikační konstantou) k Lagrangeově hustotě XIII(10.6) dostaneme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \epsilon_0 F_{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \epsilon_0 \lambda^2 \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\gamma} + \frac{1}{c} j_\mu A_\mu, \quad \text{XIII(15.1)}$$

kde multiplikační faktor jsme označili $-\epsilon_0 \lambda^2 / 4$. Z jednoduché rozměrové úvahy je vidět, že λ má rozměr délky.

Lagrangeova hustota XIII(15.1) je typu XIII(9.18), kde $\varphi_k = A_k$. Po provedení jednoduchých výpočtů při aplikaci rovnic XIII(9.20) dospějeme k rovnicím

$$(1 - \lambda^2 \square) \partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{1}{c \epsilon_0} j_\mu, \quad \text{XIII(15.2)}$$

jež jsou zobecněním soustavy XIII(7.2).

Poněvadž potenciál A_μ vyhovuje Lorentzově podmínce XIII(4.9), je

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \partial_\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = -\partial_\nu \partial_\nu A_\mu = -\square A_\mu.$$

Místo XIII(15.2) můžeme psát zobecněnou rovnici pro potenciál

$$(1 - \lambda^2 \square) \square A_\mu = -\frac{1}{c \epsilon_0} j_\mu. \quad \text{XIII(15.3)}$$

To jsou výchozí rovnice tzv. *elektrodynamiky Boppa a Podolského* (F. BOPP, B. PODOLSKY, 1940).

Soustavu rovnic čtvrtého řádu XIII(15.3) převedeme na dvě soustavy rovnic druhého řádu. Za tím účelem zavedeme označení

$$A'_\mu \equiv (1 - \lambda^2 \square) A_\mu, \quad \text{XIII(15.4)}$$

$$A''_\mu \equiv -\lambda^2 \square A_\mu, \quad \text{XIII(15.5)}$$

přičemž identicky platí

$$A_\mu \equiv A'_\mu - A''_\mu. \quad \text{XIII(15.6)}$$

Pro A'_μ platí (nehomogenní) d'Alembertova rovnice

$$\square A'_\mu = -\frac{1}{c \epsilon_0} j_\mu \quad \text{XIII(15.7)}$$

a pro A''_μ dostáváme rovnici *Kleinova—Gordonova typu*

$$(\square - \kappa^2) A''_\mu = -\frac{1}{c \epsilon_0} j_\mu. \quad \text{XIII(15.8)}$$

Zde jsme místo délkového parametru λ zavedli

$$\kappa \equiv \frac{1}{\lambda}. \quad \text{XIII(15.9)}$$

Z potenciálu A'_μ a A''_μ vytvoříme tenzory

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu, \quad F''_{\mu\nu} = \partial_\mu A''_\nu - \partial_\nu A''_\mu, \quad \text{XIII(15.10)}$$

přičemž ve shodě s XIII(15.6) je tenzor $F_{\mu\nu}$ elektromagnetického pole určen rozdílem obou tenzorů

$$F_{\mu\nu} \equiv F'_{\mu\nu} - F''_{\mu\nu}. \quad \text{XIII(15.11)}$$

Podobně můžeme zavést Lagrangeovu hustotu $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}' - \mathcal{L}''$, kde \mathcal{L}' , \mathcal{L}'' jsou Lagrangeovy hustoty polí A'_μ , A''_μ . To pak umožní zavést tenzor hybnosti $T_{\mu\nu} \equiv T'_\mu - T''_\mu$. Tyto úvahy však zde provádět nebudeme.

Přejdeme ke speciálnímu případu statického pole bodové částice (elektronu)

v dané teorii. Ve statickém případě je ($\mathcal{A}_4 = i\Phi$, $j_4 = ic\rho = ice\delta(\mathbf{r})$)

$$\nabla^2 \Phi' = -\frac{e}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}), \quad \text{XIII(15.12)}$$

$$(\nabla^2 - \kappa^2) \Phi'' = -\frac{e}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r}). \quad \text{XIII(15.13)}$$

S první z těchto rovnic jsme se setkali v „obyčejné“ elektrostatice, přičemž řešení má známý tvar

$$\Phi' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}; \quad \text{XIII(15.14)}$$

řešení rovnice pro Φ'' je

$$\Phi'' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\kappa r}. \quad \text{XIII(15.15)}$$

Podle XIII(15.6) tomu odpovídá potenciál (viz též příklad 1 ke kapitole II)

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} (1 - e^{-\kappa r}). \quad \text{XIII(15.16)}$$

Tento potenciál je konečný i v počátku $r=0$, přičemž

$$\Phi_0 = \frac{e\kappa}{4\pi\epsilon_0} \equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0 \lambda}. \quad \text{XIII(15.17)}$$

Na vzdálenostech $\kappa r \gg 1$, tj.

$$r \gg \lambda,$$

je potenciál Coulombova typu

$$\Phi \cong \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Snadno se přesvědčíme, že potenciál XIII(15.16) by v obyčejné elektrostatice vytvořil náboj s hustotou

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{e\kappa^2}{4\pi r} e^{-\kappa r}. \quad \text{XIII(15.18)}$$

Místo bodového náboje a modifikovaných rovnic, např. typu XIII(15.3), můžeme vzít standardní rovnice elektrodynamiky s modifikovanou proudovou hustotou. To je *malá ilustrace* obecnějších souvislostí různých variant zobecněné elektrodynamiky (nelineární, s vyššími derivacemi) s konvenční elektrodynamikou. Podrobnosti lze najít ve speciální literatuře.¹⁷⁾

¹⁷⁾ Viz např. J. KVASNICA: Vestník MGU 16 (1956), ibid 20 (1958), Czech. J. Phys. B 10 (1960), 81, ibid. B 10 (1960), 625, Trieste Sem. Proc. (1962), 181.

XIII.16 Elektrodynamika s magnetickými monopóly

Postavení rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$ v sérii Maxwellových rovnic jsme analyzovali již v článku I.13. Tato rovnice vyjadřuje neexistenci izolovaných (samostatných) *magnetických nábojů* neboli *magnetických monopólů*.

Aplikujeme-li na Maxwellovu rovnici (Faradayův indukční zákon)

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

operaci div , pak s ohledem na vektorovou identitu $\text{div rot} \equiv 0$ máme

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Odtud plyne, že $\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ nezávisí na čase, i když $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ obecně na čase závisí. Je tedy

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \rho^{(m)}(\mathbf{r}).$$

V porovnání s rovnicí $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ nás opravňuje interpretovat funkci $\rho^{(m)}$ jako *hustotu magnetických nábojů*. Je-li tato funkce $\rho^{(m)}$ dána, je tím určena i $\text{div } \mathbf{B}$ ve všech časech. Hustota magnetických nábojů zde tedy vystupuje v roli jisté *počáteční podmínky*. Maxwellova rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$ pak touto počáteční podmínkou vylučuje existenci magnetických nábojů $\rho^{(m)} \equiv 0$. Celkový magnetický náboj

$$g \equiv \int \rho^{(m)} d^3r \quad \text{XIII(16.1)}$$

by tedy měl být vždycky roven nule.

I když rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$ je spolu se svými důsledky dobře prověřena, nelze vyloučit existenci magnetických nábojů v jiných podmínkách, popř. jejich vznik při srážkách částic. (Jako analogii uvedeme, že při srážkách dvou nukleonů vysokých energií vzniká řada nových částic.) Vzniká tak otázka možného zobecnění rovnic elektromagnetického pole na takové situace, kdy kromě elektrických nábojů a proudů mohou existovat také magnetické náboje a proudy. První takovou variantu elektrodynamiky vytvořil v roce 1931 P. A. M. DIRAC; zde uvedeme hlavní myšlenky moderní verze této teorie.

Existují-li *magnetické náboje (magnetické monopóly)* s hustotou

$$\rho^{(m)} \equiv \rho^{(m)}(\mathbf{r}, t), \quad \text{XIII(16.2)}$$

bude při jejich pohybu vznikat proud $\mathbf{j}^{(m)}$ magnetických nábojů (magnetický proud)

$$\mathbf{j}^{(m)} \equiv \mathbf{j}^{(m)}(\mathbf{r}, t). \quad \text{XIII(16.3)}$$

Veličiny vztahující se k magnetickým nábojům a proudům budeme označovat horním uzátvorkovaným indexem (m).

Je rozumné předpokládat, že pro magnetické náboje platí zákon zachování, což vyjádříme rovnicí

$$\frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}^{(m)} = 0 \quad \text{XIII(16.4)}$$

analogickou rovnicí kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \text{XIII(16.5)}$$

pro elektrické náboje a proudy.

První sérii Maxwellových rovnic

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad \text{XIII(16.6)}$$

ponecháme beze změny, jelikož je tato soustava kompatibilní s rovnicí XIII(16.5). Připomeneme si tento postup: Aplikací operace div na první rovnici XIII(16.6) dostaneme

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{D} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

což je rovnice XIII(16.5).

Druhou sérii

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

je nutno modifikovat tak, aby byla kompatibilní s předpokládaným zákonem XIII(16.4) zachování magnetického náboje. Toho lze očividně dosáhnout tak, že položíme

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{j}^{(m)}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = \rho^{(m)}. \quad \text{XIII(16.7)}$$

Kompatibilitu těchto rovnic s rovnicí XIII(16.4) prověříme stejně jako u rovnic XIII(16.6) a XIII(16.5).

Soustava rovnic XIII(16.6) a XIII(16.7) je hledaná soustava rovnic elektrodynamiky, v níž (kromě elektrických nábojů a proudů) existují také magnetické náboje a proudy.

Všimněme si nejdříve vlastností této soustavy při operaci prostorové inverze $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$. Z článku II.7 víme, že

$$\mathbf{D}' = -\mathbf{D}, \quad \mathbf{E}' = -\mathbf{E}, \quad \mathbf{H}' = +\mathbf{H}, \quad \mathbf{B}' = +\mathbf{B}, \quad \text{XIII(16.8)}$$

$$\rho' = +\rho, \quad \mathbf{j}' = -\mathbf{j}. \quad \text{XIII(16.9)}$$

Jelikož při operaci div se prostorovou inverzí $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ mění znaménko ($\operatorname{div}' = -\operatorname{div}$), plyne z XIII(16.7), že pro magnetické náboje a proudy platí

$$\rho'^{(m)} = -\rho^{(m)}, \quad \mathbf{j}'^{(m)} = +\mathbf{j}^{(m)}. \quad \text{XIII(16.10)}$$

Hustota $\rho^{(m)}$ magnetického náboje je tedy pseudoskalárem a vektor $\mathbf{j}^{(m)}$ proudové hustoty magnetických nábojů je *axiálním vektorem*. To jsou výrazně odlišné transformační vlastnosti od elektrických veličin ρ a \mathbf{j} .

Soustava rovnic XIII(16.6) a XIII(16.7) má řadu transformačních vlastností, z nichž uvedeme pouze tyto: Soustava těchto rovnic se nezmění při transformaci (vzájemné záměně)

$$\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} \leftrightarrow -\mathbf{B}, \quad \rho \leftrightarrow -\rho^{(m)}, \quad \mathbf{j} \leftrightarrow \mathbf{j}^{(m)}. \quad \text{XIII(16.11)}$$

Z toho můžeme usoudit, co bude analogií Lorentzovy síly

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + [\mathbf{j}, \mathbf{B}], \quad \text{XIII(16.12)}$$

resp. (pro bodový náboj e)

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]). \quad \text{XIII(16.13)}$$

Uvážíme-li kromě XIII(16.11) ještě transformační vlastnosti XIII(16.8) a XI-II(16.10) vůči prostorové inverzi, pak pro hustotu $\mathbf{f}^{(m)}$ síly působí na magnetické náboje a proudy v elektromagnetickém poli získáme rovnici

$$\mathbf{f}^{(m)} = \rho^{(m)} \mathbf{H} - [\mathbf{j}^{(m)}, \mathbf{D}]. \quad \text{XIII(16.14)}$$

Pro bodový magnetický náboj g (*magnetický monopol*) je celková síla

$$\mathbf{F}^{(m)} = g(\mathbf{H} - [\mathbf{v}, \mathbf{D}]). \quad \text{XIII(16.15)}$$

Pro magnetický náboj v klidu je $\mathbf{F}^{(m)} = g\mathbf{H}$, což představuje magnetickou analogií síly $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$.

Přejdeme nyní ke kovariantnímu přepisu rovnic elektrodynamiky s magnetickými náboji. Rovnicím XIII(16.4) a XIII(16.5) dáme kovariantní tvar tak, že zavedeme čtyřvektor j_μ hustoty elektrického proudu

$$j_\mu \equiv (\mathbf{j}, ic\rho) \quad \text{XIII(16.16)}$$

a čtyřvektor g_μ proudové hustoty magnetických nábojů

$$g_\mu \equiv (\mathbf{j}^{(m)}, ic\rho^{(m)}). \quad \text{XIII(16.17)}$$

Místo XIII(16.4) a XIII(16.5) budeme mít

$$\partial_\mu j_\mu = 0, \quad \partial_\mu g_\mu = 0. \quad \text{XIII(16.18)}$$

Podobně upravíme rovnice XIII(16.6) a XIII(16.7). Jelikož nyní není $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$, nelze položit $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, a tudíž nelze zavést tenzor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$. V daném

případě budeme postupovat takto: Zavedeme antisymetrický tenzor

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}, \quad \text{XIII(16.19)}$$

přičemž komponenty $F_{\mu\nu}$ jsou stejné jako u tenzoru XIII(4.13), tj.

$$F_{4j} = iE_j, \quad i\mathbf{E} \equiv (F_{41}, F_{42}, F_{43}), \quad \text{XIII(16.20)}$$

$$F_{ij} = ce_{ijk}B_k, \quad c\mathbf{B} \equiv (F_{23}, F_{31}, F_{12}). \quad \text{XIII(16.21)}$$

Soustavu XIII(16.6) pak převedeme do kovariantního tvaru

$$\partial_\nu F_{\mu\nu} = \frac{j_\mu}{c\epsilon_0}, \quad \text{XIII(16.22)}$$

jenž je shodný s rovnicemi XIII(7.2) standardní elektrodynamiky. Tato formální shoda nepřekvapuje, jelikož soustavu XIII(16.6) jsme převzali beze změny ze standardní elektrodynamiky. Znovu však upozorňujeme na rozdíl, jenž záleží v tom, že nyní není $\text{div } \mathbf{B} = 0$, a tedy ani $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Obdobně upravíme soustavu XIII(16.7). Zavedeme tenzor $G_{\lambda\alpha} = -G_{\alpha\lambda}$, v němž je postavení vektorů \mathbf{E} a \mathbf{B} navzájem obrácené

$$G_{ij} = -e_{ijk}E_k, \quad -\mathbf{E} \equiv (G_{23}, G_{31}, G_{12}), \quad \text{XIII(16.23)}$$

$$G_{4j} = \frac{i}{\epsilon_0} B_j, \quad \frac{i}{\epsilon_0} \mathbf{B} \equiv (G_{41}, G_{42}, G_{43}). \quad \text{XIII(16.24)}$$

Pomocí tohoto tenzoru můžeme soustavu XIII(16.7) nahradit kovariantní soustavou

$$\partial_\lambda G_{\lambda\alpha} = \frac{g_\alpha}{c\epsilon_0}. \quad \text{XIII(16.25)}$$

Mezi oběma tenzory $F_{\mu\nu}$ a $G_{\lambda\alpha}$ existuje jednoduchý vztah, který je zřejmý přímo z jejich definice, a sice

$$G_{\lambda\alpha} = -\frac{i}{2} e_{\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad \text{XIII(16.26)}$$

Tenzor $G_{\lambda\alpha}$ je tak duální k tenzoru $F_{\mu\nu}$ (viz článek XIII.7). Rovnicemi XIII(16.26) je tak modifikována soustava XIII(7.6) Maxwellovy elektrodynamiky.

Řešení rovnic XIII(16.22) a XIII(16.26) lze vyjádřit pomocí dvou potenciálů (N. CABIBBO, E. FERRARI, 1962), jež označíme A_μ , B_μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + e_{\mu\nu\lambda} \partial_\lambda B_\lambda. \quad \text{XIII(16.27)}$$

Při $B_\lambda = 0$ se $F_{\mu\nu}$ redukuje na známý tenzor Maxwellovy elektrodynamiky.

Potenciály A_μ , B_μ lze překalibrovat

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad B'_\lambda = B_\lambda + \partial_\lambda \Gamma, \quad \text{XIII(16.28)}$$

aniž by se změnila tenzory $F_{\mu\nu}$, $G_{\lambda\alpha}$. Nyní jsou tedy dvě kalibrační funkce Λ a Γ . To nám umožní zvolit tyto kalibrační funkce tak, aby potenciály A_μ a B_μ vyhovovaly Lorentzově podmínce

$$\partial_\mu A_\mu = 0, \quad \partial_\lambda B_\lambda = 0. \quad \text{XIII(16.29)}$$

Místo XIII(16.22) a XIII(16.26) získáme rovnice pro potenciály

$$-\square A_\mu = \frac{j_\mu}{c\epsilon_0}, \quad -\square B_\mu = \frac{g_\mu}{c\epsilon_0}. \quad \text{XIII(16.30)}$$

Elektrodynamika s magnetickými náboji má řadu teoreticky atraktivních prvků, jež spočívají v symetrii těchto rovnic. Magnetické monopóly však dosud (1982) nalezeny nebyly. Nejsou-li magnetické monopóly, pak podle slov P. Diraca Příroda nevyužila možnosti, jež objevil člověk při matematickém popisu elektromagnetických jevů¹⁸⁾.

¹⁸⁾ P. A. M. DIRAC: Proc. Roy. Soc. A 133 (1931), 60.

Řešené úlohy

Ke kapitole I

1. Vypočítejte energii vzájemného působení dvou elektrických dipólů.

Řešení. Dipól \mathbf{p}_1 sídlící v počátku souřadnic budí v bodě \mathbf{r} pole (viz I(4.11))

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{p}_1 \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}_1].$$

Interakční energie s dipólem \mathbf{p}_2 je $-\mathbf{p}_2 \mathbf{E}^{(1)}$, tj.

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 - 3(\mathbf{p}_1 \mathbf{n})(\mathbf{p}_2 \mathbf{n})].$$

2. Určete siločáry elektrického dipólového momentu.

Řešení. Dipól orientujeme ve směru osy z , pak podle I(4.4) je

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} p \cos \vartheta.$$

Radiální (E_r) a polární (E_ϑ) složky jsou

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{2p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Rovnice siločar ($dr/E_r = r d\vartheta/E_\vartheta$) má řešení

$$r = C \sin^2 \vartheta,$$

kde C je integrační konstanta.

3. Vypočítejte potenciál rovnoměrně nabitě kuličky s plošnou hustotou náboje $\eta = e/(4\pi a^2)$.

Řešení. Použijeme vzorce I(3.10) pro potenciál, v němž položíme $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| =$

$(r^2 - 2ar \cos \vartheta + a^2)^{1/2}$, $ds' = 2\pi a^2 \sin \vartheta d\vartheta$, kde a je poloměr kuličky. Integrací pak dostaneme

$$\Phi = \frac{\eta a^2}{2\epsilon_0 a r} [(a^2 - 2ar \cos \vartheta + r^2)^{1/2}]_0^\pi = \frac{\eta a^2}{2\epsilon_0 a r} (a + r - |a - r|),$$

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a}, \quad (r \leq a),$$

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (r \geq a).$$

Intenzity $E_{1n} = 0$, $E_{2n} = -e/(4\pi\epsilon_0 r^2)$ splňují na rozhraní podmínku I(3.14).

$$\text{Interakční energie } U = \frac{1}{2} \int \eta \Phi ds = \frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

4. Totéž pro kuličku rovnoměrně nabitou s objemovou hustotou $\rho = e/V$, kde $V = 4\pi a^3/3$ je objem kuličky.

Řešení. Pomocí vzorce I(6.5) obdobnou integrací jako v předešlém příkladě dostaneme

$$U = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a},$$

$$\Phi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2a^2} \right), \quad (r \leq a),$$

$$\Phi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (r \geq a).$$

5. Určete rovnici siločar elektrostatického pole vytvořeného soustavou bodových nábojů ležících na jedné přímce. Uvažujte speciální případ dvou nábojů e_1, e_2 a určete rovnici siločáry, které vychází z náboje $e_1 > 0$ pod úhlem α . Určete maximální úhel α_{\max} , při němž siločára vycházející z náboje e_1 ještě končí v náboji $e_2 < 0$.

Řešení. Zavedeme cylindrické souřadnice r, φ, z tak, že osa z je ve směru přímky, na níž leží náboje. Ze symetrie úlohy je vidět, že potenciál Φ nezávisí na úhlu φ . Z rovnice siločar

$$\frac{dr}{(\partial \Phi / \partial r)} = \frac{dz}{(\partial \Phi / \partial z)}$$

plyne

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} dz - \frac{\partial \Phi}{\partial z} dr = 0. \quad (1)$$

Z potenciálu

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_A e_A [(z - z_A)^2 + r^2]^{-1/2}, \quad (2)$$

kde z_A jsou polohy nábojů, dostaneme rovnici siločar. Integraci rovnice (1) provedeme metodou integrujícího faktoru μ . Po vynásobení rovnice (1) faktorem $\mu \equiv \mu(r, z)$ máme

$$M dr + N dz = -\mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} dr + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial r} dz = 0. \quad (3)$$

Z podmínky integrability $(\partial M/\partial z) \equiv (\partial N/\partial r)$ máme

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\mu \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0. \quad (4)$$

V cylindrických souřadnicích bude $\nabla^2 \Phi = 0$ mít tvar (viz dodatek I)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0. \quad (5)$$

Je vidět, že lze položit $\mu = r$, což po dosazení do (3) dá hledanou rovnici siločar

$$\sum_A e_A \cos \vartheta_A = \text{konst}, \quad (6)$$

kde $\cos \vartheta = (z - z_A)/[(z - z_A)^2 + r^2]^{1/2}$.

Pro dva náboje je $e_1 \cos \vartheta_1 + e_2 \cos \vartheta_2 = \text{konst}$. K určení konstanty vezmeme bod ležící v místě náboje e_1 . Pro tento bod je $\vartheta_2 = \pi$, takže pro siločáru vycházející z náboje e_1 pod úhlem α bude platit $e_1 \cos \vartheta_1 + e_2 \cos \vartheta_2 = e_1 \cos \alpha - e_2$. Označíme-li podíl nábojů $q = e_1/e_2$, pak je

$$q \cos \vartheta_1 + \cos \vartheta_2 = q \cos \alpha - 1. \quad (7)$$

Tato siločára vstupuje do náboje e_2 pod úhlem $\vartheta_2 = \beta$. Poněvadž odpovídající úhel $\vartheta_1 = 0$, pak z rovnice (7) plyne

$$\cos \beta = q \cos \alpha - q - 1.$$

Úhel α_{\max} dostaneme z podmínky $\beta = 0$, což vede k rovnici

$$\cos \alpha_{\max} = \frac{q+2}{q}.$$

6. Vypočítejte elektrické pole vytvořené nekonečně dlouhým lineárním drátem s konstantní hustotou κ na jednotku délky.

Řešení. Drát nechť má směr osy z . Z Gaussovy věty $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = e/\epsilon_0$ pak plyne

$$2\pi r h E_r = e/\epsilon_0, \quad (1)$$

kde h je délka pláště válce. Z (1) plyne

$$E_r = \frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (2)$$

Jelikož $E_r = -\partial \Phi/\partial r$, potenciál $\equiv \Phi(r, z)$ bude

$$\Phi = -\frac{\kappa}{2\pi\epsilon_0} \ln r.$$

7. Řešte předešlou úlohu pro drát konečné délky a vyšetřete ekvipotenciální plochy vzniklého elektrostatického pole.

Řešení. Drát nechť leží v intervalu $-a \leq z \leq a$. Je-li celkový náboj roven e , pak délková hustota $\kappa = e/(2a)$. Potenciál $\Phi(r, z)$ určíme z rovnice

$$\Phi(r, z) = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 a} \int_{-a}^a \frac{dz'}{[r^2 + (z' - z)^2]^{1/2}}.$$

Elementární integrace vede k potenciálu

$$\Phi(r, z) = \frac{e}{8\pi\epsilon_0 a} \ln \left| \frac{z+a + [(z+a)^2 + r^2]^{1/2}}{z-a + [(z+a)^2 + r^2]^{1/2}} \right|.$$

K nalezení rovnice ekvipotenciálních ploch je výhodné položit $z_1 = z + a$, $z_2 = z - a$, $R_{1,2} = (r^2 + z_{1,2}^2)^{1/2} = (x^2 + y^2 + z_{1,2}^2)^{1/2}$. Rovnice $\Phi = C$ pak implikuje

$$\frac{z_1 + R_1}{z_2 + R_2} = C.$$

Vezmeme-li v úvahu, že $z_1 - z_2 = 2a$, pak rovnici ekvipotenciálních ploch zapíšeme ve tvaru

$$R_1 + R_2 = 2a \frac{C+1}{C-1} = \text{konst}.$$

Ekvipotenciální plochy jsou tedy rotační elipsoidy, jejichž ohniska jsou v koncích úsečky.

8. Tenký vodivý drát je stočen do kružnice poloměru a . Vypočítejte potenciál $\Phi(r)$ v libovolném bodě prostoru.

Řešení. Označíme-li lineární hustotu náboje $\kappa = e/(2\pi a)$, pak potenciál je

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint \frac{\kappa(l') dl'}{R},$$

kde $R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2}$. Kružnici jsme zvolili v rovině $z = 0$. Zavedeme souřadnice x' , y' bodů na kružnici $x' = a \cos \alpha$, $y' = a \sin \alpha$ a bodů vně

kružnice $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$. Jelikož element délky kružnice $dl' = a d\alpha$, bude

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{\kappa a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{[r^2 + a^2 - 2ar \sin \vartheta \cos(\alpha - \varphi)]^{1/2}}.$$

S ohledem na symetrii úlohy stačí uvažovat potenciál Φ v rovině $y = 0$, tj. $\varphi = 0$. Potenciál budeme počítat z rovnice

$$\Phi = \frac{e}{8\pi^2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{[r^2 + a^2 - 2ar \sin \vartheta \cos \alpha]^{1/2}}.$$

Zavedeme úhel $\beta = \alpha/2$ a označíme

$$A = [r^2 + a^2 - 2ar \sin \vartheta]^{1/2}, \quad k^2 = \frac{1}{A^2} 4ar \sin \vartheta < 1,$$

čímž pro potenciál dostaneme vyjádření

$$\Phi(r, \vartheta) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 A} K(k), \quad (1)$$

kde

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{(1 - k^2 \cos^2 \beta)^{1/2}}$$

je eliptický integrál. Pro body na ose z (tj. $\vartheta = 0$, $r = z$) se $\Phi(z)$ vyjádří pomocí elementárních funkcí

$$\Phi(z) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} (z^2 + a^2)^{-1/2}. \quad (2)$$

Intenzita $E_z = -d\Phi/dz$ je maximální při $z = a/\sqrt{2}$.

Na velkých vzdálenostech $|z| \gg a$ je

$$\Phi(z) \cong \frac{e}{4\pi\epsilon_0 z},$$

tj. kružnice působí jako bodový náboj.

9. Z kvantové mechaniky je známo, že elektron v základním stavu vodíkového atomu vytváří oblak s rozdělením náboje $\rho = -e_0(\pi a^3)^{-1} \exp(-2r/a)$, kde e_0 je elementární náboj, a je Bohrovův poloměr ($a \cong 0,529 \cdot 10^{-10}$ m). Vypočtěte elektrické pole atomu.

Řešení. Elektrické pole $\Phi^{(e)}$ vytvořené elektronovým oblakem budeme hledat pomocí rovnice $\nabla^2 \Phi^{(e)} = -\rho/\epsilon_0$. S ohledem na sférickou symetrii hustoty ρ se jedná o rovnici

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi^{(e)}}{dr} \right) = \frac{e_0}{\pi\epsilon_0 a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right). \quad (1)$$

Zavedeme novou proměnnou $\chi = r\Phi^{(e)}$, čímž dostaneme jednoduchou rovnici

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} = \frac{e_0}{\pi\epsilon_0 a^3} r \exp\left(-\frac{2r}{a}\right),$$

z níž plyne

$$\Phi^{(e)}(r) = -\frac{e_0}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{a}{r} - \left(1 + \frac{a}{r}\right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \right]. \quad (2)$$

Potenciál $\Phi^{(e)}(r)$ je konečný v bodě $r=0$ a $\Phi(\infty)=0$. Přidáme-li k (2) ještě potenciál $e_0(4\pi\epsilon_0 r)^{-1}$ vytvořený (bodovým) atomovým jádrem, dostaneme výsledné pole atomu

$$\Phi(r) = \frac{e_0}{4\pi\epsilon_0 a} \left(1 + \frac{a}{r}\right) \exp\left(-\frac{2r}{a}\right). \quad (3)$$

Při $r \ll a$ je $\Phi(r) \cong e_0/(4\pi\epsilon_0 r)$, což odpovídá poli jádra. Na velkých vzdálenostech $r \gg a$ je pole jádra odstíněno elektronovým oblakem, což vede k exponenciálnímu poklesu

$$\Phi(r) \cong \frac{e_0}{4\pi\epsilon_0 a} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right).$$

Interakční energii elektronu s jádrem vypočteme z rovnice

$$U = e_0 \int \frac{\rho(r) d^3r}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e_0^2}{4\pi^2\epsilon_0 a^3} \int_0^\infty 4\pi r^2 e^{-2r/a} dr,$$

elementární integrací zjistíme, že

$$U = -\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 a},$$

což je interakční energie dvou bodových nábojů $e_1 = +e_0$, $e_2 = -e_0$ ve vzdálenosti $r = a$.

10. Elektronové oblaky elektronů v atomu helia popíšeme prostorově rozloženým nábojem

$$\rho(r) = -\frac{8e_0}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{4r}{a}\right).$$

Vypočtěte interakční energii obou elektronů.

Řešení. V interakční energii

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{R} \rho(r_1)\rho(r_2) d^3r_1 d^3r_2$$

položíme $r = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \vartheta)^{1/2}$, $d^3r_1 = 4\pi r_1^2 dr_1$, $d^3r_2 = 2\pi r_2^2 \sin \vartheta d\vartheta dr_2$ a prointegrujeme v mezích $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq r_{1,2} \leq \infty$, což dá

$$U = \frac{\pi}{\epsilon_0} \int_0^\infty r_1 \rho(r_1) dr_1 \int_0^\infty r_2 \rho(r_2) dr_2 \int_0^\pi R^{-1} 2r_1r_2 \sin \vartheta d\vartheta.$$

Integrál přes ϑ je roven $R = (r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \vartheta)^{1/2}$, což po dosazení mezi dá

$$U = \frac{2\pi}{\epsilon_0} \int_0^\infty r_1 \rho(r_1) dr_1 \int_0^\infty r_2 \rho(r_2) [r_1 + r_2 - |r_1 - r_2|] dr_2.$$

Vzniklý integrál přes r_2 rozložíme na součet dvou integrálů

$$\int_0^\infty = \int_0^{r_1} + \int_{r_1}^\infty.$$

Po provedení výpočtu dostaneme

$$U = \frac{5e_0^2}{16\pi\epsilon_0 a}.$$

11. Jakému rozdělení nábojů odpovídá potenciál $\Phi(r) = e(4\pi\epsilon_0 r)^{-1} \exp(-r/L)$. Totéž pro potenciál $\Phi(r) = e_0(4\pi\epsilon_0 a)^{-1}(1 + ar^{-1}) \exp(-2r/a)$.

Řešení. Z potenciálu $\Phi(r)$ vypočteme intenzitu $E_r = -d\Phi/dr$ a pomocí ní tok intenzity přes kouli o poloměru r . Dostaneme tak

$$\oint E_r ds = \oint E_r r^2 d\Omega = \frac{e}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{r}{L}\right) \exp\left(-\frac{r}{L}\right).$$

Při $r \rightarrow \infty$ (tj. $r \gg L$) je tok nulový, takže celkový náboj generující daný potenciál je nulový. Vezmeme-li $r \rightarrow 0$ (tj. $r \ll L$), bude $\oint E_r ds = e/\epsilon_0$. V bodě $r=0$ tedy sídlí bodový náboj $+e$, okolí je obklopeno atmosférou náboje s hustotou $\rho = -\epsilon_0 \nabla^2 \Phi$, tj.

$$\rho = -\frac{e}{4\pi r L^2} \exp\left(-\frac{r}{L}\right), \quad \int_0^\infty 4\pi r^2 \rho dr = -e.$$

Jde tedy o následující elektricky neutrální soustavu: v počátku je bodový náboj $+e$, a ten je obklopen atmosférou záporného náboje $\rho(r) = -e(4\pi L^2 r)^{-1} \exp(-r/L)$ o celkové hodnotě $-e$. Při $r \rightarrow 0$ ($r \ll L$) je $\Phi(r) \cong e(4\pi\epsilon_0 r)^{-1}$, což odpovídá poli bodového náboje.

Rozbor pro potenciál $\Phi(r) = e_0(4\pi\epsilon_0 a)^{-1}(1 + ar^{-1}) \exp(-2r/a)$ je obdobný. Dostaneme, že v počátku $r=0$ sídlí bodový náboj $+e_0$ obklopený spojitým rozložením záporného náboje $\rho(r) = -e_0(\pi a^3)^{-1} \exp(-2r/a)$ o celkovém množství $e = -e_0$. Toto rozložení náboje odpovídá základnímu stavu vodíkového atomu (viz příklad 9).

12. Odvoďte rovnici I(7.9).

Řešení. Jedná se o modifikaci Stokesovy věty $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = \int d\mathbf{s} \cdot \text{rot } \mathbf{A}$ na případ, kdy místo skalárního součinu je součin vektorový. Integrál $\oint [\mathbf{B} \times d\mathbf{l}]$ vynásobíme skalárně konstantním vektorem \mathbf{a} . Postupně dostáváme

$$\mathbf{a} \oint \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \oint [\mathbf{a} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{l} = \int \nabla \times [\mathbf{a} \times \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{s} = \int [\mathbf{a} \text{ div } \mathbf{B} - (\mathbf{a} \nabla) \mathbf{B}] \cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{a} \int (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

jelikož $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Jelikož vektor \mathbf{a} je libovolný, je také

$$\oint \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = -\int (d\mathbf{s} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

13. Odvoďte rovnici I(7.11).

Řešení. Moment sil je roven součtu momentů elementárních sil. Tento moment \mathfrak{R} je dán rovnicí

$$\mathfrak{R} = \oint \mathbf{r} \times [\mathcal{I} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}] = \mathcal{I} \oint (\mathbf{B} \mathbf{r}) d\mathbf{l} - \mathcal{I} \oint \mathbf{B} (\mathbf{r} d\mathbf{l}).$$

V homogenním poli $\mathbf{B} = \text{konst}$ je $\oint \mathbf{B} (\mathbf{r} d\mathbf{l}) = \mathbf{B} \int d\mathbf{s} \cdot \text{rot } \mathbf{r} = 0$, jelikož $\text{rot } \mathbf{r} = 0$. Je tedy

$$\mathfrak{R} = \mathcal{I} \oint (\mathbf{B} \mathbf{r}) d\mathbf{l}.$$

Stejným postupem jako v předešlém příkladě dostáváme

$$\oint (\mathbf{B} \mathbf{r}) d\mathbf{l} = -\oint \mathbf{B} \times d\mathbf{s},$$

takže je

$$\mathfrak{R} = \mathcal{I} \mathbf{s} \times \mathbf{B}.$$

14. Dokážte, že vektorový potenciál I(9.7) splňuje kalibrační podmínku $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

Řešení. Položíme $R \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}(\mathbf{r})$ a rozepíšeme $\text{div } \mathbf{A} = \partial A_i / \partial x_i$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int d^3r' j'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\mu}{4\pi} \int d^3r' j'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R}\right).$$

Pomocí vektorové identity upravíme integrand

$$j'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{R} \frac{\partial j'_i}{\partial x'_i} + \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} j'_i\right).$$

S ohledem na rovnici kontinuity pro stacionární proud $(\partial j'_i / \partial x'_i) = 0$ je

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} j'_i\right) d^3r' = -\frac{\mu}{4\pi} \oint \frac{1}{R} j'_n ds'.$$

V stacionárním případě je na rozhraní $j_{1n} - j_{2n} = 0$, proto je-li vně látky dielektrikum ($j_{1n} = 0$), je také $j_{2n} \equiv j_n = 0$; povrchový integrál vymizí, proto je $\text{div } \mathbf{A} = 0$.

15. Dokažte, že vektorový potenciál homogenního magnetického pole $\mathbf{B} \equiv (0, 0, B)$ lze vzít ve tvaru $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{B}, \mathbf{r}]$ nebo $A_x = -yB$, $A_y = xB$, $A_z = 0$. Najděte kalibrační funkci $f(\mathbf{r})$ mezi oběma potenciály.

Řešení. Správnost se prověří přímo z definice $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$. Pro kalibrační funkci ($\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$) platí

$$-yB = -\frac{1}{2}yB + \frac{\partial f}{\partial x}, \quad 0 = \frac{1}{2}xB + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Je tedy $f = f(x, y)$, přičemž

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}yB, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}xB.$$

Řešení je $f(x, y) = -\frac{1}{2}xyB$.

16. Odvoďte vzorec I(9.9).

Řešení. Užijeme vektorové identity $\text{rot}(f\mathbf{a}) = f \text{rot } \mathbf{a} + [\mathbf{a}, \nabla f]$ pro $f = 1/R$, $\mathbf{a} = \mathbf{j}(\mathbf{r}')$ je při derivacích podle \mathbf{r} konstantním vektorem. Po dosazení $\text{rot } \mathbf{a} = 0$, $\nabla f = -\mathbf{R}/R^3$ plyne I(9.9).

17. Dokažte platnost rovnice I(9.16).

Řešení. Vyjdeme z identity

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} (x'_i x'_k j'_i) \equiv x'_k j'_i + x'_i j'_k,$$

při jejíž úpravě byla použita rovnice kontinuity pro stacionární proud ($\partial j'_i / \partial x'_i = 0$). Integrací uvedené identity a užitím Gaussova teorému dostaneme

$$\int (x'_i j'_k + x'_k j'_i) d^3 r' = \int \frac{\partial}{\partial x'_i} (x'_i x'_k j'_i) d^3 r' = \int \frac{\partial}{\partial x'_i} (x'_i x'_k j'_i) d^3 r' = \oint x'_i x'_k j'_i ds'_i.$$

Skalární součin $j'_i ds'_i = \mathbf{j}' \cdot d\mathbf{s}' = j'_n ds'_n$. Jelikož na povrchu je normálová komponenta $j'_n = 0$, je vztah I(9.16) dokázán.

Ke kapitole II

1. Předpokládejte místo lokálního vztahu $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$ nelokální (funkcionální) závislost

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int K(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d^3 r'$$

a prozkoumejte odpovídající změny pro elektrickou intenzitu \mathbf{E} a potenciál Φ .

Řešení. Substitucí $\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{R}$ budeme mít

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \int K(\mathbf{R}) \mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) d^3 \mathbf{R}. \quad (1)$$

Složky vektoru \mathbf{r} označíme x_j , složky vektoru \mathbf{R} budou X_k . Hlavní příspěvek dá malé hodnoty $\mathbf{R} \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, proto uijeme rozvoj

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r}) - X_j \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} X_j X_k \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Po dosazení do (1) dostaneme

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = k_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_j} \int X_j K(\mathbf{R}) d^3 \mathbf{R} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x_j \partial x_k} \int X_j X_k K(\mathbf{R}) d^3 \mathbf{R}.$$

S ohledem na izotropii $K(\mathbf{R})$ je

$$\int X_j K(\mathbf{R}) d^3 \mathbf{R} = 0, \quad \int X_j X_k K(\mathbf{R}) d^3 \mathbf{R} = \frac{1}{3} \delta_{jk} \int R^2 K(\mathbf{R}) d^3 \mathbf{R}.$$

Zavedeme označení

$$\varepsilon \equiv k_0 = \int K(\mathbf{R}) d^3 \mathbf{R}, \quad k_2 = \frac{1}{6} \int R^2 K(\mathbf{R}) d^3 \mathbf{R}, \quad r_0^2 = -k_2/k_0.$$

Je tedy

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon (1 - r_0^2 \nabla^2) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2)$$

a rovnice $\text{div } \mathbf{D} = \rho$ implikuje

$$(1 - r_0^2 \nabla^2) \text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Z rovnice $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ vyjádříme potenciál $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$, což dá modifikaci Laplaceovy—Poissonovy rovnice

$$(1 - r_0^2 \nabla^2) \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}. \quad (4)$$

Snadno se přesvědčíme, že při $\rho = 0$ má rovnice (4) partikulární řešení r^{-1} a $r^{-1} \exp(-r/r_0)$, z nichž sestojíme řešení

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r}{r_0}\right) \right] \quad (5)$$

konečné při všech r . V bodě $r = 0$ je

$$\Phi(0) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

a při $r \gg r_0$ přechází (5) v Coulombův potenciál.

Z rozptylu čísel lze usoudit, že Coulombův zákon platí až do vzdáleností $r \approx 10^{-15}$ m, proto oblast nelokální vazby je $r_0 \leq 10^{-15}$ m.

2. Provedte odvození rovnice II(6.11).

Řešení. Z definice II(6.10) plyne

$$d\mathcal{F}^* = d\mathcal{F} - \varepsilon_0 \mathbf{E} d\mathbf{E} - \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{H} - \mathbf{P} d\mathbf{E} - \mathbf{E} d\mathbf{P} - \mu_0 \mathbf{M} d\mathbf{H} - \mu_0 \mathbf{H} d\mathbf{M}.$$

Ve výrazu II(6.9) pro $d\mathcal{F}$ dosadíme $d\mathbf{D} = \varepsilon_0 d\mathbf{E} + d\mathbf{P}$, $d\mathbf{B} = \mu_0 d\mathbf{H} + \mu_0 d\mathbf{M}$; po jednoduché úpravě dospějeme k II(6.11).

3. Experimentálně je dokázáno, že magnetické pole neproniká do supravodiče. Předpokládejte, že v supravodiči platí Londonův vztah $\text{rot } \mathbf{j} = -\lambda^2 \mathbf{H}$ mezi polem \mathbf{H} a supravodivým proudem \mathbf{j} , a ukažte, že tím lze vysvětlit uvedené chování supravodičů v magnetickém poli.

Řešení. Rovnici $\text{rot } \mathbf{j} = -\lambda^2 \mathbf{H}$ budeme pokládat za materiálový vztah pro supravodiče (místo obvyklého $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$). Vztah mezi \mathbf{j} a \mathbf{H} nemůže být algebraický, jelikož \mathbf{j} je polární vektor a \mathbf{H} vektor axiální (viz čl. II.7), proto se volí diferenciální vztah. Maxwellovu rovnici (pro stacionární proud) $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ pokládáme platnou i v supravodiči. Aplikujeme na tuto rovnici operaci rotace a užijeme Londonova vztahu; po jednoduché úpravě dospějeme k rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \lambda^2 \mathbf{H} = 0.$$

V jednorozměrném případě ($d^2 H/dz^2 - \lambda^2 H = 0$) má rovnice řešení ubývající s hloubkou exponenciálně $H = H_0 \exp(-\lambda z)$, čímž se vystihuje uvedené stínění magnetického pole supravodičem.

4. Molekuly látky mají vlastní dipólové momenty (tzv. polární molekuly), jež jsou orientovány chaoticky, takže výsledný dipólový moment (a tedy i polarizace) jsou rovny nule (při vnějším poli $\mathbf{E} = 0$). Vnější elektrické pole natáčí tyto dipóly do směru pole a vytváří tak polarizaci prostředí. Určete polarizaci \mathbf{P} prostředí.

Návod: určete nejdříve střední dipólový moment jedné molekuly do směru pole.

Řešení: Známa barometrická formule praví, že hustota částic se mění v závislosti na potenciální energii U podle vztahu $n = n_0 \exp(-U/k_B \mathcal{T})$, kde k_B je Boltzmannova konstanta a \mathcal{T} absolutní teplota. V daném případě elektrický dipól \mathbf{p} získá v poli \mathbf{E} potenciální energii $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \vartheta$, kde ϑ je úhel mezi směrem pole \mathbf{E} a dipólem \mathbf{p} . Počet molekul dN , jejichž dipóly budou orientovány do prostorového úhlu $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$, bude úměrný výrazu $\exp(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} / k_B \mathcal{T}) \cdot \sin \vartheta d\vartheta$. Odtud plyne, že pravděpodobnost $d\omega(\vartheta)$ toho, že dipól bude svírat se směrem pole úhel mezi ϑ a $\vartheta + d\vartheta$, je

$$d\omega(\vartheta) = \frac{1}{Z} \exp(\lambda \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta, \quad (1)$$

kde

$$\lambda = \frac{pE}{k_B \mathcal{T}} \quad (2)$$

a Z je normovací faktor určený podmínkou $\int_0^\pi d\omega(\vartheta) = 1$, tj.

$$Z = \int_0^\pi \exp(\lambda \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = \frac{1}{\lambda} (e^\lambda - e^{-\lambda}). \quad (3)$$

Složka dipólu \mathbf{p} do směru pole je $p \cos \vartheta$. Střední hodnotu vypočteme pomocí pravděpodobnosti (1)

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \int_0^\pi \cos \vartheta d\omega(\vartheta) = \frac{1}{Z} \int_0^\pi \cos \vartheta \exp(\lambda \cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta.$$

Z výrazu (3) je vidět, že $\langle \cos \vartheta \rangle$ se dá vyjádřit pomocí Z takto

$$\langle \cos \vartheta \rangle = \frac{1}{Z} \frac{dZ}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \ln Z. \quad (4)$$

Jednoduchým výpočtem dostaneme

$$\langle \cos \vartheta \rangle \equiv L(\lambda) \equiv \text{cth } \lambda - \frac{1}{\lambda}. \quad (5)$$

Závislost $L(\lambda)$ se nazývá *Langevinovou funkcí*.

Polarizace \mathbf{P} je pak

$$\mathbf{P} = n p \langle \cos \vartheta \rangle = n p L(\lambda), \quad (6)$$

kde n je počet molekul v objemové jednotce. Vzorec (6) určuje závislost \mathbf{P} na poli \mathbf{E} a teplotě \mathcal{T} . Pro pole a teploty vyhovující nerovnosti

$$\lambda \equiv \frac{pE}{k_B \mathcal{T}} \ll 1 \quad (7)$$

je

$$L(\lambda) = \frac{pE}{3k_B \mathcal{T}}, \quad (8)$$

a tudíž

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E},$$

kde susceptibilita

$$\kappa = \frac{np^2}{3\varepsilon_0 k_B \mathcal{T}}.$$

5. Magnetické momenty \mathcal{M} paramagnetických molekul jsou (v nepřítomnosti magnetického pole) orientovány chaoticky, takže při $\mathbf{H} = 0$ je i magnetizace $\mathbf{M} = 0$. Vnější pole \mathbf{H} orientuje dipóly do směru pole a vytváří nenulovou magnetizaci prostředí. Určete magnetizaci látky.

Návod. Magnetický dipól získá v poli \mathbf{H} energii $U = -\mu_0 \mathcal{M} \mathbf{H} = -\mu_0 \mathcal{M} H \cos \vartheta$. Postupujete jako v předešlé úloze ($|\mathcal{M}| = \mathcal{M}$).

Řešení. Fakticky se jedná o záměnu veličiny λ z předešlé úlohy veličinou

$$\Lambda = \frac{\mu_0 \mathcal{M} H}{k_B \mathcal{T}}.$$

Magnetizace M bude

$$M = n \mathcal{M} L(\Lambda).$$

Při $\Lambda \ll 1$ (slabá pole a nepříliš nízké teploty) je $L(\Lambda) \cong \Lambda/3$, a tudíž

$$M = \chi H,$$

kde susceptibilita paramagnetika

$$\chi = \frac{n \mathcal{M}^2 \mu_0}{3 k_B \mathcal{T}} \quad (1)$$

je určena známým Curieovým zákonem.

Získané výsledky je nutno modifikovat s ohledem na kvantování magnetického momentu. Podle kvantové fyziky je

$$\mathcal{M} = m \mathcal{M}_0, \quad (2)$$

kde $m = j, j-1, \dots, -j$ je magnetické kvantové číslo a j je kvantové číslo momentu hybnosti molekuly. Podobně je i energie $U_m = -m \mu_0 \mathcal{M}_0 H$. Veličina

$$w_m = \frac{1}{Z} \exp(\beta m), \quad (3)$$

kde

$$\beta = \frac{\mu_0 \mathcal{M}_0 H}{k_B \mathcal{T}} \quad (4)$$

určuje pravděpodobnost toho, že průmět magnetického momentu do směru pole bude $m \mathcal{M}_0$. Normovací faktor $1/Z$ je určen podmínkou

$$\sum_{m=-j}^j w_m = 1,$$

odkud plyne

$$Z = \sum_{m=-j}^j e^{\beta m} = \frac{\text{sh}(j + \frac{1}{2})\beta}{\text{sh}(\frac{1}{2}\beta)}. \quad (5)$$

Vzniklý součet jsme vypočetli podle vzorce pro součet geometrické řady.

Střední magnetické číslo $\langle m \rangle$ se vypočte ze vztahu

$$\langle m \rangle = \sum_m m w_m = \frac{1}{Z} \frac{d}{d\beta} \sum_m e^{\beta m},$$

tj.

$$\langle m \rangle = \frac{d}{d\beta} \ln Z. \quad (6)$$

Střední magnetický moment molekuly $\langle \mathcal{M} \rangle = \langle m \rangle \mathcal{M}_0$ a magnetizace

$$M = n \mathcal{M}_0 \frac{d}{d\beta} \ln Z. \quad (7)$$

Pro $\beta \ll 1$ vyjde $Z \cong (2j+1) \left[1 + \frac{\beta^2}{6} j(j+1) \right]$ a odtud susceptibilita

$$\chi = \frac{n \mu_0 \mathcal{M}_0^2}{3 k_B \mathcal{T}} j(j+1).$$

6. Zopakujte si elementární představy o pohybu elektronů v kovech a odvoďte vztah pro měrnou vodivost kovu.

Řešení. Elektron se pohybuje pod vlivem síly $e\mathbf{E}$ a „třecí síly“ — $\lambda\mathbf{v}$, takže pohybová rovnice je

$$m\dot{\mathbf{v}} + m \frac{\mathbf{v}}{\tau} = e\mathbf{E}.$$

(Koeficient odporu $\lambda m = 1/\tau$.) Rovnice má stacionární řešení

$$\mathbf{v} = \frac{e\tau}{m} \mathbf{E}.$$

Proudová hustota elektronů $\mathbf{J} = ne\mathbf{v} = ne^2\tau\mathbf{E}/m$, kde n je hustota elektronů. Srovnáním s Ohmovým zákonem $\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}$ získáme měrnou vodivost

$$\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}.$$

Z hodnot měrné vodivosti kovů dostaneme pro $\tau = 10^{-14}$ s.

7. Elektrony v atomu jsou pod vlivem časově proměnného elektrického pole $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$. Tím se indukují elektrický dipólový moment. Použijte této představy k určení frekvenční závislosti $\epsilon \equiv \epsilon(\omega)$ permitivity prostředí.

Řešení. Označíme-li \mathbf{r} výchylku elektronu pod vlivem síly $e\mathbf{E}$, pak z pohybové rovnice $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ získáme řešení

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m\omega^2} \mathbf{E}.$$

Dipólový moment $e\mathbf{r}$ vynásobíme hustotou elektronů n , čímž dostaneme polarizaci $\mathbf{P} = ne\mathbf{r}$

$$\mathbf{P} = -\frac{ne^2}{m\omega^2} \mathbf{E} \equiv \kappa\epsilon_0 \mathbf{E};$$

susceptibilita κ souvisí s permitivitou ε vztahem

$$\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \kappa) = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right), \quad \omega_p^2 \equiv \frac{ne^2}{m\varepsilon_0}.$$

8. Vylepšete předchozí model tak, že elektron kmitá v atomu s vlastní (kruhovou) frekvencí ω_0 , započtete také vliv „třecí síly“ (disipativní procesy).

Řešení. Pohybová rovnice elektronu bude

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\Gamma\mathbf{v} - m\omega_0^2\mathbf{r} + e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Vynuceným kmitům elektronu odpovídá řešení $\mathbf{r} = \mathbf{a} \exp(-i\omega t)$, a tudíž $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} = -i\omega\mathbf{r}$, $\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2\mathbf{r}$. Z rovnice (1) pak získáme řešení

$$\mathbf{r} = \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)} \mathbf{E}.$$

Po vynásobení dipólového momentu $e\mathbf{r}$ hustotou elektronu dostaneme polarizaci $\mathbf{P} = ne\mathbf{r} = \kappa\varepsilon_0\mathbf{E}$. Susceptibilita

$$\kappa(\omega) = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma}, \quad (2)$$

a tedy i permitivita

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0[1 + \kappa(\omega)] \quad (3)$$

jsou komplexní. Veličina ω_p definovaná vztahem

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \quad (4)$$

se nazývá *plazmovou* nebo *Langmuirovou frekvencí*.

V případě většího počtu vlastních frekvencí ω_{0i} a útlumových koeficientů Γ_i se (2) a (3) snadno zobecní na tvar

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \omega_p^2 \sum_i \frac{f_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_i} \right], \quad (5)$$

kde $f_i = n_i/n$ je tzv. *síla oscilátorů*.

9. Atom se nalézá v harmonickém elektrickém poli $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$ a slabém homogenním magnetickém poli \mathbf{B} . Určete tenzor polarizovatelnosti atomu. Použijte stejný model jako v úloze 8.

Řešení. Pohybová rovnice elektronu bude

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - m\Gamma\mathbf{v} + e\mathbf{E} + e[\mathbf{v}, \mathbf{B}].$$

Řešení budeme hledat ve tvaru $\mathbf{r} = \mathbf{a} \exp(-i\omega t)$; jednoduchým výpočtem dospějeme k rovnici

$$m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)\mathbf{r} = e\mathbf{E} - ie\omega[\mathbf{r}, \mathbf{B}]. \quad (1)$$

Jelikož pole \mathbf{B} je slabé, můžeme \mathbf{r} najít iterací. Při $\mathbf{B} = 0$ je

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)}.$$

Tuto hodnotu dosadíme do vektorového součinu $[\mathbf{r}, \mathbf{B}]$ v rovnici (1). Dostaneme vylepšenou hodnotu

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)} - i \frac{\omega e^2 [\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)}.$$

Složky dipólového momentu atomu $ex_i \equiv p_i$ dostaneme tak, že vektorový součin $[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$ rozepíšeme do složek $[\mathbf{E}, \mathbf{B}]_i = e_{ijk}E_jB_k$. Výsledkem je rovnice

$$p_i = \beta_{ij}E_j,$$

kde tenzor polarizovatelnosti

$$\beta_{ij} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)} \delta_{ij} - \frac{i\omega e^3 e_{ijk}B_k}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma)}.$$

10. Pro elektrickou susceptibilitu byla zjištěna frekvenční závislost

$$\kappa(\omega) = \frac{\kappa_0\omega_0^2}{\omega^2 + \omega_0^2} + i \frac{\kappa_0\omega_0\omega}{\omega^2 + \omega_0^2},$$

kde $\kappa_0 \equiv \kappa(0)$ a $\omega_0 > 0$ je konstantní parametr. Zjistěte, jaké informace můžeme z toho získat o korelační funkci $K(\tau)$ vyskytující se v rovnici II(4.32).

Řešení. Frekvenční závislost susceptibility je určena rovnicí

$$\kappa(\omega) = \int_0^\infty K(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau = \frac{\kappa_0\omega_0}{\omega^2 + \omega_0^2} (\omega_0 + i\omega).$$

Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že tomu vyhovuje funkce

$$K(\tau) = \kappa_0\omega_0 \exp(-\omega_0\tau).$$

Ke kapitole III

1. Náboj je v prostoru rozložen periodicky s hustotou $\rho = \rho_0 \cos(ax) \cos(\beta y) \cos(\gamma z)$, a vytváří tak prostorovou mřížku. Vypočtete elektrické pole vytvořené touto mřížkou.

Řešení. Jelikož trigonometrické funkce se po dvojnásobné derivaci „regenerují“, budeme hledat řešení Laplaceovy—Poissonovy rovnice $\epsilon_0 \nabla^2 \Phi = -\rho_0 \cos(\alpha x) \cos(\beta y) \cos(\gamma z)$ ve tvaru $\Phi = A \cos(\alpha x) \cos(\beta y) \cos(\gamma z)$. Po dosazení a porovnání dostaneme

$$\Phi = \frac{\rho_0}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)\epsilon_0} \cos(\alpha x) \cos(\beta y) \cos(\gamma z).$$

2. Rovina $z = 0$ je nabitá s plošnou hustotou $\eta = \eta_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$. Určete pole vytvořené touto rovinou a proveďte rozbor. Řešte obrácenou úlohu: ze zadaného potenciálu určete rozdělení plošné hustoty.

Řešení. Řešení rovnice $\nabla^2 \Phi = 0$ budeme hledat ve tvaru $\Phi(x, y, z) = f(z) \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$. Pro $f(z)$ pak plyne rovnice $f''(z) - \lambda^2 f(z) = 0$, kde $\lambda = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$. Partikulární řešení jsou

$$\begin{aligned} f(z) &= A e^{-\lambda z}, & (z > 0), \\ f(z) &= B e^{\lambda z}, & (z < 0). \end{aligned}$$

Ze spojitosti na rozhraní $z = 0$ plyne $B = A$. Z hraniční podmínky $E_{1n} - E_{2n} = \eta/\epsilon_0$, tj.

$$-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=+0} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=-0} = \frac{\eta}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

dostaneme $2A\lambda = \eta$, takže je

$$\Phi = \frac{\eta_0}{2\lambda} e^{-\lambda|z|} \sin(\alpha x) \sin(\beta y). \quad (2)$$

Exponenciální pokles podél osy z je způsoben tím, že rovina $z = 0$ obsahuje náboje obou polarit, čímž dochází k odstínění obou nábojů.

Při řešení obrácené úlohy vyjdeme z řešení (2) a pak pomocí hraniční podmínky (1) určíme plošnou hustotu. Vyjde $\eta = \eta_0 \sin(\alpha x) \sin(\beta y)$ ve shodě s přímou úlohou.

3. Nenabitá vodivá koule poloměru R je vložena do vnějšího homogenního pole \mathbf{E}_0 . Určete pole kolem koule a rovnici siločar. (Viz též úlohu 8.)

Řešení. Potenciál Φ запиšeme ve tvaru součtu $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, kde $\Phi_0 = -\mathbf{E}_0 r = -E_0 r \cos \vartheta$ je potenciál vnějšího pole \mathbf{E}_0 a Φ_1 je potenciál vytvořený přítomností vodivé koule. Potenciál Φ_0 nám poslouží jako asymptotická podmínka v nekonečnu

$$\Phi \cong -E_0 r \cos \vartheta, \quad (r \rightarrow \infty). \quad (1)$$

Jelikož potenciál nebude záviset na úhlu φ , budeme hledat řešení Laplaceovy rovnice $\nabla^2 \Phi = 0$ ve tvaru

$$\Phi(r, \vartheta) = \frac{u(r)}{r} \cos \vartheta. \quad (2)$$

Použijeme-li pro ∇^2 vyjádření (Φ nezávisí na φ)

$$\nabla^2 \rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right),$$

získáme pro $u(r)$ rovnici

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} - 2u = 0. \quad (3)$$

To je rovnice Eulerova typu s řešením $u = r^\alpha$. Dosazením do (3) dostaneme $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$, takže řešení je

$$\Phi(r, \vartheta) = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \vartheta.$$

V nekonečnu ($r \rightarrow \infty$) má platit (1), takže $C_1 = -E_0$, a tudíž

$$\Phi(r, \vartheta) = -\left(E_0 r - \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \vartheta.$$

Na povrchu vodivé koule ($r = R$) je potenciál Φ konstantní; zvolíme-li $\Phi(R, \vartheta) = 0$, pak $E_0 R - (C_2/R^2) = 0$, takže je

$$\Phi(r, \vartheta) = -E_0 r \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \vartheta. \quad (4)$$

Člen

$$\Phi_1 = \frac{E_0 R^3}{r^3} r \cos \vartheta = \frac{R^3}{r^3} (\mathbf{E}_0 r) \quad (5)$$

je polem elektrického dipólu \mathbf{p} . Srovnáním se vzorcem

$$\Phi_1 = \frac{\mathbf{p} \mathbf{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3}$$

dostaneme elektrický dipólový moment koule

$$\mathbf{p} = 4\pi R^3 \epsilon_0 V \mathbf{E} = 3\epsilon_0 V \mathbf{E}_0, \quad (6)$$

kde V je objem koule. Plošnou hustotu náboje určíme z rovnice

$$\eta = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r=R} = 3\epsilon_0 E_0 \cos \vartheta. \quad (7)$$

Celkový náboj e je roven pochopitelně nule, jelikož

$$e = \oint \eta ds = \int_0^\pi \eta 2\pi R^2 \sin \vartheta d\vartheta = 0.$$

Z potenciálu (4) určíme pole \mathbf{E} vně koule

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \left(1 + \frac{2R^3}{r^3}\right) E_0 \cos \vartheta, \quad (8)$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) E_0 \sin \vartheta. \quad (9)$$

Rovnice silokřivek

$$\frac{dr}{dE_r} = \frac{r d\vartheta}{E_\vartheta}$$

se pomocí (8) a (9) převede do tvaru

$$\frac{\xi^3 - 1}{\xi(\xi^3 + 2)} d\xi + \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} d\vartheta = 0, \quad (10)$$

kde $\xi = r/R$. Vzhledem k separaci proměnných je (10) úplným diferenciálem $dF(\xi, \vartheta) = 0$. Funkci $F(\xi, \vartheta)$ najdeme tak, že položíme

$$\frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{d}{d\vartheta} \ln \sin \vartheta,$$

$$\frac{\xi^3 - 1}{\xi(\xi^3 + 2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{3\xi^2}{\xi^3 + 2} - \frac{1}{\xi} \right] = \frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \ln \left(\frac{\xi^3 + 2}{\xi} \right),$$

což dá rovnici siločar

$$\frac{\xi}{\xi^3 + 2} = C \sin^2 \vartheta = C[1 - (\mathbf{E}_0 \mathbf{n})^2], \quad (11)$$

kde $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ je jednotkový vektor ve směru průvodiče.

4. Nenabitý nekonečně dlouhý válec poloměru R se nachází v homogenním vnějším poli \mathbf{E}_0 . Určete výsledné pole vně válce pro případ, kdy \mathbf{E}_0 je kolmé k ose válce.

Řešení. Postup je obdobný jako v předešlé úloze. Potenciál $\Phi(r, \varphi)$ budeme hledat metodou separace proměnných

$$\Phi(r, \varphi) = u(r) \cos \varphi. \quad (1)$$

V cylindrických souřadnicích r, φ, z je (Φ nezávisí na z)

$$\nabla^2 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Z rovnice $\nabla^2 \Phi = 0$ pak získáme pro $u(r)$ rovnici Eulerova typu

$$r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} - u = 0$$

Z partikulárních řešení $u = r^{\pm 1}$ sestavíme obecné řešení

$$\Phi(r, \varphi) = (ar + br^{-1}) \cos \varphi.$$

Při $r \rightarrow \infty$ musí být $\Phi \cong -E_0 r \cos \varphi$, a tudíž

$$\Phi(r, \varphi) = -E_0 r \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \varphi. \quad (2)$$

Potenciál je normován podmínkou $\Phi(R, \varphi) = 0$.

Intenzitu \mathbf{E} vypočteme z rovnic

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = E_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \cos \varphi,$$

$$E_\varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -E_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \varphi.$$

Rovnice siločar

$$\frac{h_1 dq_1}{E_1} = \frac{h_2 dq_2}{E_2}$$

v cylindrických souřadnicích ($q_1 = r, h_1 = 1, q_2 = \varphi, h_2 = r$) má tvar

$$\frac{\xi^2 - 1}{\xi(\xi^2 + 1)} d\xi + \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} d\varphi = 0,$$

kde $\xi = r/R$. Rozkladem na parciální zlomky

$$\frac{\xi^2 - 1}{\xi(\xi^2 + 1)} = \frac{2\xi}{\xi^2 + 1} - \frac{1}{\xi}$$

dospějeme k rovnici siločar

$$\left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r}\right) \sin \varphi = C.$$

5. Dva stejné bodové náboje $e_1 = e_2 = e$ jsou ve vzájemné vzdálenosti h v tvrdém dielektriku s permitivitou ϵ . Náboje jsou ve středech malých dutin poloměru a . Najděte síly působící na náboje.

Řešení. Jelikož dutina je malá, pole v ní lze pokládat za homogenní s intenzitou

$$E = \frac{3\epsilon}{2\epsilon + \epsilon_0} E_0,$$

kde $E_0 = e/(4\pi\epsilon a^2)$ je homogenní pole v okolí dutiny. Síla $F = eE$ je pak rovna

$$F = \frac{3}{2\epsilon + \epsilon_0} \frac{e^2}{4\pi a^2}.$$

6. Dva tenké koaxiální paralelní kroužky poloměrů a , b jsou rovnoměrně nabitě náboje e_1 , e_2 . Vzdálenost mezi rovinami kroužků je h . Najděte interakční energii U kroužků a působící sílu F . Mezi kroužky je vakuum.

Řešení. Interakční energii vypočteme ze vzorce

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\kappa_1 \kappa_2 dl_1 dl_2}{R}, \quad (1)$$

kde $\kappa_1 = e_1/(2\pi a)$, $\kappa_2 = e_2/(2\pi b)$, $dl_1 = a d\alpha_1$, $dl_2 = b d\alpha_2$, $R = [h^2 + a^2 + b^2 - 2ab \cos(\alpha_1 - \alpha_2)]^{1/2}$. Po dosazení do (1) nejdříve provedeme integraci přes $0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$, pak zavedeme novou proměnnou $\pi - 2\alpha = \alpha_1$. Výsledek integrace přes α je vyjádřen rovnicí

$$U = \frac{e_1 e_2}{4\pi^2 \epsilon_0 (ab)^{1/2}} kK(k), \quad (2)$$

kde

$$k = \frac{2(ab)^{1/2}}{[h^2 + (a+b)^2]^{1/2}}$$

a

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{-1/2} d\alpha$$

je eliptický integrál prvního druhu.

Sílu F určíme ze vztahu

$$F = -\frac{\partial U}{\partial h} = -\frac{\partial U}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial h}.$$

Při úpravě uijeme vztahu

$$2k^2 \frac{dK(k)}{dk^2} = \frac{E(k)}{1-k^2} - K(k),$$

kde

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2} d\alpha$$

je eliptický integrál prvního druhu. Jednoduchým výpočtem dospějeme k rovnici

$$F = \frac{e_1 e_2 h k^3}{16\pi^2 \epsilon_0 (ab)^{3/2}} \frac{E(k)}{1-k^2}.$$

Ve specifickém případě $b = a$ na malých vzdálenostech $h \ll a$ je $1 - k^2 \cong h^2 / (4a^2)$, což dá

$$F \cong \frac{e_1 e_2}{4\pi^2 \epsilon_0 ab}.$$

Na velikých vzdálenostech $h \gg a$ lze použít $k \cong 2a/h$, čímž dostaneme

$$F \cong \frac{e_1 e_2}{4\pi \epsilon_0 h^2},$$

což je vzorec pro sílu mezi dvěma bodovými náboji e_1 , e_2 ve vzájemné vzdálenosti h mezi náboji.

7. Najděte pole bodového náboje v anizotropním nepyroelektrickém prostředí ($D_{0i} = 0$).

Řešení. Bodový náboj v počátku souřadnic má hustotu $\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r})$. V rovnici $\text{div } \mathbf{D} = (\partial D_i / \partial x_i) = e\delta(\mathbf{r})$ zavedeme $D_i = \epsilon_{ik} E_k = -\epsilon_{ik} (\partial \Phi / \partial x_k)$, což dá modifikovanou Laplaceovu—Poissonovu rovnici

$$\epsilon_{ik} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_k} = -e\delta(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Souřadné osy x , y , z vezmeme ve směru hlavních os tenzoru ϵ_{ik} , takže je

$$\epsilon^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \epsilon^{(2)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \epsilon^{(3)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -e\delta(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Zavedeme nové proměnné

$$x = \xi \sqrt{\epsilon^{(1)}}, \quad y = \eta \sqrt{\epsilon^{(2)}}, \quad z = \zeta \sqrt{\epsilon^{(3)}}$$

a uijeme vztahu $|a|\delta(a\xi) = \delta(\xi)$, čímž převedeme (2) do tvaru

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta^2} = -\frac{e}{[\epsilon^{(1)} \epsilon^{(2)} \epsilon^{(3)}]^{1/2}} \delta(\xi) \delta(\eta) \delta(\zeta).$$

Vzniklá rovnice se formálně shoduje s Laplaceovou—Poissonovou rovnicí pro potenciál bodového náboje v izotropním prostředí s tím rozdílem, že místo náboje e je zde náboj $e' = e[\epsilon^{(1)} \epsilon^{(2)} \epsilon^{(3)}]^{-1/2}$. Řešení

$$\Phi = \frac{e'}{4\pi} (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{-1/2}$$

lze pomocí definičních vztahů upravit takto

$$\Phi = \frac{e}{4\pi |\epsilon|^{1/2}} \left[\frac{x^2}{\epsilon^{(1)}} + \frac{y^2}{\epsilon^{(2)}} + \frac{z^2}{\epsilon^{(3)}} \right]^{-1/2}.$$

Veličina $|\epsilon| \equiv \epsilon^{(1)} \epsilon^{(2)} \epsilon^{(3)}$ je determinant tenzoru ϵ_{ij} . Výraz $(x^2/\epsilon^{(1)}) + (y^2/\epsilon^{(2)}) + (z^2/\epsilon^{(3)})$ se dá v libovolné souřadné soustavě zapsat ve tvaru $(\epsilon^{-1})_{ij} x_i x_j$, kde $(\epsilon^{-1})_{ij}$ jsou složky inverzního tenzoru, takže řešení je

$$\Phi = \frac{e}{4\pi} [|\epsilon| (\epsilon^{-1})_{ij} x_i x_j]^{-1/2}. \quad (3)$$

V případě prostorově rozloženého náboje bychom místo (3) pro potenciál Φ použili rovnice

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{[|\epsilon|(\epsilon^{-1})_{ij}X_iX_j]^{1/2}}, \quad (4)$$

kde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $X_i = x_i - x'_i$.

8. Dielektrická koule se nachází ve vnějším elektrickém poli \mathbf{E}_0 . Určete pole v dielektrické kouli.

Řešení. Veličiny uvnitř koule budeme označovat indexem i (internal — vnitřní), vně koule indexem e (external — vnější). Na základě stejné argumentace jako v úloze 3 zapíšeme potenciál vně koule

$$\Phi^{(e)} = -(\mathbf{E}_0 \mathbf{r}) + A \frac{(\mathbf{E}_0 \mathbf{r})}{r^3}.$$

První člen je potenciál vnějšího pole, druhý člen představuje změnu potenciálu vyvolanou přítomností dielektrické koule. Pole uvnitř koule popíšeme potenciálem

$$\Phi^{(i)} = -B(\mathbf{E}_0 \mathbf{r}).$$

Ze spojitosti potenciálu a normálových komponent indukce na rozhraní $r = R$ získáme rovnice

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}_0 \left(1 - \frac{A}{R^3}\right),$$

$$\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon^{(e)} \left(1 + \frac{2A}{R^3}\right) \mathbf{E}_0.$$

Vyloučením A z posledních dvou rovnic dostaneme

$$\mathbf{D}^{(i)} + 2\epsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)} = 3\epsilon^{(e)}\mathbf{E}_0. \quad (1)$$

Položíme-li $\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon^{(i)}\mathbf{E}^{(i)}$, pak

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{3\epsilon^{(e)}}{2\epsilon^{(e)} + \epsilon^{(i)}} \mathbf{E}_0. \quad (2)$$

9. Nekonečně dlouhý dielektrický válec je vložen do vnějšího homogenního pole kolmého k ose válce. Vypočítejte pole uvnitř válce.

Řešení. Stejným postupem jako v předešlé úloze dospějeme k rovnici

$$\mathbf{D}^{(i)} + \epsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)} = 2\epsilon^{(e)}\mathbf{E}_0,$$

popř. po dosazení $\mathbf{D}^{(i)} = \epsilon^{(i)}\mathbf{E}^{(i)}$ získáme intenzitu

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{2\epsilon^{(e)}}{\epsilon^{(i)} + \epsilon^{(e)}} \mathbf{E}_0.$$

Při vnějším poli \mathbf{E}_0 paralelním s osou válce máme

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbf{E}_0.$$

10. Dielektrická koule poloměru R má spontánní indukci \mathbf{D}_0 (pyroelektrický krystal). Určete pole vytvořené ve vakuu touto koulí.

Řešení. Jedná se o speciální případ úlohy 8. V rovnici (1) této úlohy položíme $\mathbf{E}_0 = 0$, což dá

$$2\epsilon_0\mathbf{E}^{(i)} = -\mathbf{D}^{(i)}. \quad (1)$$

Pole uvnitř je tedy homogenní, přičemž \mathbf{D} a \mathbf{E} jsou spojeny vztahem (1). Použijeme vyjádření $D_j = D_{0j} + \epsilon_{jk}E_k$, jež ve spojení s (1) dá vztah

$$(2\epsilon_0\delta_{jk} + \epsilon_{jk})E_k^{(i)} = -D_{0j}. \quad (2)$$

Vybereme souřadný systém ve směru hlavních os tenzoru ϵ_{jk} . Pro pole uvnitř dielektrika (i-internal — vnitřní) je

$$E_j^{(i)} = -\frac{D_{0j}}{2\epsilon_0 + \epsilon^{(i)}}, \quad (3)$$

kde $\epsilon^{(i)}$ jsou hlavní hodnoty tenzoru ϵ_{jk} .

Zavedeme-li polarizaci obvyklým vztahem $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, pak $P_j = D_j - \epsilon_0E_j$; v kombinaci se vztahy (1) a (3) dospějeme k rovnicím

$$P_j = -3\epsilon_0E_j^{(i)}, \quad \mathbf{P} = -3\epsilon_0\mathbf{E}^{(i)}, \quad (4)$$

$$P_j = \frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0 + \epsilon^{(i)}} D_{0j}. \quad (5)$$

V poslední rovnici se na pravé straně nesečítá přes j .

Vnější elektrické pole $\mathbf{E}^{(e)}$ je polem elektrického dipólu $\mathbf{p} = \mathbf{P}V$, kde $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ je objem koule. Potenciál $\Phi^{(e)}$ se vypočte z rovnice

$$\Phi^{(e)} = \frac{\mathbf{p}\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

a z něj určíme elektrickou intenzitu $\mathbf{E}^{(e)} = -\nabla\Phi^{(e)}$. Výsledný vztah udává rovnice

$$\mathbf{E}^{(e)} = \frac{V}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\mathbf{P}\mathbf{n}) - \mathbf{P}],$$

v níž $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ a vektor \mathbf{P} je určen rovnicí (4).

11. Ve středu homogenní izotropní dielektrické koule s permitivitou ϵ_1 se nachází bodový náboj e . Koule je obklopena homogenním izotropním dielektrikem nekonečných rozměrů (s permitivitou ϵ_2). Najděte vektory elektrické intenzity a indukce, jakož i povrchový náboj na rozhraní obou dielektrik.

Řešení. S ohledem na izotropii prostředí se Laplaceova—Poissonova rovnice redukuje na obyčejnou rovnici

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon}.$$

V okolí koule (prostředí 2) je $\rho = 0$, v prvním dielektriku je $\rho = e\delta(r)$, takže se jedná o řešení rovnic

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_2}{dr} \right) = 0,$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\frac{1}{\varepsilon_1} e\delta(r).$$

První z těchto rovnic má řešení

$$\Phi_2(r) = \frac{C_2 e}{4\pi\varepsilon_2 r}. \quad (1)$$

Vnější potenciál je normován podmínkou $\Phi(\infty) = 0$. Potenciál Φ_1 bude opět potenciálem bodového náboje, tj.

$$\Phi_1(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_1 r} + C_1. \quad (2)$$

Konstantu C_1 nelze položit rovnu nule, jelikož jsme již normovali Φ_2 .

Intenzity E_1 , E_2 a indukce D_1 , D_2 budou

$$E_1 \equiv E_{1r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_1 r^2}, \quad E_2 \equiv E_{2r} = C_2 \frac{e}{4\pi\varepsilon_2 r^2},$$

$$D_1 \equiv D_{1r} = \varepsilon_1 E_{1r}, \quad D_2 \equiv D_{2r} = \varepsilon_2 E_{2r}.$$

Ze spojitosti normálových komponent $D_{1r} - D_{2r} = 0$ na rozhraní $r = a$ plyne

$$C_2 = 1.$$

Jelikož na rozhraní nejsou volné náboje, bude potenciál spojitý. Z podmínky $\Phi_1(a) = \Phi_2(a)$ dostaneme

$$C_1 = \frac{e}{4\pi a} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right),$$

$$\Phi_1(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_1 r} + \frac{e}{4\pi a} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right), \quad \Phi_2(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_2 r},$$

$$E_{1r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_1 r^2}, \quad E_{2r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_2 r^2}.$$

Polarizaci \mathbf{P} určíme z rovnice $\mathbf{P} = \kappa\varepsilon_0\mathbf{E}$, $\kappa = \varepsilon^{(r)} - 1$. Plošná hustota $\eta^{(p)}$ polarizačního náboje je určena rovnicí $\eta^{(p)} = P_{1r} - P_{2r}$, což dá hodnotu

$$\eta^{(p)} = \frac{e}{4\pi a^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2^{(r)}} - \frac{1}{\varepsilon_1^{(r)}} \right).$$

Je-li $e > 0$, $\varepsilon_2^{(r)} < \varepsilon_1^{(r)}$, je $\eta^{(p)} > 0$, tj. na rozhraní se vytváří kladný povrchový vázaný náboj. Při $\varepsilon_2^{(r)} > \varepsilon_1^{(r)}$ a opět $e > 0$ je situace obrácená: na rozhraní se vytváří záporný polarizační náboj.

Zatímco vektor \mathbf{D} je na rozhraní spojitý, vektor \mathbf{E} má na rozhraní diskontinuitu

$$(E_2 - E_1)_{r=a} = \frac{e}{4\pi a^2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) = \frac{\eta^{(p)}}{\varepsilon_0}.$$

12. Vypočítejte elektrický kvadrupólový moment rovnoměrně nabitého elipsoidu s poloosami a , b , c .

Řešení. V soustavě hlavních os elipsoidu jsou složky tenzoru Q_{ij} dány vztahem

$$Q_{11} = \rho \int (3x^2 - r^2) dV = \rho \int (2x^2 - y^2 - z^2) dV$$

a obdobnými vztahy pro Q_{22} a Q_{33} . Integrace přes objem elipsoidu lze nejnázne provést takto: V rovnici elipsoidu

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

položíme $x' = x/a$, $y' = y/b$, $z' = z/c$, čímž dostaneme $(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$. Integrace v proměnných x' , y' , z' je převedena na integraci přes objem jednotkové koule. Položíme

$$x' = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y' = \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z' = \cos \vartheta,$$

$$dV = abc \sin \vartheta dr' d\vartheta d\varphi$$

a prointegrujeme v mezích

$$0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r' \leq 1.$$

Po provedení výpočtů dostaneme

$$Q_{11} = \frac{e}{5} (2a^2 - b^2 - c^2), \quad Q_{22} = \frac{e}{5} (2b^2 - a^2 - c^2), \quad Q_{33} = \frac{e}{5} (2c^2 - a^2 - b^2),$$

kde $e = \frac{4}{3}\pi abc\rho$ je celkový náboj elipsoidu.

13. Určete intenzitu \mathbf{E} a rovnici siločar pole rovnoměrně nabitého rotačního elipsoidu s poloosami $a = b$, c .

Řešení. Z předchozího příkladu plyne pro tenzor elektrického kvadrupólového momentu rotačního elipsoidu vyjádření

$$Q_{11} = \frac{e}{5}(a^2 - c^2), \quad Q_{22} = \frac{e}{5}(a^2 - c^2), \quad Q_{33} = \frac{2e}{5}(c^2 - a^2).$$

Potenciál pole elektrického kvadrupólu pak vypočteme z rovnice (viz čl. III.7)

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{4r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1),$$

kde $Q \equiv Q_{33}$ a ϑ je úhel mezi osou z a vektorem r . Pro složky vektoru \mathbf{E} platí

$$E_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{4r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1),$$

$$E_\vartheta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q}{4r^3} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta,$$

$$E_\varphi = 0.$$

Z rovnice siločar

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\vartheta}{E_\vartheta}$$

plyne

$$2 \frac{dr}{r} = \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{\sin \vartheta \cos \vartheta} d\vartheta = \left(\frac{2 \cos \vartheta}{\sin \vartheta} - \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \right) d\vartheta.$$

Elementární integrací získáme rovnici

$$r^2 = C \sin^2 \vartheta |\cos \vartheta|.$$

14. Vyšetřete (dvojezměrné) pole reprezentované analytickou funkcí $w = \zeta^2$. Vycházejte při tom z výsledků čl. III.5.

Řešení. Zavedeme $\zeta = x + iy$, $\zeta^2 = w = u + iv$, kde

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \quad (1)$$

Ekvipotenciály jsou (rovnoosé) hyperboly $x^2 - y^2 = \text{konst}$, siločáry jsou rovněž rovnoosé (k předchozím kolmé) hyperboly $v = 2xy = \text{konst}$.

Zvolíme-li v rovině w postupně $u = u_0, u_1, u_2, \dots$, $v = v_0, v_1, v_2, \dots$, dostáváme kartézskou síť. Tato síť představuje ekvipotenciály a siločáry (rovinného) homogenního pole. V rovině ζ se tato síť promítá (zobrazuje) jako síť rovnoosých hyperbol.

Intenzitu pole vypočteme ze vztahů III(5.10), což dá

$$E_x = -2x, \quad E_y = 2y, \quad E = |\mathbf{E}| = 2r.$$

Místa stejné absolutní hodnoty intenzity jsou koncentrické kružnice $r = (x^2 + y^2)^{1/2} = \text{konst}$.

15. Vyšetřete pole reprezentované analytickou funkcí $w = \ln \zeta$.

Řešení. Zavedeme $\zeta = x + iy = r(\cos \alpha + i \sin \alpha) = r e^{i\alpha}$, pak je

$$w = \ln \zeta = \ln r + i\alpha,$$

kde $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\alpha = \arctg(y/x)$. Položíme-li $w = u + iv$, je $u = \ln r$, $v = \alpha$. Ekvipotenciály jsou koncentrické kružnice $u = \text{konst}$ (resp. $r = \text{konst}$) a siločáry jsou polopaprsky $\alpha = \text{konst}$. Funkcí $w = \ln \zeta$ můžeme tedy zobrazit pole mezi dvěma kruhovými válci. Další rozbor je stejný jako v předešlém příkladě.

16. Vyšetřete pole odpovídající analytické funkci $w = \ln[(\zeta + a)/(\zeta - a)]$. Po-
užijte při tom výsledků čl. III.5.

Řešení. Zavedeme inverzní funkci

$$\frac{\zeta + a}{\zeta - a} = e^w$$

a v ní $\zeta = x + iy$, $w = u + iv$, $e^w = e^u (\cos v + i \sin v)$. Porovnáním reálných a imagi-
nárních částí získáme rovnice

$$x + a = e^u [(x - a) \cos v - y \sin v], \quad (1)$$

$$y = e^u [y \cos v + (x - a) \sin v]. \quad (2)$$

Povýšením těchto rovnic na druhou a sečtením dostaneme po úpravě

$$x^2 - 2ax \operatorname{cth} u + y^2 = -a^2, \quad (3)$$

kde

$$\operatorname{cth} u = \frac{e^u + e^{-u}}{e^u - e^{-u}};$$

po doplnění na čtverec přepíšeme (3) ve tvaru

$$(x - a \operatorname{cth} u)^2 + y^2 = (a/\operatorname{sh} u)^2. \quad (4)$$

Vydělením rovnic (1) a (2) dostaneme po provedení úprav

$$x^2 + (y + a \operatorname{ctg} v)^2 = (a/\sin v)^2. \quad (5)$$

Rovnice (4) a (5) jsou výhodné pro analýzu pole. Položíme-li $u = \text{konst}$, dostane-
me Apolloniovy kružnice se středy na ose x ve vzdálenosti $a \operatorname{cth} u$ od počátku, přičemž poloměr kružnice $r = (a/|\operatorname{sh} v|)$. Tyto kružnice jsou ekvipotenciály pole. Pro $v = \text{konst}$ dostáváme z (5) opět soustavu kružnic se středy na ose y , ve vzdálenosti $-a \operatorname{ctg} v$, přičemž poloměry kružnice jsou $a/|\sin v|$ a kružnice se navzájem protínají v bodech $[-a, 0]$ a $[+a, 0]$. Tyto kružnice tvoří soustavu siločar.

Z průběhu ekvipotenciál a siločar je vidět, že funkcí $w = \ln[(\zeta + a)/(\zeta - a)]$ můžeme zobrazit pole dvou rovnoběžných excentrických válců. Středy válců mají

souřadnice $[a \operatorname{cth} u_1, 0]$ a $[a \operatorname{cth} u_2, 0]$; poloměry válců jsou $r_1 = a/|\operatorname{sh} u_1|$, $r_2 = a/|\operatorname{sh} u_2|$. Vzdálenost d středu válců $d = a \operatorname{cth} u_1 + a \operatorname{cth} u_2$ se dá vyjádřit rovnicí

$$d = (a^2 + r_1^2)^{1/2} + (a^2 + r_2^2)^{1/2},$$

odkud plyne pro konstantu a rovnice

$$a = \frac{1}{2d} [(d^2 + r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_1^2 d^2]^{1/2}.$$

17. Proveďte transformaci inverze III(6.11) pro kouli.

Řešení. Povrch koule se středem v bodě r_0 o poloměru R je určen rovnicí $(r - r_0)^2 = R^2$. Po transformaci III(6.11) je

$$\left(\frac{a}{r'^2} r' - r_0\right)^2 = R^2.$$

Po vynásobení r'^2 budeme mít $(r' - r'_0)^2 = R'^2$, kde

$$r'_0 = \frac{a^2 r_0}{R^2 - r_0^2}, \quad R' = \frac{Ra^2}{|R^2 - r_0^2|}.$$

Výsledkem transformace inverze je koule se středem v bodě r'_0 o poloměru R' . Procházela-li původní koule počátkem souřadnic ($R = r_0$), pak $R' = \infty$; koule se přetransformuje na rovinu kolmou k r_0 se vzdáleností

$$r'_0 - R' = \frac{a^2}{R + r_0} = \frac{a'}{2R}.$$

18. Odvoďte vzorec III(3.7) pro Greenovu funkci jednorozměrné Laplaceovy rovnice.

Řešení. Jedná se o řešení rovnice

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x - x') = -\delta(x - x'). \quad (1)$$

Vyjádříme G a δ pomocí Fourierových funkcí, což dá

$$G(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int \frac{dk}{k^2} [e^{ik(x-x')} - 1] + C_1 x + C_2. \quad (2)$$

Poslední dva členy $C_1 x + C_2$ jsou řešením homogenní rovnice $(d^2 G/dx^2) = 0$. V (2) pointujeme per partes, což dá

$$G(x - x') = -\frac{1}{2}|x - x'| + C_1 x + C_2. \quad (3)$$

Koeficienty C_1 a C_2 se určí z dodatečných podmínek pro potenciál. Řešení rovnice

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

souvisí s Greenovou funkcí takto

$$\Phi(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(x - x') \rho(x') dx'.$$

Zvolíme-li

$$\Phi(0) = \Phi(1) = 0, \quad (4)$$

popř.

$$G(0 - x') = G(1 - x') = 0,$$

bude

$$C_2 = \frac{1}{2}|x'|, \quad C_1 = \frac{1}{2}|1 - x'| - \frac{1}{2}|x'|.$$

Po jednoduchých úpravách dospějeme k řešení

$$G(x - x') = \begin{cases} x'(1 - x) & \text{pro } x > x', \\ x(1 - x') & \text{pro } x < x', \end{cases}$$

což je rovnice III(3.7).

19. Odvoďte vzorec III(3.8) pro Greenovu funkci dvourozměrné Laplaceovy rovnice.

Řešení. Jedná se o řešení rovnice

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) G(x - x', y - y') = -\delta(x - x', y - y').$$

Metodou Fourierovy transformace dostaneme

$$G = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{dk_1 dk_2}{k_1^2 + k_2^2} [e^{i(k_1 X + k_2 Y)} - e^{i(k_1 + k_2)}], \quad (1)$$

kde jsme zavedli

$$X \equiv x - x', \quad Y \equiv y - y'. \quad (2)$$

Zavedeme polární souřadnice $k^2 = k_1^2 + k_2^2$, $dk_1 dk_2 = k dk d\varphi$, čímž je $k_1 X + k_2 Y = kR \cos \varphi$, kde

$$R = (X^2 + Y^2)^{1/2}. \quad (3)$$

Integraci přes úhel φ vyjádříme pomocí Besselovy funkce

$$\int_0^{2\pi} \exp(i k R \cos \varphi) d\varphi = 2\pi J_0(kR).$$

Z rovnice (1) tak získáme pro Greenovu funkci vztah

$$G(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{k} [J_0(kR) - J_0(k)], \quad (4)$$

z něhož plyne, že

$$G(1) = 0. \quad (5)$$

Funkci $G(R)$ proderivujeme podle R , což dá

$$\frac{dG}{dR} = \frac{1}{2\pi R} \int_0^\infty \frac{dJ_0(\xi)}{d\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi R} [J_0(\infty) - J_0(0)], \quad (6)$$

kde jsme užili substituce $\xi = kR$. Integrací rovnice (6) po dosazení $J_0(\infty) - J_0(0) = -1$ dostaneme

$$G(R) = -\frac{1}{2\pi} \ln R = -\frac{1}{2\pi} \ln [(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2},$$

což je ve shodě s uvedenou rovnicí XIII(3.8).

20. Dokažte, že koule (poloměru a) nabitá sféricky symetrickým rozložením náboje $\rho(\mathbf{r}') = \rho(r')$ budí ve vnějším prostoru stejné pole jako bodový náboj $e = \int \rho(\mathbf{r}') d^3r'$ sídlící ve středu koule.

Řešení. V rovnici

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'$$

zvolíme bod pozorování na ose z , takže $d^3r' = 2\pi r'^2 dr' \sin\vartheta' d\vartheta'$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta')^{1/2}$. Po dosazení máme

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^a 2\pi r' \rho(r') dr' \int_0^\pi \frac{r r' \sin\vartheta' d\vartheta'}{(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta')^{1/2}}.$$

Integrál přes ϑ' je $(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta')^{1/2}$, takže po dosazení mezi je

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^a 2\pi r' \rho(r') [(r+r') - |r-r'|] dr'. \quad (1)$$

Při $r > a$ je $|r-r'| = r-r'$, takže je

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r},$$

kde

$$e = \int_0^a 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

je celkový náboj. Ve vnitřní oblasti ($r \leq a$) integraci v (1) rozložíme podle vztahu

$$\int_0^a = \int_0^r + \int_r^a,$$

což dá výsledek

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' + r \int_r^a 4\pi r' \rho(r') dr' \right].$$

21. Dva volně otáčivé elektrické dipóly \mathbf{p} , \mathbf{p}' interagují při konstantní vzájemné vzdálenosti r . Určete stabilní orientace těchto dvou dipólů.

Řešení. Interakční energie U dvou dipólů je dána rovnicí

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [\mathbf{p}\mathbf{p}' - 3(\mathbf{p}\mathbf{n})(\mathbf{p}'\mathbf{n})], \quad (1)$$

kde $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Vzorec (1) dostaneme tak, že v III(8.6), tj. $U = -\mathbf{p}'\mathbf{E}$, užijeme pro \mathbf{E} vyjádření III(7.20).

Po zavedení jednotkových vektorů $\mathbf{v} = \mathbf{p}/p$, $\mathbf{v}' = \mathbf{p}'/p'$ bude platit

$$U = \frac{pp'}{4\pi\epsilon_0 r^3} [\mathbf{v}\mathbf{v}' - 3(\mathbf{v}\mathbf{n})(\mathbf{v}'\mathbf{n})].$$

Spojnicí obou dipólů vezmeme ve směru osy z , takže je $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$. Po úpravě skalárních součinů dostaneme

$$U = \frac{pp'}{4\pi\epsilon_0 r^3} (v_1 v_1' - v_2 v_2' - 2v_3 v_3'). \quad (2)$$

Jedná se tedy o nalezení minima funkce

$$f(v_1, v_2, v_3, v_1', v_2', v_3') = v_1 v_1' + v_2 v_2' - 2v_3 v_3',$$

přičemž jednotkové vektory vyhovují vedlejším (normovacím) podmínkám $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2 = 1$. Budeme proto vyšetřovat extrémy funkce

$$F(v_1, v_2, v_3, v_1', v_2', v_3') = v_1 v_1' + v_2 v_2' - 2v_3 v_3' - \frac{\lambda}{2} (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - \frac{\lambda'}{2} (v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2),$$

kde $-\lambda/2$, $-\lambda'/2$ jsou Lagrangeovy multiplikátory.

Podmínky $(\partial F/\partial v_i) = (\partial F/\partial v_i') = 0$ ($i = 1, 2, 3$) vedou ke vztahům

$$v_1 = \lambda v_1, \quad v_2 = \lambda v_2, \quad v_3 = -\frac{\lambda}{2} v_3, \quad (3)$$

$$v_1 = \lambda' v_1', \quad v_2 = \lambda' v_2', \quad v_3 = -\frac{\lambda'}{2} v_3'. \quad (4)$$

Každou z rovnic soustavy (3) povýšíme na druhou a vzniklé rovnice sečteme. Při úpravě ještě užijeme $v^2 = v'^2 = 1$. Obdobnou úpravou provedeme se soustavou (4), čímž dostaneme

$$\lambda = \pm (1 - \frac{3}{4} v_3^2)^{-1/2}, \quad \lambda' = \pm (1 - \frac{3}{4} v_3'^2)^{-1/2}. \quad (5)$$

Po dosazení do soustav (3) a (4) dospějeme ke vztahu

$$v_3' = \pm v_3. \quad (6)$$

Rovnice $2v_3' = -\lambda v_3$ pak vede ke dvěma možnostem

$$\begin{aligned} v_3 = 0, & \quad v_3' = 0, \\ v_3 = \pm 1, & \quad v_3' = \pm 1. \end{aligned}$$

První možnost $v_3 = v_3' = 0$ odpovídá situaci, kdy oba dipóly jsou kolmé na jejich spojnici. Výpočtem druhých derivací se přesvědčíme, že se jedná o *nestabilní* konfiguraci.

Stabilní konfiguraci odpovídají řešení $v_3 = v_3' = \pm 1$, tj. když oba dipóly jsou buď paralelní, anebo antiparalelní.

22. Dvě molekuly plynu mají dipólové momenty \mathbf{p}, \mathbf{p}' a nacházejí se ve vzájemné vzdálenosti r . Vlivem srážek molekul se mění orientace těchto dipólů. Určete střední interakční energii $\langle U \rangle$ těchto dvou dipólů. Při výpočtu použijte Boltzmannova rozdělení a předpokládejte, že interakční energie je mnohem menší než střední tepelná energie, $|U| \ll k\mathcal{T}$.

Řešení. Užijeme stejné označení jako v předešlé úloze. Pravděpodobnost dw toho, že orientace dipólů budou v intervalech $d\mathbf{v}, d\mathbf{v}'$ a jejich spojnice v intervalu $d\mathbf{n}$, je určena Boltzmannovým rozdělením

$$dw = C \exp\left(-\frac{U}{k\mathcal{T}}\right) d\mathbf{n} d\mathbf{v} d\mathbf{v}'.$$

Při $|U| \ll k\mathcal{T}$ lze exponentu nahradit jedničkou, takže $C = (4\pi)^{-3}$, jelikož každý prostorový úhel dá při integraci 4π .

Střední statistická hodnota $\langle U \rangle$ je dána rovnicí

$$\langle U \rangle = \int U dw = (4\pi)^{-3} \int U \exp\left(-\frac{U}{k\mathcal{T}}\right) d\mathbf{n} d\mathbf{v} d\mathbf{v}'. \quad (1)$$

Položíme-li

$$U = \frac{pp'}{4\pi\epsilon_0 r^3} [\mathbf{v}\mathbf{v}' - 3(\mathbf{n}\mathbf{v})(\mathbf{n}\mathbf{v}')], \quad (2)$$

zjistíme, že

$$\langle U \rangle = (4\pi)^{-3} \int U d\mathbf{n} d\mathbf{v} d\mathbf{v}' = 0. \quad (3)$$

Při výpočtu se užijte vztahů z dodatku VIII, jmenovitě

$$\begin{aligned} \langle n_i \rangle &= \langle v_i \rangle = \langle v_i' \rangle = 0, \\ \langle n_i n_j \rangle &= \langle v_i v_j \rangle = \langle v_i' v_j' \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}, \end{aligned}$$

takže je

$$\langle (\mathbf{n}\mathbf{v})(\mathbf{n}\mathbf{v}') \rangle = \frac{1}{3} \langle (\mathbf{v}\mathbf{v}') \rangle = 0.$$

S ohledem na (3) je nutno v (1) vzít $\exp(-U/k\mathcal{T}) \cong 1 - U/k\mathcal{T}$, takže se jedná o výpočet výrazu

$$\langle U \rangle = -\frac{1}{k\mathcal{T}} \langle U^2 \rangle = \frac{1}{k\mathcal{T}} \left(\frac{pp'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)^2 \{ \langle (\mathbf{v}\mathbf{v}')^2 \rangle + 9\langle (\mathbf{n}\mathbf{v})^2 (\mathbf{n}\mathbf{v}')^2 \rangle - 6\langle (\mathbf{v}\mathbf{v}') (\mathbf{n}\mathbf{v})(\mathbf{n}\mathbf{v}') \rangle \}. \quad (4)$$

Pomocí vztahů uvedených v dodatku VIII postupně najdeme

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{v}\mathbf{v}')^2 \rangle &= \langle (v_i v_j)(v_i' v_j') \rangle = \frac{1}{3} \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{ij} = \frac{1}{3}, \\ \langle (\mathbf{v}\mathbf{v}') (\mathbf{n}\mathbf{v})(\mathbf{n}\mathbf{v}') \rangle &= \langle (v_i v_j)(v_i' v_j')(n_i n_k) \rangle = \frac{1}{3^3} \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = \frac{1}{9}, \\ \langle (\mathbf{n}\mathbf{v})^2 (\mathbf{n}\mathbf{v}')^2 \rangle &= \langle (v_i v_j)(v_k v_l)(n_i n_j n_k n_l) \rangle = \frac{1}{3^2} \delta_{ij} \delta_{kl} \langle n_i n_j n_k n_l \rangle = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Po dosazení do (4) pak dostaneme hledaný vztah

$$\langle U \rangle = -\frac{2}{3} \left(\frac{pp'}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right)^2 \frac{1}{k\mathcal{T}}. \quad (5)$$

Střední interakční energie je tedy nepřímo úměrná absolutní teplotě a nepřímo úměrná šesté mocnině vzdálenosti mezi molekulami. Střední hodnotu r_0 vzdálenosti mezi dvěma molekulami lze odhadnout ze vztahu

$$V = Nr_0^3,$$

kde N je počet molekul a V je objem plynu. Po dosazení do (5) dostaneme

$$\langle U \rangle = -\frac{2}{3} \left(\frac{pp'N}{4\pi\epsilon_0 V} \right)^2 \frac{1}{k\mathcal{T}}. \quad (6)$$

Poslední rovnice představuje známý van der Waalsův korekční člen (a/V^2) ke stavové rovnici plynu.

23. Určete pole vytvořené kouli nabitou plošným nábojem $\eta = \eta_0 \cos \vartheta$.

Řešení. Zavedeme-li objemovou hustotu $\rho(r, \vartheta, \varphi) = \eta_0 \delta(r-a) \cos \vartheta$, pak pro potenciál Φ platí

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\eta_0}{\epsilon_0} \delta(r-a) \cos \vartheta. \quad (1)$$

Potenciál Φ nezávisí na azimutálním úhlu φ , proto jej budeme hledat ve tvaru

$$\Phi \equiv \Phi(r, \vartheta) = \frac{f(r)}{r} \cos \vartheta. \quad (2)$$

Po dosazení (2) do (1) získáme pro $f(r)$ rovnici

$$r^2 f''(r) - 2f(r) = -\frac{\eta_0}{\epsilon_0} r^3 \delta(r-a). \quad (3)$$

Při $r \neq a$ se jedná o řešení Eulerovy rovnice $r^2 f'' - 2f = 0$, která má řešení $f = C_2 r^{-1} + C_1 r^2$, takže je

$$\Phi = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r^2} \right) \cos \vartheta.$$

Při $r < a$ musí být $C_2 = 0$ (konečnost Φ v bodě $r = 0$), při $r > a$ je zase $C_1 = 0$ (vymizení potenciálu při $r = \infty$), takže je

$$\begin{aligned} \Phi(r, \vartheta) &= C_2 r^{-2} \cos \vartheta, & (r \geq a), \\ \Phi(r, \vartheta) &= C_1 r \cos \vartheta, & (r \leq a). \end{aligned}$$

Ze spojitosti při $r = a$ plyne $C_2 = C_1 a^3$, a tudíž

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, \vartheta) &= C_1 a^3 r^{-2} \cos \vartheta, & (r \geq a), \\ \Phi_1(r, \vartheta) &= C_1 r \cos \vartheta, & (r \leq a). \end{aligned}$$

Z podmínky

$$\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \right)_{r=a} = \eta$$

dostaneme $3C_1 \epsilon_0 = \eta_0$, čímž získáme pro Φ vyjádření

$$\Phi_1(r, \vartheta) = \frac{\eta_0}{3\epsilon_0} r \cos \vartheta, \quad (r \leq a), \quad (4)$$

$$\Phi_2(r, \vartheta) = \frac{\eta_0 a^3}{3\epsilon_0 r^2} \cos \vartheta, \quad (r \geq a). \quad (5)$$

Uvnitř koule je pole homogenní s intenzitou

$$E_{1z} = -\frac{1}{3} \frac{\eta_0}{\epsilon_0}.$$

Tento vztah dostaneme ze (4), když položíme $r \cos \vartheta = z$, $E_z = -(\partial \Phi / \partial z)$.

Vnější pole ($r > a$) je polem elektrického dipólu

$$p = \frac{4}{3} \pi a^3 \eta_0.$$

24. Najděte potenciál vytvořený koulí nabitou plošným nábojem hustoty $\eta \equiv \eta(\vartheta, \varphi)$. Potenciál vyjádřete pomocí sférických funkcí.

Řešení. Jelikož element povrchu koule $ds' = a^2 d\Omega'$, bude

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{a^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\eta(\vartheta', \varphi') d\Omega'}{|r - r'|}.$$

Při $r \geq a$ užijeme rozvoje III(7.32), v němž položíme $r' = a$. Po jednoduché úpravě dospějeme k rovnici

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{a^2}{\epsilon_0 r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{C_{lm}}{2l+1} \left(\frac{a}{r} \right)^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

kde koeficienty

$$C_{lm} = \int \eta(\vartheta', \varphi') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') d\Omega'$$

jsou obdobou koeficientů Q_{lm} definovaných rovnicí III(7.34).

25. Dva koaxiální tenké kruhové prstence poloměru a, b jsou nabité náboji $+e, -e$. Prstence jsou v jedné rovině. Vypočítejte potenciál Φ na velikých vzdálenostech od této soustavy nábojů. Použijte při tom výsledků čl. III.8 o multipólovém rozvoji.

Řešení. Soustava je elektricky neutrální, elektrický dipólový moment je rovněž nulový, takže nutno začít elektrickým kvadrupólovým členem $\Phi^{(2)}$. Vzhledem k osové symetrii stačí vypočítat složku $Q_{33} \equiv Q$, tj.

$$Q = \int (3z'^2 - r'^2) \kappa(r') dl',$$

kde $\kappa(r')$ je hustota náboje na jednotku délky. Společnou rovinu obou prstenců vezmeme $z' = 0$, pak je

$$Q = - \int r'^2 \kappa(r') dl'. \quad (1)$$

Na prvním prstenci s nábojem $+e$ je

$$\kappa(r') = \frac{e}{2\pi a}, \quad r' = a, \quad dl' = a d\varphi,$$

na druhém s nábojem $-e$ je

$$\kappa(r') = -\frac{e}{2\pi b}, \quad r' = b, \quad dl' = b d\varphi.$$

Elementární integrací rovnice (1) dospějeme k rovnici

$$Q = -e(a^2 - b^2).$$

Potenciál Φ je ve shodě s III(7.28') určen rovnicí

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = -\frac{e(a^2 - b^2)}{16\pi\epsilon_0 r^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1).$$

Ke kapitole IV

1. Vypočítejte magnetickou indukci uvnitř i vně nekonečného přímého válce (poloměru a), jímž protéká konstantní proud \mathcal{I} (proudová hustota $j = \mathcal{I}/(\pi a^2)$). Permeabilita vodiče je $\mu^{(i)}$, permeabilita okolí $\mu^{(e)}$.

Řešení. Osu válce vybereme ve směru osy z . V cylindrických souřadnicích r, φ, z máme řešit rovnici $\nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{j}$. Pole bude cylindricky symetrické (nezávislé na φ, z). Jelikož nenulová komponenta vektoru proudové hustoty je $j_z \equiv j$, stačí uvažovat

pouze $A_z \equiv A_z(r)$. Je tedy třeba řešit rovnici

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} A_z \right) = -\mu j. \quad (1)$$

Uvnitř válce je $\mu = \mu^{(i)}$, $j \neq 0$, vně válce je $\mu = \mu^{(e)}$, $j = 0$.

Uvnitř válce ($r \leq a$) má (1) řešení

$$A_z^{(i)} = -\frac{1}{4} \mu^{(i)} j r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Požadavek konečnosti $A_z^{(i)}$ na ose válce ($r=0$) vede k závěru, že $C_1=0$, a tedy

$$A_z^{(i)} = -\frac{\mu^{(i)} \mathcal{J}}{4\pi a^2} r^2 + C_2. \quad (2)$$

(Zavedli jsme celkový proud $\mathcal{J} = j\pi a^2$.) Vnější řešení $A_z^{(e)}$ zapíšeme ve tvaru

$$A_z^{(e)} = C_3 \ln r + C_4. \quad (3)$$

(Jelikož se jedná o nekonečný válec nelze v nekonečnu ($r \rightarrow \infty$) požadovat, aby $A_z^{(e)}$ ($z \rightarrow \infty$) bylo nulové, takže $C_3 \neq 0$.)

Poněvadž na hranicích $r = a$ je spojitá normálová komponenta $B_n = \text{rot}_n \mathbf{A}$, musí být také spojitá A_z

$$A_z^{(i)}(a) = A_z^{(e)}(a). \quad (4)$$

Druhou podmínku najdeme ze spojitosti tečných komponent vektoru $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$. Tečným komponentami budou v daném případě $H_\varphi^{(i)} = H_\varphi^{(e)}$ při $r = a$. K explicitnímu nalezení těchto podmínek

$$H_\varphi^{(i)}(a) = H_\varphi^{(e)}(a) \quad (5)$$

zapíšeme $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ v cylindrických souřadnicích

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_\varphi, \quad B_\varphi = \frac{\partial}{\partial z} A_r - \frac{\partial}{\partial r} A_z,$$

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} A_r.$$

V daném případě je $B_\varphi = -\partial A_z / \partial r$, takže podmínka (5) zní

$$\frac{1}{\mu^{(i)}} \left(\frac{\partial A_z^{(i)}}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{1}{\mu^{(e)}} \left(\frac{\partial A_z^{(e)}}{\partial r} \right)_{r=a}. \quad (6)$$

Řešení (2) a (3) dosadíme do podmínek spojitosti (4) a (6). Po jednoduchém výpočtu dostaneme

$$A_z^{(i)} = \frac{\mu^{(i)} \mathcal{J}}{4\pi} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) - \frac{\mu^{(e)} \mathcal{J}}{2\pi} \ln a + C_4,$$

$$A_z^{(e)} = -\frac{\mu^{(e)} \mathcal{J}}{2\pi} \ln r + C_4.$$

(Aditivní konstanta C_4 je nepodstatná, lze ji vynechat.)

Indukci B_φ vypočteme ze vztahu $B_\varphi = -\partial A_z / \partial r$, intenzita $H_\varphi = B_\varphi / \mu$, takže řešení dané úlohy zní

$$B_\varphi^{(i)} = \frac{\mu^{(i)} \mathcal{J}}{2\pi a^2} r, \quad H_\varphi^{(i)} = \frac{1}{2} j r,$$

$$B_\varphi^{(e)} = \frac{\mu^{(e)} \mathcal{J}}{2\pi r}, \quad H_\varphi^{(e)} = \frac{\mathcal{J}}{2\pi r}.$$

2. Řešte předchozí úlohu pro případ dutého válcového vodiče (vnitřní poloměr a , vnější b).

Řešení. Podle návodu k předchozí úloze stačí řešit rovnici

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} A_z \right) = -\mu j,$$

kde nyní je

$$j = \frac{\mathcal{J}}{\pi(b^2 - a^2)}.$$

V dutině je $j = 0$, takže bude

$$A_z^{(0)} = C_1 \ln r + C_2, \quad (0 \leq r \leq a).$$

Jelikož pole musí být konečné na ose válce ($r=0$); musí být $C_1=0$, a tedy řešení v dutině zní

$$A_z^{(0)} = C_2, \quad (0 \leq r \leq a).$$

Jelikož $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$, bude pole v dutině rovno nule

$$B^{(0)} = 0,$$

Uvnitř vodiče ($a \leq r \leq b$) je obecné řešení

$$A_z^{(i)} = -\frac{1}{4} \mu^{(i)} j r^2 + C_1' \ln r + C_2'.$$

Podmínka (6) z předchozího příkladu má nyní tvar

$$\frac{1}{\mu^{(i)}} \left(\frac{\partial A_z^{(i)}}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{1}{\mu^{(0)}} \left(\frac{\partial A_z^{(0)}}{\partial r} \right)_{r=a},$$

což ve spojení s (2) a (4) dá

$$C_1' = \frac{\mu^{(i)} \mathcal{J} a^2}{\pi(b^2 - a^2)}.$$

Z podmínky spojitosti $A_z^{(i)}(a) = A_z^{(e)}(a)$ vyjádříme konstantu C_2 pomocí C_3 , což vede k řešení

$$A_z^{(i)} = \frac{\mu^{(i)} \mathcal{J} a^2}{2\pi(b^2 - a^2)} \left[\ln \left(\frac{r}{a} \right) - \frac{r^2}{2a^2} \right] + C_2,$$

$$B_\varphi = -\frac{\partial}{\partial r} A_z = \frac{\mu^{(i)} \mathcal{J}}{2\pi(b^2 - a^2)} \left(r - \frac{a^2}{r} \right).$$

Ve vnějším okolí $r > b$ máme řešení

$$A_z^{(e)} = C_3 \ln r + C_4.$$

Z podmínek spojitosti

$$A_z^{(e)}(b) = A_z^{(i)}(b),$$

$$\mu^{(e)} (\partial A_z^{(i)} / \partial r)_{r=b} = \mu^{(i)} (\partial A_z^{(e)} / \partial r)_{r=b}$$

dostaneme řešení

$$A_z^{(e)} = \frac{\mathcal{J} \mu^{(e)}}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{r} \right) + C_4,$$

kde

$$C_4 = C_2 - \frac{\mathcal{J} \mu^{(i)}}{4\pi} + \frac{\mathcal{J} \mu^{(i)} a^2}{2\pi(b^2 - a^2)} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

je nepodstatná aditivní konstanta.

Pro pole $B^{(e)}$ ve vnějším prostředí plyne stejný vztah jako v případě plného válce

$$B_\varphi = \frac{\mathcal{J} \mu^{(e)}}{2\pi r}.$$

3. Koule poloměru a je nabitá nábojem e rozloženým rovnoměrně po povrchu. Najděte magnetické pole vytvořené touto koulí rotující kolem svého průměru s konstantní úhlovou rychlostí.

Řešení. Označíme-li polární souřadnice r, ϑ, φ , pak vektor hustoty i povrchového proudu je

$$i = e_\varphi \frac{e\omega}{4\pi a} \sin \vartheta. \quad (1)$$

Polární osa zvolena ve směru vektoru ω , e_φ je jednotkový vektor.

Ve všech bodech, jež neleží na povrchu koule, vyhovuje vektorový potenciál \mathbf{A} Laplaceově rovnici $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$. Ze symetrie problému plyne, že stačí uvažovat pouze složku A_φ , přičemž tato komponenta nebude záviset na úhlu φ , tj.

$$A_\varphi \equiv A_\varphi(r, \vartheta). \quad (2)$$

Z obecného výrazu pro $(\nabla^2 \mathbf{A})$ ve sférických souřadnicích

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\varphi = \nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi},$$

kde

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

plyne, že máme řešit rovnici

$$\nabla^2 A_\varphi - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\varphi = 0,$$

tj.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} A_\varphi \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_\varphi \right) - \frac{A_\varphi}{\sin^2 \vartheta} = 0. \quad (3)$$

Jelikož i závisí na úhlu ϑ vztahem (1), budeme hledat řešení rovnice (3) ve tvaru

$$A_\varphi(r, \vartheta) = F(r) \sin \vartheta. \quad (4)$$

Z dalšího výpočtu vyplyne, že substitucí (4) lze splnit rovnici (3) i hraniční podmínky.

Po dosazení (4) do (3) dostaneme pro $F(r)$ rovnici Eulerova typu

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + 2r \frac{dF}{dr} - 2F = 0$$

s řešením $F = r^\lambda$. Z řešení charakteristické rovnice $\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - 2 = 0$ je nutno vzít $\lambda = 1$, jelikož druhé řešení ($\lambda = -2$) by dávalo nekonečné pole ve středu koule ($r = 0$). Je tedy $F(r) = r$ (uvnitř koule), resp.

$$A_\varphi = Cr \sin \vartheta, \quad (0 \leq r \leq a), \quad (5)$$

zatímco ve vnějším prostoru $r > a$ bude

$$A_\varphi = (C_1 r + C_2 r^{-2}) \sin \vartheta, \quad (r \geq a). \quad (6)$$

Snadno se dokáže, že také $C_1 = 0$ (tím je zaručeno, že \mathbf{A} neroste v nekonečno). Fakticky potřebujeme, aby pole \mathbf{B} bylo v nekonečno nulové. Napišeme obecné vyjádření pro složky $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ve sférických souřadnicích

$$B_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\theta,$$

$$B_\theta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi), \quad (7)$$

$$B_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_r.$$

Pro vnější řešení (6) odtud plyne

$$B_{\theta} = -2C_1 \sin \vartheta + C_3 r^{-3} \sin \vartheta.$$

Poněvadž B_{θ} musí při $r \rightarrow \infty$ vymizet, musí být $C_1 = 0$, a tedy

$$A_{\varphi} = C_2 r^{-2} \sin \vartheta, \quad (r \geq a). \quad (8)$$

Konstanty C_2, C určíme z podmínek spojitosti normálových komponent vektoru \mathbf{B}

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (9)$$

a skoku tečných komponent

$$H_{2t} - H_{1t} = i. \quad (10)$$

(Jelikož \mathbf{B} je dáno derivacemi vektoru \mathbf{A} , lze místo podmínky (9) požadovat spojitost A_{φ} na rozhraní $r = a$. Obojí vede ke stejnému výsledku.)

Pomocí (7), (5) a (8) vyjádříme složky \mathbf{B} uvnitř a vně koule

$$B_r = 2C \cos \vartheta, \quad B_{\theta} = -2C \sin \vartheta, \quad (r \leq a), \quad (11)$$

$$B_r = 2C_2 r^{-3} \cos \vartheta, \quad B_{\theta} = C_2 r^{-3} \sin \vartheta, \quad (r \geq a). \quad (12)$$

Podmínka (9) vede ke vztahu

$$C_2 = Ca^3. \quad (13)$$

Uvážíme-li, že $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$, pak pro tečné komponenty plyne z (10) vztah

$$C \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{2}{\mu} \right) = \frac{e\omega}{4\pi a},$$

kde μ je permeabilita prostředí (koule), μ_0 je permeabilita vakua (ve vnějším prostoru předpokládáme vakuum). Je tedy

$$C = \frac{e\omega}{4\pi a} \frac{\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0}, \quad (14)$$

takže po dosazení (13) a (14) do (11) a (12) dostaneme pro složky pole vyjádření ($\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$)

$$B_r = \frac{2\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{e\omega}{4\pi a} \cos \vartheta,$$

$$B_{\theta} = -\frac{2\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{e\omega}{4\pi a} \sin \vartheta,$$

resp. ve vektorovém zápisu

$$\mathbf{B} = \frac{2\mu\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{e}{4\pi a} \boldsymbol{\omega}, \quad (r \leq a), \quad (15)$$

$$\mathbf{H} = \frac{2\mu_0}{\mu + 2\mu_0} \frac{e}{4\pi a} \boldsymbol{\omega}, \quad (r \geq a).$$

Pro většinu látek je $\mu \cong \mu_0$ (anebo je-li ve vnitřku duté koule vakuum, je přesně $\mu = \mu_0$), takže

$$\mathbf{H} \cong \frac{2}{3} \frac{e\omega}{4\pi a}.$$

Ve vnějším prostoru pak máme

$$B_r \cong \frac{2}{3} \mu_0 \frac{e\omega a^2}{4\pi r^3} \cos \vartheta, \quad (r \geq a),$$

$$B_{\theta} = \frac{1}{3} \mu_0 \frac{e\omega a^2}{4\pi r^3} \sin \vartheta, \quad (r \geq a).$$

Vektor \mathbf{B} ve vnějším prostoru odpovídá poli vytvořenému magnetickým dipólovým momentem \mathbf{m} . Porovnáme-li výraz pro pole vytvořené magnetickým dipólem (ve vakuu)

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{m}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{m}]$$

a promítneme-li \mathbf{B} do složek, dostaneme pro \mathbf{m} vyjádření

$$\mathbf{m} = ea^2 \frac{\mu\omega}{\mu + 2\mu_0} \cong \frac{1}{3} ea^2 \omega.$$

4. Vypočítejte magnetický dipólový moment rovnoměrně nabitě kuličky poloměru a (nábojová hustota $\rho = 3e/(4\pi a^3)$) rotující konstantní úhlovou rychlostí ω kolem svého průměru. Použijte získaný výsledek k důkazu nemožnosti klasické interpretace spinu elektronu.

Řešení. Hustotu magnetického momentu \mathbf{M} (magnetizaci) určíme z rovnice $\mathbf{M} = \frac{1}{2} [\mathbf{r}, \mathbf{j}]$, kde $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$, \mathbf{v} je rychlost rotace v bodě \mathbf{r} . Jelikož $\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$, budou složky m_x, m_y, m_z celkového magnetického momentu dány rovnicemi (osu rotace volíme ve směru osy z)

$$m_x = -\frac{1}{2} \rho \omega \int xz \, dV,$$

$$m_y = -\frac{1}{2} \rho \omega \int yz \, dV,$$

$$m_z = -\frac{1}{2} \rho \omega \int (x^2 + y^2) \, dV,$$

příčemž integrace se provádí přes objem kuličky. Po dosazení $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \vartheta$, $dV = r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi$ a integrací v mezích $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ se přesvědčíme, že složky m_x , m_y jsou nulové a pro m_z dostaneme po provedení jednoduchých integrálů

$$m_z = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \frac{\omega a^2}{5},$$

resp. po zavedení náboje

$$m_z = \frac{1}{5} e a^2 \omega.$$

V obecném případě

$$\mathbf{m} = \frac{1}{5} e a^2 \boldsymbol{\omega}.$$

(V předchozím příkladě — povrchové rozložení náboje — nám vyšel řádově stejný výsledek $\mathbf{m} = \frac{1}{5} e a^2 \boldsymbol{\omega}$.)

V klasické elektrodynamice lze elektron pokládat za kuličku s poloměrem (tzv. klasický poloměr elektronu) r_0 , jenž je definován vztahem

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0} = m_0 c^2,$$

kde $m_0 c^2$ je klidová energie elektronu. Číselná hodnota

$$r_0 \cong 2,8 \cdot 10^{-15} \text{ m.}$$

Pro elektron ($a = r_0$) lze tedy psát

$$m = \frac{1}{2} e v_0 r_0,$$

kde $v_0 = \omega r_0$ je „rychlost na obvodu“. Z atomové fyziky je známo, že elektron má vlastní (spinový) magnetický moment roven Bohrovu magnetonu $m_B = e\hbar/(2m_0)$, kde $\hbar = h/(2\pi) \cong 1,052 \cdot 10^{-34}$ J s je (redukováná) Planckova konstanta. Srovnání obou výrazů vede ke vztahu pro obvodovou rychlost rotace

$$\frac{v_0}{c} = \frac{5}{2} \frac{\Lambda}{r_0}.$$

Veličina $\Lambda = \hbar/(m_0 c)$ je Comptonova vlnová délka elektronu, $\Lambda \cong 3,86 \cdot 10^{-13}$ m. Vychází tedy

$$\frac{v_0}{c} \cong 350.$$

Nesmyslnost tohoto výsledku svědčí o nemožnosti klasické interpretace spinu elektronu. Na obvodu by navíc působila odstředivá síla $F_0 = (m_0 v_0^2/r_0) \cong 3,6 \cdot 10^6$ N (!!!) — ve starých jednotkách 360 tun!

Poznámka: V případě kuličky rovnoměrně nabitou na povrchu bychom dostali

obdobnou cestou

$$\mathbf{m} = \frac{1}{3} e a^2 \boldsymbol{\omega},$$

což se liší nepodstatným rozdílem číselného faktoru, takže uvedené závěry to neovlivní.

5. Vypočítejte magnetické pole vytvořené lineárním proudem v anizotropním prostředí.

Řešení. Zavedeme-li lineární vztah pro anizotropní prostředí

$$\mathbf{B}_i = \mu_{ik} \mathbf{H}_k, \quad (1)$$

nabude rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$ tvar

$$\mu_{ik} (\partial H_k / \partial x_i) = 0. \quad (2)$$

Abychom se lépe orientovali v této rovnici a jejím řešení, zavedeme na okamžik nové souřadnice ξ_i vztahem

$$x_k = \mu_{ik} \xi_k.$$

V těchto souřadnicích má (2) tvar divergence \mathbf{H}

$$(\partial H_i / \partial \xi_i) = 0, \quad (4)$$

takže řešení \mathbf{H} lze hledat ve tvaru $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{F}$, resp. ve složkovém zápisu

$$H_i = e_{ikr} (\partial F_r / \partial \xi_i),$$

což po opětovném přechodu k souřadnicím x_i dá vyjádření

$$H_i = e_{ikr} \mu_{kl} (\partial F_r / \partial x_l). \quad (5)$$

Vektor \mathbf{F} není touto volbou určen jednoznačně (srv. analogické úvahy u volby $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \dots$), proto lze na něj naložit vhodnou vedlejší (kalibrační) podmínku. Tuto podmínku zvolíme ve tvaru

$$\text{div } \mathbf{F} \equiv (\partial F_i / \partial x_i) = 0. \quad (6)$$

Rovnici pro vektor \mathbf{F} najdeme z rovnice $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$, do níž dosadíme (5). Zapišeme-li

$$e_{mni} (\partial H_i / \partial x_m) = j_m,$$

dosadíme za H_i vyjádření (5), užijeme podmínky (6) a vztahu

$$e_{mni} e_{ikr} = \delta_{mk} \delta_{nr} - \delta_{mr} \delta_{nk},$$

a dostaneme tak po jednoduché úpravě rovnici

$$\mu_{kl} \frac{\partial^2 F_m}{\partial x_k \partial x_l} = -j_m. \quad (7)$$

Vzniklá rovnice pro F_m je formálně totožná s rovnicí pro elektromagnetický potenciál v anizotropním prostředí (viz př. 7 ke kap. III), takže je

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') d^3r'}{[|\mu|(\mu^{-1})_{ij}R_iR_j]^{1/2}},$$

kde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Pro lineární proud $\mathbf{j} dV' = \mathcal{J} d\mathbf{l}'$ máme vyjádření

$$\mathbf{F} = \frac{\mathcal{J}}{4\pi\sqrt{|\mu|}} \oint \frac{d\mathbf{l}'}{[(\mu^{-1})_{ij}R_iR_j]^{1/2}}.$$

Ke kapitole V

1. Nekonečně dlouhý kovový válec (poloměr a , měrná vodivost γ , permeabilita μ) je umístěn uvnitř nekonečného solenoidu kruhového průřezu tak, že osa válce splývá s osou solenoidu. Solenoidem (poloměr b) teče proměnný proud $\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}_0 \exp(-i\omega t)$. Najděte rozdělení elektrického a magnetického pole v celém prostoru, jakož i rozdělení proudové hustoty \mathbf{j} ve válci.

Řešení. Magnetické pole \mathbf{B} vyhovuje rovnici typu V(3.2), tj.

$$\frac{d^2B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB}{dr} + k^2B = 0, \quad (1)$$

kde

$$k = \frac{1+i}{\delta}, \quad B_\varphi = B_r = 0, \quad B \equiv B_z(r).$$

Řešení regulární všude (včetně osy válce $r=0$) je Besselova funkce $J_0(kr)$, proto položíme

$$B = B_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}.$$

Na hranici $r=a$ je $B=B_0$. Vně válce, tj. při $a \leq r \leq b$, je $B=B_0$, vně solenoidu ($r > b$) je $B=0$. Rozdělení proudové hustoty uvnitř válce se vypočte z rovnice $\text{rot } \mathbf{H} = \gamma \mathbf{E} = \mathbf{j}$; odtud dostaneme

$$\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}_\varphi = \frac{kB_0}{\mu} \frac{J_1(kr)}{J_0(ka)}.$$

Při úpravě jsme užili $J_0'(z) = -J_1(z)$.

Pole vně válce určíme z Maxwellovy rovnice $\text{rot } \mathbf{E} + (\partial \mathbf{B} / \partial t) = 0$, kterou zapíšeme v integrálním tvaru

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int (\partial \mathbf{B} / \partial t) d\mathbf{s} = i\omega \int \mathbf{B} d\mathbf{s} = i\omega \int B_n d\mathbf{s}.$$

Ze symetrie úlohy je zřejmé, že existuje pouze komponenta $E_\varphi \equiv E_\varphi(r)$.

Vezmeme-li za křivku l kružnici o poloměru r , pak je $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 2\pi r E_\varphi$. Element plošky $d\mathbf{s} = 2\pi r dr$. Při výpočtu užitíme známého vztahu

$$\int x^p J_{p-1}(x) dx = x^p J_p(x).$$

Po provedení naznačených úprav dostaneme hledaný výsledek

$$E_\varphi = \frac{kB_0}{\gamma\mu} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \frac{a}{r} + \frac{i\omega B_0}{2\mu r} (r^2 - a^2), \quad (a \leq r \leq b),$$

$$E_\varphi = \frac{kB_0}{\gamma\mu} \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \frac{a}{r} + \frac{i\omega B_0}{2\mu r} (b^2 - a^2), \quad (r \geq b).$$

Kdyby nebyl v solenoidu umístěn kovový válec (tomu odpovídá $a=0$), pak je

$$E_\varphi = \frac{i\omega}{2\mu} B_0 r, \quad (r < b); \quad E_\varphi = \frac{i\omega b^2}{2\mu r} B_0, \quad (r > b).$$

2. Kovová koule (poloměr a , měrná vodivost γ , permeabilita $\mu = \mu_0$) je vložena do homogenního časově proměnného pole $B = B_0 \exp(-i\omega t)$. Najděte výsledné elektrické a magnetické pole.

Řešení. Jelikož vnější pole má určitý směr, bude mít elektrické pole i rozdělení proudové hustoty axiální symetrii. Bude proto $E_r = E_\theta = 0$. Složku E_φ elektrického pole budeme hledat ve tvaru

$$E_\varphi = F(r) \sin \vartheta. \quad (1)$$

V rovnici V(1.4) užitíme $(\partial \mathbf{E} / \partial t) = -i\omega \mathbf{E}$, takže se jedná o řešení rovnice

$$(\nabla^2 \mathbf{E})_\varphi + k^2 E_\varphi = 0.$$

Pro $(\nabla^2 \mathbf{E})_\varphi$ užitíme rovnice (49) z dodatku I. Ve vzniklé rovnici užitíme substituce

$$F(r) = r^{-1/2} \chi(r).$$

Pro $\chi(r)$ tak získáme rovnici

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} + \left[k^2 - \frac{(3/2)^2}{r^2} \right] \chi(r) = 0,$$

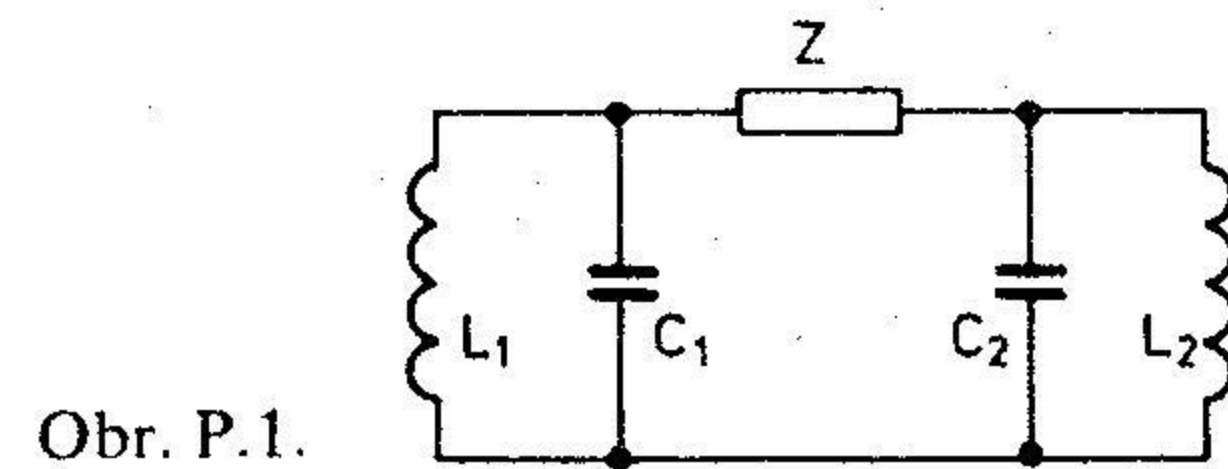
která má řešení (konečné při $r=0$)

$$\chi(r) = A J_{3/2}(kr),$$

takže je

$$E_\varphi = A r^{-1/2} J_{3/2}(kr).$$

3. Určete vlastní frekvence ω_1, ω_2 dvou obvodů $(L_1, C_1), (L_2, C_2)$, mezi nimiž je kapacitní vazba (viz obr. P.1).



Obr. P.1.

Řešení. Při kapacitní vazbě je komplexní odpor $\mathcal{Z} = i/(\omega C)$. Sestavíme matici \mathcal{Z}_{AB} komplexních odporů podle rovnice V(4.22) a pak řešíme rovnici V(4.26). Vzniklá rovnice má řešení

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(L_1 + L_2)C + L_1 C_1 + L_2 C_2 \pm \Omega}{2L_1 L_2 (C_1 C_2 + C C_1 + C C_2)},$$

kde

$$\Omega \equiv \{[L_1(C + C_1) - L_2(C + C_2)]^2 + 4L_1 L_2 C^2\}^{1/2}.$$

Není-li mezi obvody vazba ($C = 0$), pak vlastní frekvence ω_1, ω_2 jsou rovny vlastním frekvencím jednotlivých obvodů

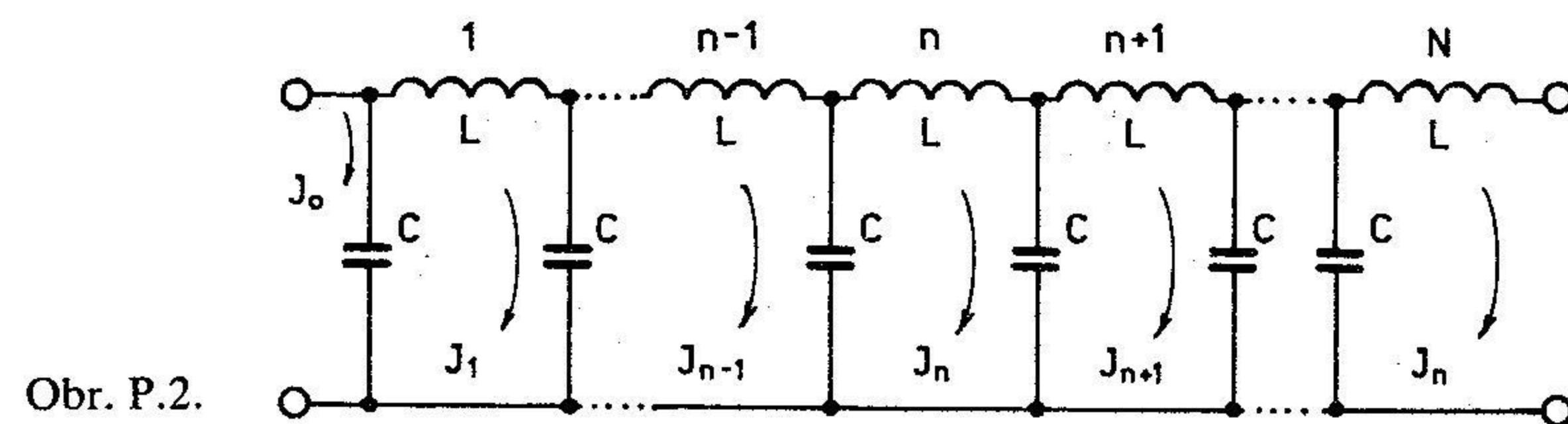
$$\omega_1 = (L_1 C_1)^{-1/2}, \quad \omega_2 = (L_2 C_2)^{-1/2}.$$

Při velmi silné vazbě ($C \gg C_1, C \gg C_2$) zůstane jedna frekvence $\omega = (L' C')^{-1/2}$, kde

$$L' = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}, \quad C' = C_1 + C_2.$$

Tomu odpovídá obvod, v němž jsou paralelně zapojeny kapacity C_1, C_2 i indukčnosti L_1, L_2 .

4. Elektrická síť sestávající z N stejných obvodů ($N \gg 1$) je na koncích rozpojena. Najděte vlastní frekvence této soustavy (viz obr. P.2.).



Obr. P.2.

Řešení. Při harmonické závislosti proudů \mathcal{J}_n bude pro n -tý obvod platit Kirchhoffův zákon

$$-\omega L \mathcal{J}_n + \frac{1}{\omega C} [(\mathcal{J}_n - \mathcal{J}_{n-1}) + (\mathcal{J}_n - \mathcal{J}_{n+1})] = 0.$$

Řešení této diferenční rovnice budeme hledat ve tvaru $\mathcal{J}_n = A \exp(i\kappa n)$. Po

dosazení dostaneme

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{\kappa}{2}\right), \quad (1)$$

kde $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$. Z hraničních podmínek plyne $\mathcal{J}_0 = \mathcal{J}_N = 0$, takže

$$\mathcal{J}_n = A \sin(\kappa n),$$

kde

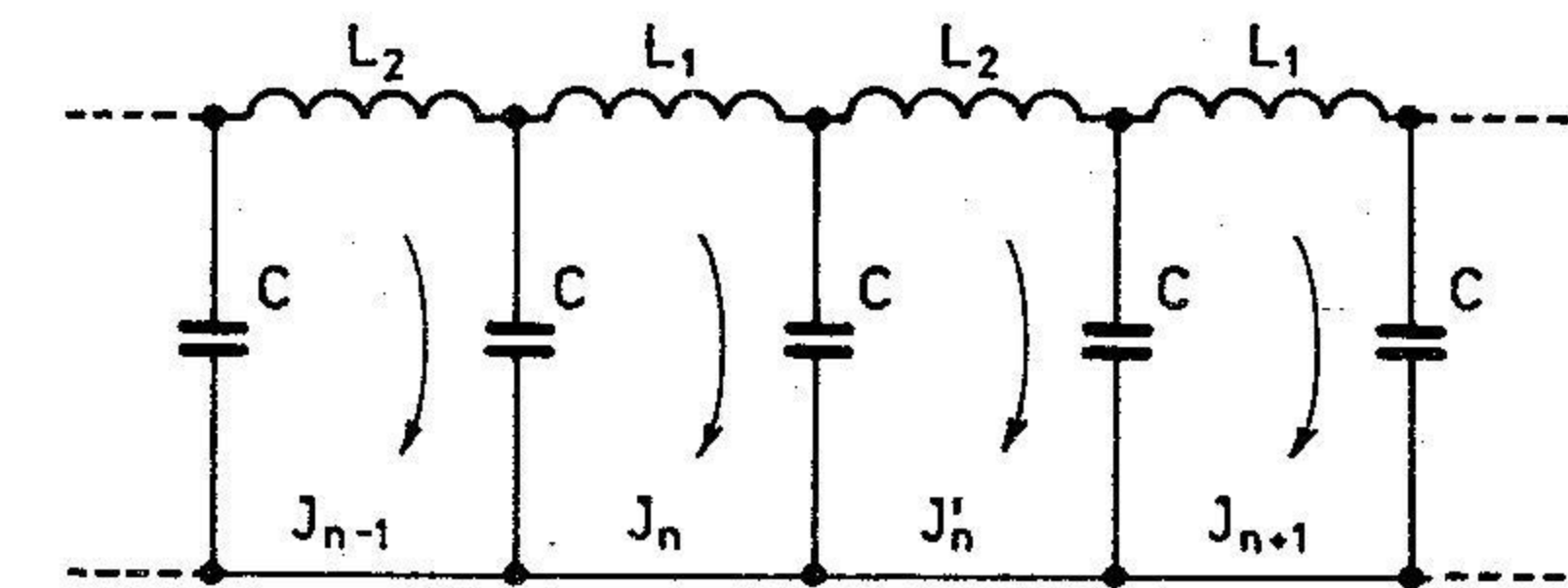
$$\kappa = \frac{\pi}{N} s, \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

Vlastní frekvence pak leží v intervalu

$$0 \leq \omega \leq 2\omega_0.$$

Z (1) lze určovat fázovou i grupovou rychlost šíření. Vyšetřovaný obvod je elektrickou analogií kmitajícího lineárního řetězce stejných atomů. (Viz J. Kvasnica: Statistická fyzika, Academia Praha, 1983).

5. Elektrická síť sestávající z $2N$ střídajících se obvodů (L_1, C) a (L_2, C) je na koncích rozpojena. Najděte spektrum vlastních kmitů tohoto obvodu (viz obr. P.3.).



Obr. P.3.

Řešení. Proudů v obvodech se samoindukcí L_1 označíme \mathcal{J} , v obvodech se samoindukcí L_2 označíme \mathcal{J}' . Z Kirchhoffových zákonů plyne

$$-\omega L_1 \mathcal{J}_n + \frac{1}{\omega C} [(\mathcal{J}_n - \mathcal{J}'_n) + (\mathcal{J}_n - \mathcal{J}'_{n-1})] = 0,$$

$$-\omega L_2 \mathcal{J}'_n + \frac{1}{\omega C} [(\mathcal{J}'_n - \mathcal{J}_n) + (\mathcal{J}'_n - \mathcal{J}_{n+1})] = 0.$$

Zavedeme frekvence $\omega_1 = (L_1 C)^{-1/2}$, $\omega_2 = (L_2 C)^{-1/2}$, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} (2\omega_1^2 - \omega^2) \mathcal{J}_n - \omega_1^2 (\mathcal{J}'_n + \mathcal{J}'_{n-1}) &= 0, \\ (2\omega_2^2 - \omega^2) \mathcal{J}'_n - \omega_2^2 (\mathcal{J}_n + \mathcal{J}_{n+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Řešení této diferenční rovnice budeme hledat ve tvaru $\mathcal{J}_n = A \exp(i\kappa n)$, $\mathcal{J}'_n =$

$B \exp(i\kappa n)$. Po dosazení do (1) a anulování determinantu soustavy (podmínka netriviálnosti řešení) dostaneme

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \left[(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 \sin^2 \left(\frac{\kappa}{2} \right) \right]^{1/2}.$$

Další postup (určení hodnot κ) je stejný jako v předešlé úloze. Zkoumaný elektrický obvod je elektrickou analogií kmitů lineárního řetězce s různými atomy.

Ke kapitole VII

1. Dvě rovinné monochromatické lineárně polarizované vlny stejné frekvence se šíří ve směru osy z . První vlna s amplitudou a je polarizována ve směru osy x , druhá s amplitudou b je polarizována ve směru osy y a předbíhá první vlnu ve fázi o β . Určete polarizaci výsledné vlny.

Řešení. Amplitudy vln jsou $\mathbf{E}_1 = a\mathbf{e}_x$, $\mathbf{E}_2 = b e^{i\beta} \mathbf{e}_y$, výsledná amplituda

$$\mathbf{E}_0 = a\mathbf{e}_x + b e^{i\beta} \mathbf{e}_y.$$

Podobně jako v čl. VII.6 zavedeme novou amplitudu $\mathbf{E}'_0 = \mathbf{E}_0 e^{i\alpha} = \mathcal{E}_1 - i\mathcal{E}_2$. Z požadavku, aby vektory \mathcal{E}_1 a \mathcal{E}_2 byly reálné a navzájem kolmé ($\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 = 0$), dostaneme vyjádření

$$\mathcal{E}_1 = a \cos \alpha \mathbf{e}_x + b \cos(\alpha + \beta) \mathbf{e}_y, \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_2 = a \sin \alpha \mathbf{e}_x + b \sin(\alpha - \beta) \mathbf{e}_y. \quad (2)$$

Z podmínky $\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 = 0$ dostaneme po jednoduché úpravě

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b^2 \sin 2\beta}{a^2 + b^2 \cos 2\beta}. \quad (3)$$

Takto určený úhel dosadíme do (1) a (2). V rovině (x, y) zavedeme nové osy x', y' tak, že x' je rovnoběžné s \mathcal{E}_1 a y' rovnoběžné s \mathcal{E}_2 . V těchto osách je

$$\begin{aligned} E_{x'} &= \mathcal{E}_1 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha), \\ E_{y'} &= \mathcal{E}_2 \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Konec vektoru opisuje elipsu $(E_{x'}/\mathcal{E}_1)^2 + (E_{y'}/\mathcal{E}_2)^2 = 1$.

2. Rovinná monochromatická elipticky polarizovaná vlna se šíří ve směru osy z . Velká poloosa elipsy svírá s osou x úhel α . Sestavte tenzor polarizace.

Řešení. V rovině (x, y) zavedeme novou ortogonální bázi (x', y') takovou, že

nové osy x', y' jsou ve směru poloos a, b . Komplexní amplituda \mathbf{E}_0 v této bázi je

$$\mathbf{E}_0 = a\mathbf{e}'_1 \pm i b\mathbf{e}'_2, \quad (1)$$

kde $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ jsou jednotkové vektory nové báze. Znaménko se volí podle toho, zdali se jedná o pravou nebo levou polarizaci, tj. na tom, zdali se vektor \mathbf{E} otáčí (z hlediska pozorovatele, k němuž se vlna šíří) ve směru anebo proti směru hodinových ručiček. Bázi $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ vyjádříme pomocí $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ vztahy $\mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 \cos \alpha + \mathbf{e}_2 \sin \alpha$, $\mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 \sin \alpha + \mathbf{e}_2 \cos \alpha$. Po dosazení do (1) dostaneme

$$\mathbf{E}_0 = (a \cos \alpha \mp i b \sin \alpha) \mathbf{e}_1 + (a \sin \alpha \pm i b \cos \alpha) \mathbf{e}_2.$$

Odtud pomocí definice VII(6.12) a VII(6.15) dostaneme

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2) \rho_{11} &= a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha, \\ (a^2 + b^2) \rho_{22} &= a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha, \\ (a^2 + b^2) \rho_{12} &= (a^2 - b^2) \sin \alpha \cos \alpha \mp 2i ab. \end{aligned}$$

Ve speciálním případě $b = a$ (kruhová polarizace) je

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1, & \mp i \\ \pm i, & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Elektromagnetická vlna je superpozicí dvou nekoherentních kvazimonochromatických vln stejné intenzity. Obě vlny jsou lineárně polarizovány, jednotkové vektory těchto polarizací jsou $\mathbf{e}^{(1)} \equiv (1, 0)$, $\mathbf{e}^{(2)} \equiv (\cos \alpha, \sin \alpha)$. Vypočítejte tenzor polarizace ρ_{ik} výsledné vlny.

Řešení. Amplituda \mathbf{E}_0 sumární vlny je

$$\mathbf{E}_0 = a[\mathbf{e}^{(1)} + e^{i\beta} \mathbf{e}^{(2)}],$$

kde β je fázový rozdíl obou vln. Ve shodě s definicemi VII(6.12) a VII(6.15) je

$$\rho_{ik} = \langle (\mathbf{e}_i^{(1)} + e^{i\beta} \mathbf{e}_i^{(2)}) (\mathbf{e}_k^{(1)} + e^{-i\beta} \mathbf{e}_k^{(2)}) \rangle.$$

Jelikož se jedná o nekoherentní vlny, fázový rozdíl β se mění chaoticky, a tudíž

$$\langle \exp(\pm i\beta) \rangle = 0.$$

Po jednoduchých úpravách dospějeme k rovnici

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \alpha, & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha, & 1 - \cos^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Jelikož $\det \boldsymbol{\rho} = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha$, ze vztahu VII(6.19) plyne pro stupeň polarizace

$$P = |\cos \alpha|.$$

4. Index lomu elektromagnetických vln v ionizovaném plynu lze aproximovat

vztahem $N^2(\omega) = 1 - \omega_p^2/(\omega^2 - \omega_0^2)$, kde ω_p a ω_0 jsou charakteristické frekvence (tzv. plazmová a rezonanční frekvence). Určete fázovou (w) a grupovou (W) rychlost elektromagnetických vln v takovém prostředí.

Řešení. Fázová rychlost $w = c/N$, vlnčet $k = \omega/w = N\omega/c$. Po dosazení do N se získá disperzní zákon $\omega \equiv \omega(k)$. Vyšetříme pouze asymptotické případy $\omega \gg \omega_0$, $\omega \ll \omega_0$.

Při frekvencích $\omega \ll \omega_0$ je

$$N^2(\omega) \approx N_0^2 - \omega_p^2 \omega^2 \omega_0^{-4}, \quad (1)$$

kde $N_0^2 = 1 + (\omega_p/\omega_0)^2$. Z (1) určíme fázovou rychlost $w = c/N$ a grupovou rychlost $W = (\partial\omega/\partial k)$. V dané oblasti je

$$w = \frac{c}{N_0} \left[1 - \frac{\omega_p^2 \omega^2}{2N_0^2 \omega_0^4} \right] < c,$$

$$W = \frac{c}{N_0} \left[1 - \frac{3\omega_p^2 \omega^2}{2N_0^2 \omega_0^4} \right] < c.$$

V opačném asymptotickém případě dostaneme

$$w = c \left[1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right] > c,$$

$$W = c \left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right] < c.$$

Skutečnost, že fázová rychlost $w > c$, není v rozporu s teorií relativity, jelikož přenos energie je svázán nikoli s fázovou, nýbrž grupovou rychlostí.

5. Rozeberte případ šíření elektromagnetických vln v prostředí s disperzním zákonem $\omega = c(k^2 + k_0^2)^{1/2}$.

Řešení. Fázová rychlost

$$w = \frac{\omega}{k} = \frac{c(k^2 + k_0^2)^{1/2}}{k} = \frac{c\omega}{(\omega^2 - c^2 k_0^2)^{1/2}}. \quad (1)$$

Tomu odpovídá index lomu $N = ck/\omega$, tj.

$$N(\omega) = \frac{1}{\omega} (\omega^2 - c^2 k_0^2)^{1/2}.$$

Grupová rychlost se vypočte z definice

$$W = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{ck}{(k^2 + k_0^2)^{1/2}}. \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) plyne mezi oběma rychlostmi vztah

$$wW = c^2.$$

6. Najděte tvar vlnového balíku v čase $t=0$ v případě, že rozdělení amplitud v VII(7.2) má gaussovský tvar $a(k) = a_0 \exp[-(k - k_0)^2/\kappa^2]$.

Řešení. Ve vzniklém integrálu

$$\psi(x, 0) = a_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{(k - k_0)^2}{\kappa^2} + i k x \right] dk$$

provedeme záměnu

$$\left(\frac{k - k_0}{\kappa} \right)^2 - i k x = \left[\frac{k - k_0}{\kappa} - \frac{i \kappa x}{2} \right]^2 + \frac{1}{4} \kappa^2 x^2 + i k_0 x.$$

Substitucí

$$\frac{k - k_0}{\kappa} - \frac{1}{2} i \kappa x = K$$

vznikne Gaussov integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-K^2) dK = \pi^{1/2}.$$

Výsledná vlna má tvar

$$\psi(x, 0) = A(x, 0) \exp(i k_0 x),$$

kde amplituda vlnového svazku

$$A(x, 0) = a_0 \pi^{1/2} \kappa \exp(-\frac{1}{4} \kappa^2 x^2)$$

má tvar Gaussovy křivky. Tato amplituda je prakticky nenulová pouze v oblasti $|\kappa x| \approx 1$.

7. Vlnový svazek ψ je vytvořen superpozicí rovinných vln s různými frekvencemi. Předpokládejte Gaussovu závislost amplitud $a(\omega) = a_0 \exp[-(\omega - \omega_0)^2/\Omega^2]$ a najděte časovou závislost amplitudy svazku v bodě $x=0$.

Řešení. Vzniklý integrál

$$\psi(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega) \exp(-i\omega t) d\omega$$

vypočteme stejně jako v předešlém případě. Výsledek zní

$$\psi(0, t) = A(0, t) \exp(-i\omega_0 t),$$

kde amplituda svazku

$$A(0, t) = a_0 \pi^{1/2} \Omega \exp(-\frac{1}{4} \Omega^2 t^2)$$

je prakticky nenulová pouze v oblasti $\Omega t \approx 1$, $\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 1$.

8. Poloha (vzdálenost) předmětu je měřena radiolokátorem vysílajícím elektromagnetické vlny o vlnové délce λ . Jaká je minimální nepřesnost určení této vzdálenosti.

Řešení. Vlnový puls emitovaný radiolokátorem má šířku Δx , jež souvisí s rozmazáním vlnových vektorů k_{\perp} vztahem $\Delta x \Delta k_{\perp} \cong 1$. Je-li vzdálenost objektu L , pak $(\Delta x/L) \cong (\Delta k_{\perp}/k) \cong \lambda \Delta k_{\perp}$. Spojením obou vztahů dostaneme hledanou nepřesnost

$$\Delta x \cong (L\lambda)^{1/2}.$$

9. Vyšetřete časový vývoj vlnového svazku vytvořeného amplitudovou funkcí $a(k) = a_0 \exp[-\alpha(k - k_0)^2]$ v prostředí s disperzním zákonem $\omega = \omega_0 + W(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2$.

Řešení. Dosadíme uvedené vztahy do VII(7.2) a vzniklý integrál vypočteme podle návodu v úloze 6.

Výsledkem těchto úprav je vlnový svazek

$$\psi(x, t) = A(x, t) \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)],$$

kde amplituda

$$A(x, t) = a_0 \left(\frac{\pi}{\alpha + i\beta t} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{(x - Wt)^2}{4(\alpha + i\beta t)} \right].$$

Intenzita je určena kvadrátem modulu $|A|^2$, tj.

$$|A(x, t)|^2 = \frac{\pi |a_0|^2}{\alpha^2 + \beta^2 t^2} \exp \left[-\frac{\alpha(x - Wt)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)} \right]. \quad (1)$$

Při daném čase t je to opět Gaussova závislost na souřadnici x . Intenzita je maximální v oblastech, kde $x - Wt = 0$. Šířka $L \equiv |x - Wt|$ svazku se mění s časem podle zákona

$$L = \left[\frac{2}{\alpha} (\alpha^2 + \beta^2 t^2) \right]^{1/2}.$$

(Exponent v (1) jsme položili řádově rovný jedné.) Výška svazku je určena předexponenciálním faktorem v (1), což vede k závislosti $(\alpha^2 + \beta^2 t^2)^{1/2}$.

Vlnový svazek mění s časem svůj tvar, rozplývá se. Při tom však *nedochází* k disipaci energie, což je nejlépe vidět z toho, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(x, t)|^2 dx = |a_0|^2 \left(\frac{\pi}{2\alpha} \right)^{1/2}$$

nezávisí na čase.

10. Na hranici poloprostoru ($z > 0$) zaplněného průzračným prostředím dopadá

kolmo rovinná vlna. Určete strukturu čela vlny prošlé dovnitř prostředí. Prostředí pokládejte za nemagnetické ($\mu = \mu_0$).

Řešení. Nechť vlna dopadá na hranici $z = 0$ v čase $t = 0$; pole dopadající vlny na hranici bude

$$E = 0 \quad \text{při } t < 0, \quad E = E_0 e^{-i\omega_0 t} \quad \text{při } t > 0.$$

Tuto funkci $E(t)$ vyjádříme Fourierovým integrálem (viz dodatek IV). Fourierovy komponenty E_{ω} budou

$$E_{\omega} \sim \int_0^{\infty} \exp[i(\omega - \omega_0)\tau] d\tau.$$

Při dopadu vlny s frekvencí ω bude prošlá vlna mít tvar

$$a(\omega) \exp[i(kz - \omega t)],$$

kde $k = N\omega/c$, N je index lomu prostředí a $a(\omega)$ je amplituda vlny. Pole v prostředí vyjádříme dvojnásobným integrálem

$$E \sim \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega a(\omega) e^{i(kz - \omega t)} \int_0^{\infty} e^{i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau. \quad (1)$$

V blízkosti čela vlny budou hlavní příspěvek poskytovat frekvence $\omega \cong \omega_0$, proto zaměníme $a(\omega) \cong a(\omega_0)$ a exponentu v prvním a druhém integrálu upravíme takto: V identitě

$$\begin{aligned} kz - \omega t + (\omega - \omega_0)\tau &= \frac{z\omega}{w} - \omega t + (\omega - \omega_0)\tau = \\ &= (\omega - \omega_0) \frac{z}{w(\omega)} + \frac{\omega_0 z}{w(\omega)} - \omega_0 t + (\omega - \omega_0)(\tau - t) \end{aligned}$$

rozvineme rychlost $w = c/N$ podle mocnin $\omega - \omega_0$, přičemž se omezíme na kvadratické členy $(\omega - \omega_0)^2$. Zavedeme označení $w_0 \equiv w(\omega_0)$, $w'_0 = (\partial w / \partial \omega)_{\omega = \omega_0}$, čímž (1) přetransformujeme do tvaru ($\Omega \equiv \omega - \omega_0$)

$$E \sim \int_0^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left\{ i\Omega \left(\tau - t + \frac{z}{w_0} \right) - \frac{i w'_0 z}{2 w_0^2} \Omega^2 \right\} d\Omega.$$

Integrál přes Ω vypočteme stejně jako v úloze 6. Poté zavedeme

$$\eta = \frac{z - w_0 t}{(2z |w'_0|)^{1/2}}$$

a nakonec dospějeme k vyjádření

$$E = E_0 F(\eta),$$

kde

$$F(\eta) = \int_{\eta}^{\infty} \exp(\pm i\xi^2) d\xi \quad (2)$$

je Fresnelova funkce. Znaménko v exponentě je shodné se znaménkem derivace

$$w'_0 = (\partial w / \partial \omega)_{\omega = \omega_0}$$

Intenzita vlny v blízkosti jejího čela je

$$I \sim |F(\eta)|^2$$

Při $\eta > 0$ intenzita monotonně klesá s rostoucím η , při $\eta < 0$ má oscilující průběh. Průběh intenzity je stejný jako při Fresnelově difrakci.

Ke kapitole VIII

1. Určete koeficient odrazu při kolmém dopadu elektromagnetických vln.

Řešení. Ve vzorci VIII(1.18) položíme $k_z = (N_1 \omega / c) \cos \vartheta$ a podobně $k'_z = (N_2 \omega / c) \cos \vartheta'$, čímž dostaneme

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{N_1 \cos \vartheta - (N_2^2 - N_1^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2}}{N_1 \cos \vartheta + (N_2^2 - N_1^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2}}$$

Při úpravě jsme užili Snellova zákona VIII(1.13). Při kolmém dopadu ($\vartheta = 0$) je koeficient odrazu

$$R = \left| \frac{E'_0}{E_0} \right|^2 = \left(\frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2} \right)^2$$

K podobnému výsledku dospějeme i pomocí vztahu VIII(1.23) pro případ, kdy magnetické pole \mathbf{H} je paralelní s rovinou rozhraní.

2. Najděte koeficient odrazu při dopadu elektromagnetických vln z vakua na rozhraní s permitivitou ϵ a permeabilitou μ .

Řešení. Stejným postupem jako v čl. VIII.1 dostaneme

$$R_{\perp} = \left| \frac{\mu^{(r)} \cos \vartheta - (\epsilon^{(r)} \mu^{(r)} - \sin^2 \vartheta)^{1/2}}{\mu^{(r)} \cos \vartheta + (\epsilon^{(r)} \mu^{(r)} - \sin^2 \vartheta)^{1/2}} \right|^2$$

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\epsilon^{(r)} \cos \vartheta - (\epsilon^{(r)} \mu^{(r)} - \sin^2 \vartheta)^{1/2}}{\epsilon^{(r)} \cos \vartheta + (\epsilon^{(r)} \mu^{(r)} - \sin^2 \vartheta)^{1/2}} \right|^2$$

3. Najděte asymptotický zákon pro koeficienty odrazu R_{\perp} a R_{\parallel} v případě, že úhel dopadu ϑ se liší jen nepatrně od úhlu ϑ_R totální reflexe.

Řešení. Ve vzorcích VIII(1.22) a VIII(1.28) položíme $\vartheta = \vartheta_R - \delta$, kde ϑ_R je určeno vztahem VIII(1.31) a δ je malá odchylka od ϑ_R . Rozvedením trigonometrických funkcí $\sin \vartheta = \sin \vartheta_R \cos \delta - \cos \vartheta_R \sin \delta \cong N_{21} - (1 - N_{21}^2)^{1/2} \delta$ po dalších úpravách dostaneme

$$R_{\perp} \cong 1 - 4(2\delta)^{1/2} (N_{21}^2 - 1)^{-1/4}$$

$$R_{\parallel} \cong 1 - 4(2\delta)^{1/2} N_{21}^{-2} (N_{21}^2 - 1)^{-1/4}$$

4. Určete směr mimořádného paprsku při dopadu elektromagnetické vlny na povrch jednoosého krystalu, když vlna dopadá kolmo k optické ose krystalu.

Řešení. Osu z zvolíme ve směru normály k povrchu. Lomený paprsek zůstane v rovině dopadu, za kterou vybereme rovinu (x, z) . Komponenta $N_1 = \sin \vartheta$ se při tom nemění. Z rovnice VIII(4.21) pak plyne

$$N_3 = \left[\epsilon_{\perp}^{(r)} - \frac{\epsilon_{\parallel}^{(r)}}{\epsilon_{\parallel}^{(r)}} \sin^2 \vartheta \right]^{1/2}$$

Pro úhel lomu ϑ'' se snadno odvodí

$$\operatorname{tg} \vartheta'' = \frac{N_1 \epsilon_{\perp}^{(r)}}{N_3 \epsilon_{\parallel}^{(r)}} = \frac{[\epsilon_{\perp}^{(r)}]^{1/2} \sin \vartheta}{[\epsilon_{\parallel}^{(r)} (\epsilon_{\parallel}^{(r)} - \sin^2 \vartheta)]^{1/2}}$$

5. Izotropní těleso je vloženo do vnějšího elektrického pole \mathbf{E} . Vlivem tohoto pole se stává opticky anizotropní. Vyšetřete tuto anizotropii.

Řešení. V izotropním tělese bez pole je $\epsilon_{ik} = \epsilon \delta_{ik}$. Z komponent pole lze vytvořit symetrický tenzor $E_i E_k$, proto pro izotropní těleso ve vnějším poli bude

$$\epsilon_{ik} = \epsilon \delta_{ik} + \alpha E_i E_k$$

Jedna z os tohoto tenzoru souhlasí se směrem vnějšího elektrického pole. Hlavní hodnota je

$$\epsilon_{\parallel} = \epsilon + \alpha E^2, \quad (1)$$

přičemž další dvě jsou

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_{\perp} = \epsilon. \quad (2)$$

Izotropní těleso se v elektrickém poli opticky chová jako jednoosý krystal (Kerrův jev). Odpovídající vztahy se dostanou dosazením (1) a (2) do VIII(4.21) a VIII(4.22).

6. Vyšetřete šíření elektromagnetických vln v oblasti, kde veličina $f(z) = (N^2 \omega^2 / c^2) - \lambda^2$ prochází nulou. Vyjděte z rovnice VIII(3.10).

Řešení. Bod z_0 , v němž $(N^2 \omega^2 / c^2) - \lambda^2 = 0$, nechť je $z_0 = 0$. (Připomeňme, že funkcí polohy je $N \equiv N(z)$.) V okolí $z_0 = 0$ lze položit

$$\frac{N^2 \omega^2}{c^2} - \lambda^2 = -az, \quad (1)$$

takže se jedná o řešení rovnice

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} - az \varphi = 0. \quad (2)$$

Substitucí

$$\xi = \alpha^{1/3} z \quad (3)$$

dostaneme

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} - \xi \varphi(\xi) = 0. \quad (4)$$

Rovnici budeme řešit metodou Fourierovy transformace

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(u) e^{i\xi u} du. \quad (5)$$

Odtud plyne

$$\xi \varphi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(u) \frac{1}{i} \frac{d}{du} (e^{i\xi u}) du.$$

Po integraci per partes a s ohledem na $\chi(\pm\infty) = 0$ máme

$$\xi \varphi(\xi) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\chi(u)}{du} e^{i\xi u} du.$$

Dále je

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = - \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \chi(u) e^{i\xi u} du.$$

Poslední dvě rovnice dosadíme do (4), čímž získáme pro $\chi(u)$ rovnici $i(d\chi/du) + u^2 \chi = 0$, jejíž řešení $\chi(u) = A \exp(iu^3/3)$ dosadíme do (5). Dostaneme

$$\varphi(z) = A \Phi(\alpha^{1/3} z), \quad (6)$$

kde

$$\Phi(\xi) = \pi^{-1/2} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} + \xi u\right) du$$

jsou Airyho funkce. Při velkých kladných ξ je

$$\Phi(\xi) \cong \frac{1}{2} \xi^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} \xi^{3/2}\right).$$

Pole je v této oblasti exponenciálně tlumené. Při velkých, avšak záporných ξ se snadno odvodí asymptotický vztah

$$\Phi(\xi) \cong |\xi|^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} |\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

V této oblasti pole osciluje.

K určení pole v blízkosti $z=0$ je nutno vyjít z obecného vyjádření (6). Pole monotonně klesá s hloubkou $z > 0$, při $z < 0$ má oscilační průběh s řadou maxim. První (největší) maximum je při $\alpha^{1/3} z \cong -1,02$ (zjistí se numericky), kde $\Phi(-1,02) \cong +0,95$. Je tedy

$$\Phi(z_{\max}) \cong 0,95 A.$$

7. Permittivita plynů je úměrná jejich hustotě. Hustota zemské atmosféry klesá s výškou exponenciálně (barometrický vzorec). Z toho lze usoudit, že index lomu atmosféry lze aproximovat výrazem $N^2 = 1 + \kappa = 1 + (N_0^2 - 1) \exp(-z/z_0)$, kde N_0 je index lomu při $z=0$ a z_0 je charakteristický parametr rozměru délky. (Při $z \rightarrow \infty$ je ve vakuu $N=1$.) Řešte rovnici VIII(3.10) pro šíření elektromagnetických vln v tomto nehomogenním prostředí. Návod: substitucí $\xi = \alpha \exp(-z/2z_0)$ se rovnice VIII(3.10) převede na Besselovu rovnici.

Řešení. Ve vzniklé rovnici

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (N_0^2 - 1) \varphi \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \lambda^2\right) \varphi = 0$$

zavedeme novou proměnnou

$$\xi = \alpha \exp\left(-\frac{z}{2z_0}\right), \quad \alpha = \frac{\omega}{c} (N_0^2 - 1)^{1/2} 2z_0, \quad (1)$$

a označíme $v^2 = 4z_0^2(\omega^2/c^2 - \lambda^2)$, čímž dostaneme

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\varphi}{d\xi} + \left(1 + \frac{v^2}{\xi^2}\right) \varphi = 0. \quad (2)$$

To je Besselova rovnice (viz dodatek VI) imaginárního řádu $p = \pm iv$, takže řešení rovnice VIII(3.10) v daném případě zní

$$\varphi(\xi) = AJ_{iv}(\xi) + BJ_{-iv}(\xi),$$

resp.

$$\varphi(z) = AJ_{iv} \left[\alpha \exp\left(-\frac{z}{2z_0}\right) \right] + BJ_{-iv} \left[\alpha \exp\left(-\frac{z}{2z_0}\right) \right].$$

Konstanty A, B se určí ze zadaných počátečních a hraničních podmínek. Při $z \rightarrow \infty$ je argument Besselových funkcí blízký nule, takže lze užít asymptotických vztahů (pro $|x| \rightarrow 0$)

$$J_p(x) \cong \frac{x^p}{2^p \Gamma(p+1)}, \quad p = \pm iv, \quad x = \alpha \exp\left(-\frac{z}{2z_0}\right).$$

Pro $z \rightarrow \infty$ lze řešení zapsat ve tvaru

$$\varphi(z) = C \cos\left(\frac{vz}{2z_0} + \delta\right).$$

8. Rovinná monochromatická vlna dopadá na rovinné rozhraní dvou dielektrik s permitivitou ϵ_1 a ϵ_2 . Jaký charakter bude mít pole po obou stranách rozhraní při „skluzovém“ dopadu (úhel dopadu $\vartheta = \pi/2$).

Řešení. Ze vztahů VIII(1.20) a VIII(1.21) plyne při $\vartheta = \pi/2$ pro vlnu odraženou $E'_0 = -E_0$ a pro vlnu lomenou (procházející) $E''_0 = 0$. To značí, že taková rovinná monochromatická vlna se nemůže šířit rozhraním dvou dielektrik.

9. Rovinná monochromatická vlna dopadá kolmo z vakua na dielektrické prostředí. Předpokládejte závislost relativní permitivity

$$\varepsilon^{(z)} = a - \frac{b}{1 + \exp(z/L)} \quad (1)$$

Vyšetřete koeficient odrazu.

Návod. V rovnici VIII(3.10) položte $\lambda = 0$ (kolmý dopad) a zaveďte novou proměnnou $\xi = -\exp(-z/L)$.

Řešení. Jelikož $N^2 = \varepsilon^{(z)}$, jedná se o řešení rovnice

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(a - \frac{b}{1 + \exp(z/L)} \right) \varphi = 0. \quad (2)$$

Při $z \rightarrow +\infty$ zůstává pouze prošlá vlna, tj.

$$\varphi(z) = C \exp(ikz),$$

kde $k = (\omega/c)a^{1/2}$. Při $z \rightarrow -\infty$ se jedná o řešení rovnice VIII(3.10) a $\lambda = 0$, $N = 1$, což dá superpozici dopadající a odražené vlny

$$\varphi(z) = A \exp(ik_0z) + B \exp(-ik_0z), \quad (3)$$

kde $k_0^2 = (\omega^2/c^2)(a - b)$. Ve vakuu je $k_0^2 = \omega^2/c^2$, takže $a - b = 1$.

Provedeme nyní v (2) substituci $\xi = -\exp(-z/L)$ a dále položíme

$$\varphi(\xi) = \xi^{-i k L} \psi(\xi), \quad (4)$$

což nás přivede k rovnici

$$\xi(1 - \xi)\psi''(\xi) + (1 - 2i k L)(1 - \xi)\psi'(\xi) - k_0^2 b L^2 \psi(\xi) = 0. \quad (5)$$

Srovnání s rovnicí pro hypergeometrickou funkci (viz dodatek VII)

$$\xi(1 - \xi)\psi'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\xi]\psi' - \alpha\beta\psi = 0,$$

jejíž řešení

$$\psi = F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{\xi}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{\xi^2}{2!} + \dots,$$

vede k závěru, že řešení (4) je

$$\psi = CF[\alpha, \beta, \gamma, -\exp(-z/L)],$$

kde

$$\alpha = -i(k + k_0)L, \quad \beta = -i(k - k_0)L, \quad \gamma = 1 - 2i k L.$$

Asymptotický tvar $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ při $\xi \rightarrow -\infty$, tj. při $z \rightarrow -\infty$, je

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) \cong \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)} (-\xi)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} (-\xi)^{-\beta}.$$

Členy $(-\xi)^{-\alpha}$, $(-\xi)^{-\beta}$ obsahují faktory $\exp(ik_0z)$ a $\exp(-ik_0z)$, čímž jsou určeny koeficienty A , B v rovnici (3). Koeficient odrazu $R = |B/A|^2$ je

$$R = \left| \frac{\Gamma(2i k_0 L)\Gamma[1 - i(k + k_0)L]\Gamma[-i(k + k_0)L]}{\Gamma(-2i k_0 L)\Gamma[1 - i(k - k_0)L]\Gamma[-i(k - k_0)L]} \right|^2.$$

Při úpravě se užije vztahů

$$\left| \frac{\Gamma(2i k_0 L)}{\Gamma(-2i k_0 L)} \right| = 1, \quad \Gamma(p)\Gamma(1 - p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Výsledný vztah zní

$$R = \frac{\text{sh}^2[\pi L(k - k_0)]}{\text{sh}^2[\pi L(k + k_0)]}.$$

V asymptotickém případě $kL \ll 1$ je

$$R \cong \left(\frac{k - k_0}{k + k_0} \right)^2,$$

zatímco při $kL \gg 1$ je exponenciální závislost

$$R \cong \exp(-4\pi kL).$$

10. Vyšetřete šíření elektromagnetických vln v nehomogenním prostředí s indexem lomu $N(z) = N_0/\text{ch}(az)$.

Návod: v rovnici VIII(3.10) proveďte substituci $\xi = \text{th}(az)$.

Řešení. V rovnici

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \left[\frac{N_0^2\omega^2}{c^2} \text{ch}^{-2}(az) - \lambda^2 \right] \varphi = 0$$

provedeme substituci $\xi = \text{th}(az)$ a zavedeme označení

$$v = \frac{\lambda}{\alpha}, \quad 2s + 1 = \left(1 + \frac{4N_0^2\omega^2}{c^2\alpha^2} \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Po úpravách dostaneme

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d\varphi}{d\xi} \right] + \left[s(s + 1) - \frac{v^2}{1 - \xi^2} \right] \varphi = 0.$$

To je (v poněkud pozměněném označení) rovnice 14 dodatku V pro sdružené Legendreovy funkce. Substitucemi

$$\varphi(\xi) = (1 - \xi^2)^{v/2} w(\xi), \quad 1 - \xi = 2\zeta$$

získáme hypergeometrickou rovnici

$$\zeta(1 - \zeta)w''(\zeta) + (v + 1)(1 - 2\zeta)w'(\zeta) - (v - s)(v + s + 1)w(\zeta) = 0.$$

Řešení konečné při $\xi = 0$ (tj. při $\xi = 1$, resp. $z = \infty$) je

$$\varphi(\xi) = C(1 - \xi^2)^{\nu/2} F[\nu - s, \nu + s + 1, \nu + 1, \frac{1}{2}(1 - \xi)].$$

Při $\xi = -1$ hypergeometrická funkce $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ diverguje, kromě případu, kdy $\alpha = -n = 0, -1, -2, \dots$, proto konečnost při $z = -\infty$ (tj. $\xi = -1$) vyžaduje, aby bylo

$$\nu - s = -n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Hypergeometrická funkce se pak redukuje na polynom n -tého stupně. Tím jsou (při daném α a dané frekvenci ω) určeny možné směry dopadu (parametru λ). Při $\lambda = 0$ to připouští pouze šíření vln s frekvencemi $\omega = n(n+1)ca/N_0$. K určení těchto frekvencí je nutno uvážit $N_0 \equiv N_0(\omega)$.

11. Dokažte, že imaginární část $\text{Im } \varepsilon$ permitivity $\varepsilon(\omega)$ mění při $\omega = 0$ znaménko.

Řešení. Podle výsledků čl. VI.6 je při $\omega = \omega' > 0$ imaginární část $\text{Im } \varepsilon \equiv \varepsilon' > 0$. Ze vztahu VIII(6.8) plyne $\text{Im } \varepsilon(-\omega') = -\text{Im } \varepsilon(\omega')$, tj. na levé části reálné osy ω je imaginární část $\varepsilon(\omega)$ záporná. Je tedy $\text{Im } \varepsilon > 0$ při $\omega = \omega' > 0$, $\text{Im } \varepsilon < 0$ při $\omega = \omega' < 0$. Odtud plyne, že v bodě $\omega = 0$ funkce $\text{Im } \varepsilon(\omega) \equiv \varepsilon''(\omega)$ mění znaménko. U dielektrik prochází $\varepsilon''(\omega)$ nulou při $\omega = 0$, což je jediný bod na reálné ose, v němž $\varepsilon'' = 0$. V časově proměnných polích ($\omega \neq 0$) je tedy vždycky disipace energie. U kovů je změna znaménka spojena s tím, že $\varepsilon(\omega)$ má imaginární část $i\gamma/\omega$.

12. Proveďte rozbor susceptibility $\kappa(\omega)$ a permitivity $\varepsilon(\omega)$, když korelační funkce $K(\tau)$ v rovnici VIII(6.2) je $K(\tau) = K_0 \exp(-\lambda\tau)$, $\lambda > 0$.

Řešení. Po dosazení je

$$\kappa(\omega) = K_0 \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+i\omega)\tau} d\tau = \frac{K_0(\lambda+i\omega)}{\lambda^2 + \omega^2}.$$

Funkce $\kappa(\omega)$ má pól pouze při $\omega = -i\lambda$, tj. v dolní části Gaussovy roviny. Reálná κ' a imaginární část κ'' je

$$\kappa'(\omega) = \frac{K_0\lambda}{\omega^2 + \lambda^2}, \quad \kappa''(\omega) = \frac{K_0\omega}{\omega^2 + \lambda^2}.$$

Integrál

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa'(\Omega) d\Omega}{\Omega - \omega} = K_0\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{(\Omega - \omega)(\Omega^2 + \lambda^2)}$$

vypočteme rozkladem integrandu na parciální zlomky. Výsledkem je vztah

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa'(\Omega) d\Omega}{\Omega - \omega} = -\frac{\pi K_0\lambda}{\lambda^2 + \omega^2} = -\pi \text{Im } \kappa(\omega) = -\pi \kappa''(\omega)$$

ve shodě s obecnou disperzní rovnicí VIII(6.15). Vlastnosti $\varepsilon \equiv \varepsilon(\omega)$ pak plynou z definičního vztahu VIII(6.3).

13. Vyšetřete, zdali může existovat prostředí, v němž by byly reálná a imaginární část susceptibility stejné v celém rozsahu frekvencí.

Řešení. V takovém prostředí by muselo $\kappa'(\omega)$ vyhovovat integrální rovnici, kterou dostaneme z VIII(6.16), a sice

$$\kappa'(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\kappa'(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega.$$

Tato rovnice má pouze triviální řešení $\kappa'(\omega) \equiv 0$.

Neexistence takového prostředí můžeme dokázat také elementárně. Z VIII(6.8) plyne, že na reálné ose je

$$\kappa'(-\omega) = \kappa(\omega), \quad \kappa''(-\omega) = -\kappa''(\omega).$$

Reálná část κ' je sudou funkcí, κ'' lichou funkcí frekvence. Rovnost obou funkcí může nastat pouze při $\kappa' = \kappa'' \equiv 0$.

14. Dokažte, že v průhledných prostředích je index lomu rostoucí funkcí frekvence. Návod: využijte Kramersovy—Kronigovy relace VIII(6.16).

Řešení. V rovnici VIII(6.16) uijeme (viz předešlý příklad) $\kappa''(-\Omega) = -\kappa''(\Omega)$, což dá

$$\begin{aligned} \kappa'(\omega) &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^0 \frac{\kappa''(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega + \int_0^{\infty} \frac{\kappa''(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\int_0^{\infty} \frac{\kappa''(-\Omega)}{\Omega + \omega} d\Omega + \int_0^{\infty} \frac{\kappa''(\Omega)}{\Omega - \omega} d\Omega \right]. \end{aligned}$$

Je tedy

$$\kappa'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Omega \kappa''(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega.$$

V průhledných prostředích je $|\kappa'| \gg |\kappa''|$, takže lze položit $\kappa \approx \kappa'$, a tudíž také

$$\kappa(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Omega \kappa''(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} d\Omega.$$

Odtud plyne

$$\frac{d\kappa(\omega)}{d\omega} = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\Omega \kappa''(\Omega)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2} d\Omega.$$

S ohledem na nezápornost integrandu odtud plyne

$$\frac{d\kappa(\omega)}{d\omega} > 0.$$

Uvážíme-li vztahy $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0[1 + \kappa(\omega)]$, $N^2(\omega) = \varepsilon/\varepsilon_0$, dostaneme nerovnosti

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} > 0, \quad \frac{dN(\omega)}{d\omega} > 0.$$

Poslední nerovnost přepíšeme v ekvivalentním tvaru

$$\frac{d}{d\omega} [\omega N(\omega)] > N(\omega).$$

15. Dokažte, že pro index lomu průhledných prostředí platí nerovnost

$$\frac{d}{d\omega} [\omega N(\omega)] > \frac{1}{N(\omega)}.$$

Návod: postupujte podobně jako v předešlé úloze.

Řešení. Obdobným postupem jako v předešlé úloze odvodíme

$$\frac{d}{d\omega} [\omega^2 \kappa(\omega)] = \frac{4\omega}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Omega^3 \kappa''(\Omega)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2} d\Omega > 0.$$

Odtud plyne

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} > -\frac{2\varepsilon_0}{\omega} \kappa(\omega),$$

resp.

$$\frac{d}{d\omega} [\omega N(\omega)] > \frac{1}{N(\omega)}.$$

Ke kapitole X

1. Dokažte přímým výpočtem, že potenciály X(4.5) a X(4.6) vyhovují rovnicím X(4.1) a X(4.2).

Řešení. Důkaz provedeme pro skalární potenciál. Označíme $\varrho' \equiv \varrho'(r', t')$, $t' = t - R/c$, $R = |r - r'|$. Podle Leibnitzova pravidla o derivování máme

$$4\pi\varepsilon_0 \nabla^2 \Phi = \int d^3 r' \nabla^2 \left(\frac{\varrho'}{R} \right) = \int d^3 r' \left[\varrho' \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) + 2\nabla \frac{1}{R} \cdot \nabla \varrho' + \frac{1}{R} \nabla^2 \varrho' \right].$$

Dále dosadíme

$$\nabla \frac{1}{R} = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}, \quad \nabla \varrho' = \frac{\partial \varrho'}{\partial t'} \nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{cR} \frac{\partial \varrho'}{\partial t'},$$

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{R}), \quad \nabla^2 \varrho' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t'^2} - \frac{2}{cR} \frac{\partial \varrho'}{\partial t'}.$$

Máme tak

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3 r' \left\{ -4\pi \varrho' \delta(\mathbf{R}) + \frac{1}{Rc^2} \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t'^2} \right\}.$$

Jelikož

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t'^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{d^3 r'}{Rc^2} \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t'^2},$$

z posledních dvou vztahů získáme

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) \Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \varrho(\mathbf{r}', t') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3 r' = -\varrho(\mathbf{r}, t).$$

Pro vektorový potenciál je postup důkazu stejný.

2. Dokažte, že potenciály X(4.5) a X(4.6) vyhovují Lorentzově podmínce X(4.3).

Řešení. Zavedeme označení $\mathbf{J}' \equiv \mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c)$, pak je

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{J}'}{R} \right) d^3 r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left\{ \mathbf{J}' \cdot \nabla \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} \operatorname{div} \mathbf{J}' \right\} d^3 r',$$

kde $\operatorname{div} \mathbf{J}' = (\partial \mathbf{J}' / \partial t') \cdot \nabla t' = -c^{-1} (\partial \mathbf{J}' / \partial t') \cdot \nabla R$. Přejdeme k derivacím podle čárkovaných proměnných

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -[\operatorname{div}' \mathbf{J}' - (\operatorname{div}' \mathbf{J}')_{r'=\text{konst}}],$$

čímž dostaneme

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[-\operatorname{div}' \left(\frac{\mathbf{J}'}{R} \right) + \frac{1}{R} \operatorname{div} \mathbf{J}' \right] d^3 r'. \quad (1)$$

První integrál převedeme pomocí Gaussova teorému na integrál přes uzavřenou plochu

$$\int d^3 r' \operatorname{div}' \left(\frac{\mathbf{J}'}{R} \right) = \oint \frac{1}{R} \mathbf{J}_n ds = 0,$$

jelikož na hranici je $J_n = 0$. Je tedy

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \operatorname{div} \mathbf{J}' d^3 r'.$$

Z X(4.6) máme (užijeme $c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1$)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{R} \frac{\partial \varrho'}{\partial t'} d^3 r' \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) s ohledem na $(\partial \varrho' / \partial t') + \operatorname{div} \mathbf{J}' = 0$ plyne X(4.3).

3. Dokažte přímým výpočtem, že X(4.17) vyhovuje rovnici X(4.15).

Řešení. Položíme-li $r' = 0$, pak

$$G^{\mp}(r) = \frac{1}{4\pi r} \exp \left(\mp i \frac{\omega r}{c} \right).$$

Při prověrci užijeme vztahu (Leibnitzova pravidla)

$$\nabla^2 (fg) = g \nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g) + f \nabla^2 g,$$

kde $f = 1/(4\pi r)$, $\nabla^2 f = -\delta(r)$. Jelikož $g \equiv g(r)$, je

$$\nabla g = \frac{r}{r} g'(r), \quad \nabla^2 g = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg}{dr} \right).$$

Aplikací operátoru $\nabla^2 + (\omega/c)^2$ na funkci $(4\pi r)^{-1} g(r)$ dostaneme (při $r \neq 0$) pro g rovnici

$$g''(r) + \frac{\omega^2}{c^2} g(r) = 0,$$

jejíž partikulární řešení jsou $\exp(\pm i\omega r/c)$, čímž je potvrzena správnost rovnice X(4.17).

4. Dokažte platnost vztahů X(5.6) a X(5.16).

Řešení. U X(5.16) se jedná o integrál typu

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\omega T)}{a^2 - \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega T)}{a^2 - \omega^2} d\omega.$$

Po rozložení jmenovatele na parciální zlomky je

$$I = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{a - \omega} + \frac{1}{a + \omega} \right] \cos(\omega T) d\omega = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega T)}{a - \omega} d\omega.$$

(U členu $a + \omega$ jsme provedli záměnu $\omega \rightarrow -\omega$.) Substitucí $a - \omega = x$ a užitím trigonometrických vzorců dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x} [\cos(aT) \cos(Tx) - \sin(aT) \sin(Tx)] = \\ &= -\frac{1}{a} \sin(aT) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(Tx)}{x} dx = -\frac{\pi}{a} \sin(aT), \end{aligned}$$

což je X(5.16).

Derivací vztahu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\omega T)}{a^2 - \omega^2} d\omega = -\frac{\pi}{a} \sin(aT)$$

podle T dospějeme k rovnici

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega \sin(\omega T)}{a^2 - \omega^2} d\omega = \pi \cos(aT),$$

což je (v jiných označeních) integrál typu X(5.6).

Oba integrály se nejspíše vypočtou vyšetřováním integrálu

$$\oint \frac{e^{ibz}}{z^2 - a^2} dz$$

po uzavřené křivce jdoucí na reálné ose z od $-\infty$ do $+\infty$ a po nekonečně vzdálené půlkružnici.

5. Potvrďte platnost rovnice X(5.23).

Řešení. Položme $d^3\mathbf{k} = 2\pi k^2 \sin\vartheta dk d\vartheta$, $\mathbf{kR} = kR \cos\vartheta$ a dále postupujeme jako v čl. X.5.

6. Proveďte Fourierův rozklad pole rovnoměrně přímočaře se pohybujícího bodového náboje.

Řešení. Jedná se o řešení rovnice

$$\square \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}). \quad (1)$$

Ze vztahů

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, t) &= (2\pi)^{-3} \int \Phi_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3\mathbf{k}, \\ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt}) &= (2\pi)^{-3} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{vt})} d^3\mathbf{k} \end{aligned}$$

po dosazení do (1) dostaneme rovnici pro $\Phi_{\mathbf{k}}(t)$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} + k^2 \Phi_{\mathbf{k}} = \frac{e}{\epsilon_0} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}t),$$

odkud

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{e \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}t)}{\epsilon_0 k^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}/c)^2}.$$

Podobně dostaneme vektorový potenciál

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \mu_0 e\mathbf{v} \frac{\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{v}t)}{k^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}/c)^2}.$$

Vlně s vlnovým vektorem \mathbf{k} přísluší kruhová frekvence $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$. Ze vztahu $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - (\partial\mathbf{A}/\partial t)$ pak máme

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k}} &= -i\mathbf{k}\Phi_{\mathbf{k}} + i(\mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{A}_{\mathbf{k}}, \\ \mathbf{B}_{\mathbf{k}} &= i[\mathbf{k}, \mathbf{A}_{\mathbf{k}}]. \end{aligned}$$

Doporučujeme čtenáři srovnat tyto výsledky s obdobnými výsledky v článku III.9 pro elektrostatické pole.

7. Odvoďte vzorec X(7.39) pro střední hodnotu energie oscilátoru. Vyjděte z toho, že pravděpodobnost w_N nalezení systému ve stavu N je úměrná $\exp(-\mathcal{E}_N/k\mathcal{T})$.

Řešení. Konstantu úměrnosti označíme $1/Z$, takže je $w_N = Z^{-1} \exp(-\mathcal{E}_N/k\mathcal{T})$. Pro oscilátor je $\mathcal{E}_N = N\hbar\omega$, takže

$$w_N = \frac{1}{Z} e^{-N\lambda}, \quad (1)$$

kde jsme zavedli $\lambda = \hbar\omega/k\mathcal{T}$. Konstanta je určena normovací podmínkou

$$\sum_N w_N = 1$$

takže je

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} e^{-N\lambda} = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}}. \quad (2)$$

Střední energie je definována vztahem

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \sum_N E_N W_N = \frac{\hbar\omega}{Z} \sum_N N e^{-N\lambda},$$

což s ohledem na (2) snadno převedeme do tvaru

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \hbar\omega \frac{1}{Z} \left(-\frac{dZ}{d\lambda} \right) = -\hbar\omega \frac{d}{d\lambda} \ln Z.$$

Po dosazení za Z z (2) dostaneme

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\lambda} - 1}, \quad (\lambda = \hbar\omega/kT),$$

což je vzorec X(7.39).

8. Vypočtete celkovou energii \mathcal{E} záření, jehož spektrální rozdělení je dáno Planckovým zákonem X(7.40).

Řešení. Energie je dána integrálem přes frekvence v intervalu $0 \leq \omega \leq \infty$. V rovnici X(7.40) uděláme substituci $\hbar\omega = k\mathcal{T}x$; po jednoduché úpravě pak bude

$$E = \frac{V(k\mathcal{T})^4}{\pi^2(\hbar c)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

V integrandu upravíme zlomek

$$\frac{1}{e^x - 1} = e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-x}} = \sum_{N=1}^{\infty} e^{-Nx}.$$

Dostáváme tak

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \sum_{N=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^3 e^{-Nx} dx = 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N^4}.$$

Při úpravě jsme provedli substituce $Nx = z$ a užili vztahu

$$\int_0^{\infty} z^3 e^{-z} dz = 3! = 6.$$

Vzniklý součet je znám z teorie Fourierových řad, teorie Bernoulliových čísel

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{-4} = \pi^4/90.$$

Vzniklý vztah

$$\mathcal{E} = \sigma V \mathcal{T}^4,$$

je v souladu s VI(3.7), přičemž konstanta σ je vyjádřena pomocí univerzálních konstant

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15(\hbar c)^3}.$$

9. Potvrďte přímým výpočtem zákon zachování X(8.18) Lentzova vektoru X(8.17).

Řešení. Při časové derivaci $(d\mathbf{A}/dt)$ užijeme vztahu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{1}{r^2} \mathbf{r} \frac{dr}{dt}.$$

Derivace dr/dt je radiální rychlost $(\mathbf{v}\mathbf{r})/r$, takže je

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\mathbf{v}}{r} - \frac{1}{r^3} (\mathbf{v}\mathbf{r})\mathbf{r}. \quad (1)$$

Z pohybové rovnice

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\alpha\mathbf{r}}{r^3}$$

plyne (centrální pole) zachování momentu hybnosti $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$, $(d\mathbf{L}/dt) = 0$. Je tedy

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{p}, \mathbf{L}] = \frac{\alpha}{r^3} [\mathbf{r}, \mathbf{L}].$$

Dosadíme $\mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ a upravíme dvojitý vektorový součin. Dostaneme tak

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{m\alpha} [\mathbf{p}, \mathbf{L}] \right) = 0,$$

čímž je platnost rovnice X(8.18) dokázána.

Ke kapitole XI

1. Určete elektrické dipólové záření dipólu rotujícího v jedné rovině úhlovou rychlostí ω_0 .

Řešení. Za rovinu rotace zvolíme rovinu (x, y) ; pak je

$$p_x = p_0 \cos(\omega_0 t), \quad p_y = p_0 \sin(\omega_0 t), \quad p_z = 0.$$

Úhlové rozdělení záření vypočteme podle vzorce

$$dI = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} [\ddot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}]^2 d\Omega = \frac{\ddot{p}^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \sin^2 \Theta d\Omega.$$

Integrací dostaneme celkovou intenzitu

$$I = \frac{p_0^2 \omega_0^4}{6\pi \epsilon_0 c^3}.$$

2. Elektron při oběhu ve vodíkovém atomu by vyzařoval elektromagnetickou energii. Tím by se přibližoval k jádru. Určete dobu dopadu elektronu na jádro, tj. dobu života atomu podle klasické fyziky.

Řešení. Intenzita záření I je rovna časovému úbytku energie \mathcal{E} elektronu, tj.

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = I = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \dot{r}^2. \quad (1)$$

(Předpokládáme elektrické dipólové záření.)

Na stabilní dráze se kompenzuje odstředivá síla mv^2/r Coulombovou silou, což vede k podmínce

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2}.$$

Pomocí tohoto vztahu získáme pro energii \mathcal{E} elektronu vyjádření

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r}$$

a pro úbytek

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{e^2}{8\pi \epsilon_0 r^2} \frac{dr}{dt}. \quad (2)$$

Zrychlení vyjádříme z pohybové rovnice

$$m\ddot{r} = -\frac{e^2 r}{4\pi \epsilon_0 r^3}. \quad (3)$$

Spojením rovnic (1), (2), (3) dospějeme k diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dt}(r^3 + 4cr_0^2 t) = 0, \quad (4)$$

kde $r_0 = e^2/(4\pi \epsilon_0 mc^2)$ je tzv. klasický poloměr elektronu. Rovnice (4) má řešení

$$R^3 = a_0^3 - 4cr_0^2 t, \quad (5)$$

kde $a_0 \equiv r(0)$ je počáteční vzdálenost elektronu od jádra. V čase

$$\tau = \frac{a_0^3}{4cr_0^2} \quad (6)$$

je vzdálenost $r=0$. Při počáteční hodnotě $a_0 \approx 10^{-10}$ m je „klasická doba života atomu“ $\tau \approx 10^{-10}$ s. Tato nesmírně krátká doba názorně dokumentuje nepoužitelnost klasické teorie v atomární oblasti.

3. Vodíkové plazma se nachází ve vnějším magnetickém poli \mathbf{B} . Vlivem betatronového záření ztrácí plazma energii, a tím se ochlazuje. Určete pokles teploty plazmatu vlivem tohoto záření. Návod: použijte vzorce XI(4.9) a porovnejte jej s úbytkem hustoty energie plazmatu.

Řešení. Energie emitovaná objemovou jednotkou plazmatu za jednotku času vlivem betatronového záření je

$$W^{(B)} = -\frac{du}{dt} = amc^2 n^2 \tau, \quad a = \frac{64}{3} \pi cr_0^2, \quad \tau = \frac{k\mathcal{T}}{mc^2}.$$

Zde u značí objemovou hustotu energie, z níž se čerpá energie záření. Každá částice má střední energii $3k\mathcal{T}/2$. Je-li hustota elektronů (n_e) rovna hustotě iontů (n_i), tj. $n_i = n_e \equiv n$, pak $u = (n_i + n_e)(3k\mathcal{T}/2) = 3nk\mathcal{T} = 3nmc^2 \tau$. Je tedy

$$-3nmc^2 \frac{d\tau}{dt} = amc^2 n^2 \tau.$$

Elementární integrace dá pro časový vývoj teploty

$$\tau = \frac{\tau_0}{1 + \frac{1}{3} a n \tau_0 t},$$

kde \mathcal{T}_0 je počáteční teplota, $\tau_0 = k\mathcal{T}_0/mc^2$.

4. Vypočítejte účinný průřez rozptylu elipticky polarizované vlny na volném náboji. Návod: postupujte obdobně jako při odvozování Thomsonova vzorce XI(8.6).

Řešení. Elektrické pole \mathbf{E} elipticky polarizované vlny zapíšeme ve tvaru

$$\mathbf{E} = \mathfrak{E}_1 \cos(\omega t + \alpha) + \mathfrak{E}_2 \sin(\omega t + \alpha),$$

kde vektory $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$ jsou vzájemně kolmé

$$\mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}_2 = 0.$$

Do vzorce

$$dI = \frac{[\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}]^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega$$

dosadíme $\mathbf{p} = e\mathbf{r}$, $m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$, což dá

$$dI = \frac{e^4}{16\pi^2 m^2 c^3 \epsilon_0} [\mathbf{E}, \mathbf{n}]^2 d\Omega.$$

Po vydělení absolutní hodnotou Poyntingova vektoru $S = c\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2$ dostaneme účinný průřez

$$d\sigma = \frac{dI}{S} = r_0^2 \frac{[\mathfrak{E}_1, \mathbf{n}]^2 + [\mathfrak{E}_2, \mathbf{n}]^2}{\mathfrak{E}_1^2 + \mathfrak{E}_2^2} d\Omega,$$

kde $r_0 = e^2/(4\pi \epsilon_0 mc^2)$.

5. Vypočtete účinný průřez rozptylu světla elektrickým dipólem — rotátorem. Frekvenci ω vlny předpokládejte velikou ve srovnání s frekvencí ω_0 volného pohybu rotátoru.

Řešení. Postup je obdobný jako v předešlém příkladě. V definici účinného průřezu $d\sigma = dI/S$ dosadíme

$$dI = \frac{[\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}]^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} d\Omega, \quad S = c\epsilon_0 |\mathbf{E}|^2,$$

což dá

$$d\sigma = \frac{[\dot{\mathbf{p}}, \mathbf{n}]^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 c^4 |\mathbf{E}|^2} d\Omega. \quad (1)$$

Derivaci $\dot{\mathbf{p}}$ určíme následující úvahou. Při $\omega \gg \omega_0$ lze zanedbat vlastní rotaci rotátoru a uvažovat pouze vynucenou rotaci pod vlivem silového momentu $[\mathbf{p}, \mathbf{E}]$ působícího na rotátor pod vlivem vlny. Označíme-li \mathbf{l} moment setrvačnosti rotátoru, pak pohybová rovnice zní $l\dot{\boldsymbol{\Omega}} = [\mathbf{p}, \boldsymbol{\Omega}]$, kde $\boldsymbol{\Omega}$ je vektor úhlové rychlosti. Pro změnu $\dot{\mathbf{p}}$ elektrického dipólového momentu máme rovnici $\dot{\mathbf{p}} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{p}]$. Po dosažení do předchozí rovnice dostaneme

$$\dot{\mathbf{p}} = [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{p}] + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{p}] = \frac{1}{l} [\mathbf{E}p^2 - (\mathbf{E}\mathbf{p})\mathbf{p} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{p}\boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{p}].$$

Po zanedbání kvadratických členů $\boldsymbol{\Omega}^2$ budeme mít

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{1}{l} [\mathbf{E}p^2 - (\mathbf{E}\mathbf{p})\mathbf{p}].$$

Tento vztah dosadíme do (1) a prointegrujeme přes orientace vektoru \mathbf{p} , čímž dospějeme k hledanému vztahu

$$\sigma = \frac{p^4}{9\pi\epsilon_0^2 c^4 l^2}.$$

6. Molekula se nachází v poli monochromatické elektromagnetické vlny. Předpokládejte, že nedochází k disipaci elektromagnetické energie a dokažte, že v tomto případě je tenzor polarizovatelnosti hermiteovský $\beta_{ik} = \beta_{ki}^*$.

Řešení. Při změně pole $d\mathbf{E}$ se vykoná práce

$$dA = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{p} d\mathbf{E}^*) = \frac{1}{2} (\mathbf{p} d\mathbf{E}^* + \mathbf{p}^* d\mathbf{E}),$$

kde $p_i = \beta_{ik} E_k$ je složka dipólového momentu molekuly. Jelikož — podle předpokladu — není disipace energie, bude dA rovno změně střední potenciální energie molekuly $dA = d\langle W \rangle$, kde

$$d\langle W \rangle = \frac{1}{4} (\beta_{ik} E_k dE_i^* + \beta_{ki}^* E_i^* dE_k).$$

Jelikož $d\langle W \rangle$ je úplným diferenciálem, musí být

$$\beta_{ik} = \beta_{ki}^*.$$

Z toho plyne

$$\langle W \rangle = \frac{1}{4} \mathbf{p} \mathbf{E}^*.$$

Pro magnetickou polarizovatelnost je postup obdobný.

7. Najděte polarizovatelnost β_{ik} atomu v poli rovinné monochromatické elektromagnetické vlny a slabého vnějšího (statického) homogenního pole \mathbf{B}_0 . Předpokládejte „elasticky vázaný“ elektron a prostředí bez disipace.

Řešení. Z pohybové rovnice (ω_0 je vlastní frekvence oscilátoru — elektronu)

$$m(\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r}) = e(\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}_0])$$

najdeme pro slabé pole \mathbf{B}_0 řešení (srovnej příklad II.9)

$$\mathbf{r} = \frac{e\mathbf{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} - i \frac{e\omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)} [\mathbf{E}, \mathbf{B}_0].$$

Tím je určen dipólový moment $p_i = ex_i = \beta_{ik} E_k$. Po jednoduché úpravě dostaneme hledaný výsledek

$$\beta_{ik} = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \left[\delta_{ik} - i \frac{\omega}{m} \epsilon_{ikl} B_{0l} \right].$$

Tenzor β_{ik} je opět hermitovský $\beta_{ik} = \beta_{ki}^*$.

8. Z rozptylu elektromagnetických vln byl experimentálně zjištěn tvarový faktor zkoumaného objektu

$$F(\mathbf{q}) = \frac{a^3}{(1 + a^2 q^2)^2}.$$

Určete hustotu elektrického náboje a střední kvadratický poloměr daného objektu.

Řešení. Hustotu náboje $\rho(\mathbf{r})$ vypočteme z rovnice

$$\rho(\mathbf{r}) = e(2\pi)^{-3} \int F(\mathbf{q}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) d^3\mathbf{q}.$$

Položíme $\mathbf{q}\mathbf{r} = qr \cos \Theta$, $d^3\mathbf{q} = 2\pi q^2 \sin \Theta dq d\Omega$, čímž dostaneme

$$\rho(\mathbf{r}) = -\frac{ea^2}{iu(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{q dq}{(1 + a^2 q^2)^2} \int_0^\pi e^{iqr \cos \Theta} (-iqr \sin \Theta d\Theta).$$

Integrál přes Θ se vypočte elementárně, dá $-2i \sin(qr)$, takže je

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{ea^3}{2\pi^2 r} \int_0^\infty \frac{q \sin(qr)}{(1 + a^2 q^2)^2} dq.$$

Vzniklý integrál je znám z úvodního kurzu matematiky; výsledek zní

$$\varrho(r) = \frac{e}{8\pi a^3} e^{-r/a}. \quad (1)$$

Celkový náboj

$$\int \varrho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = e. \quad (2)$$

Střední kvadratický poloměr se vypočte z definičního vztahu

$$\langle r^2 \rangle = \frac{1}{e} \int r^2 \varrho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r},$$

což dá

$$\langle r^2 \rangle = 12a^2.$$

9. Dokažte oprávněnost rovnice XI(6.16) pro Hertzův vektor. Návod: využijte nejednoznačnosti $\mathbf{\Pi}^{(e)}$ v definičních rovnicích XI(6.15).

Řešení. Do rovnic

$$\square \Phi = -\varepsilon_0^{-1} \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \square \mathbf{A} = -\mu_0 (\partial \mathbf{P} / \partial t)$$

dosadíme

$$\operatorname{div} \left(\square \mathbf{\Pi}^{(e)} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\square \mathbf{\Pi}^{(e)} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P} \right) = 0. \quad (1)$$

Z těchto rovnic plyne

$$\square \mathbf{\Pi}^{(e)} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P} = \operatorname{rot} \mathbf{F}, \quad \square \mathbf{\Pi}^{(e)} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P} = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

kde $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ a $\mathbf{f} \equiv \mathbf{f}(\mathbf{r})$ jsou libovolné vektorové funkce. Potenciály Φ a \mathbf{A} jsou invariantní vůči záměně

$$\mathbf{\Pi}^{(e)} = \mathbf{\Pi}'^{(e)} + \operatorname{rot} \mathbf{F}, \quad \mathbf{\Pi}^{(e)} = \mathbf{\Pi}'^{(e)} + \mathbf{f}. \quad (3)$$

Po dosazení do (2) dostaneme

$$\square \mathbf{\Pi}'^{(e)} + \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{P} = -\operatorname{rot}[\square \mathbf{F} - \mathbf{F}].$$

Zatím libovolný vektor \mathbf{F} zvolíme tak, aby platilo $\square \mathbf{F} - \mathbf{F} = 0$, čímž pro $\mathbf{\Pi}'^{(e)}$ získáme rovnici $\square \mathbf{\Pi}'^{(e)} + \varepsilon_0^{-1} \mathbf{P} = 0$, což je rovnice typu XI(6.16). Obdobně je to s druhou rovnicí série (2), čímž je redukce rovnic pro první Hertzův vektor dokázána. Pro druhý Hertzův vektor $\mathbf{\Pi}^{(m)}$ je postup stejný.

10. Dokažte platnost rovnice XI(11.10).

Řešení. Funkce $f(t)$ a $g(t)$ vyjádříme pomocí XI(11.9). Dostaneme tak

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt = (2\pi)^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega g_\Omega e^{-i(\omega+\Omega)t} dt.$$

V posledním integrálu užijeme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-i(\Omega + \omega)t] dt = 2\pi \delta(\Omega + \omega),$$

čímž dostaneme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t) dt = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega g_{-\omega} d\omega. \quad (1)$$

Integrál upravíme pomocí vztahů $f_\omega^* = f_{-\omega}$, $g_\omega^* = g_{-\omega}$, což dá

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\omega g_{-\omega} d\omega = \int_{-\infty}^0 (f_\omega g_{-\omega}) d\omega + \int_0^{+\infty} (f_\omega g_{-\omega}) d\omega = \int_0^{+\infty} (f_\omega g_\omega^* + f_\omega^* g_\omega) d\omega.$$

Po dosazení do (1) získáme rovnici XI(11.10).

Ke kapitole XII

1. Dokažte platnost rovnice XII(2.15).

Řešení. V derivaci

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2) = \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

uvážíme, že pro ideální tekutinu je $ds = 0$, takže z XII(2.7) plyne

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mathbf{P}}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

což dá

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2) = \left(\frac{v^2}{2} + u + \frac{\mathbf{P}}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = (h + \frac{1}{2} v^2) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}, \quad (1)$$

kde $h = u + \mathbf{P}/\rho$ je měrná entalpie. Derivace $(\partial \rho / \partial t)$ a $(\partial \mathbf{v} / \partial t)$ vyjádříme z rovnic kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v_i)$$

a z pohybové rovnice XII(2.14)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial h}{\partial x_i} = 0,$$

$$\rho \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho v_i v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \rho v_i \frac{\partial h}{\partial x_i}.$$

Po odpovídajících úpravách dospějeme k rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2) = - \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho h + \frac{1}{2} \rho v^2) v_i],$$

což je rovnice XII(2.15). Interpretace vektoru \mathbf{J} je poučná. Po dosazení za měrnou entalpii $\rho h = \rho u + P$ máme

$$\oint \mathbf{J} ds = \oint (\rho h + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v} ds = \oint (\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v} ds + \oint P \mathbf{v} ds.$$

Člen $(\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v}$ souvisí s tokem vnitřní a kinetické energie, poslední člen $P \mathbf{v}$ popisuje měrný výkon tlakových sil.

2. Odvoďte rovnici XII(2.24).

Řešení. Postup je obdobný jako v předešlém příkladě. V derivaci

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2) = (u + \frac{1}{2} v^2) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho v_i \frac{\partial v_i}{\partial t}$$

užijeme termodynamického vztahu $du = \mathcal{T} ds + P \rho^{-2} d\rho$ (nyní není $ds = 0$), a pak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{T} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) + \frac{P}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right).$$

Derivace $(\partial \rho / \partial t)$ vyjádříme pomocí rovnice kontinuity a derivace $(\partial v_i / \partial t)$ upravíme pomocí pohybové rovnice XII(2.20). Po úpravách dospějeme k rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u + \frac{1}{2} \rho v^2) = - \frac{\partial}{\partial x_i} [(\rho h + \frac{1}{2} \rho v^2) v_i - \tau'_{ij} v_j].$$

Poslední člen v XII(2.25) popisuje proud tepla $\mathbf{Q} = -\kappa \nabla \mathcal{T}$.

3. Odvoďte rovnici XII(2.23).

Řešení. Levou stranu rozepíšeme

$$\rho \mathcal{T} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) = \rho \mathcal{T} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla s \right) = \rho \mathcal{T} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + v_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \right).$$

Z termodynamického vztahu XII(2.7) vyjádříme

$$\rho \mathcal{T} ds = \rho du - \frac{P}{\rho} d\rho,$$

odkud plyne

$$\rho \mathcal{T} \left(\frac{\partial s}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\rho \mathcal{T} \left(\frac{\partial s}{\partial x_i} \right) = \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{P}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}.$$

Při úpravách se pak užije rovnice XII(2.24) — viz též příklad 2 k této kapitole.

4. Upravte rovnici XII(2.23) tak, aby popisovala změnu teploty v tekutině. Tekutinu pokládejte za nestlačitelnou.

Řešení. Bude-li proces probíhat při konstantním tlaku $P = \text{konst}$, pak je

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \left(\frac{\partial s}{\partial \mathcal{T}} \right) \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} \right), \quad \nabla s = \left(\frac{\partial s}{\partial \mathcal{T}} \right) \nabla \mathcal{T}.$$

Derivace $(\partial s / \partial \mathcal{T})$ vyjádříme pomocí měrných tepel $c_P = \mathcal{T} (\partial s / \partial \mathcal{T})_P$. Po dosazení do XII(2.23) dospějeme k rovnici

$$\rho c_P \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathcal{T} \right) = \text{div} (\kappa \nabla \mathcal{T}) + \tau'_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}. \quad (1)$$

Pro neztlačitelnou tekutinu je

$$\tau'_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

a tudíž (užijeme symetrie $\tau'_{ij} = \tau'_{ji}$)

$$\begin{aligned} \tau'_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} &= \frac{1}{2} \tau'_{ij} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \\ &= \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \equiv \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2. \end{aligned}$$

Při konstantním κ , je vedení teplot v proudící (viskozni neztlačitelné) tekutině popsáno rovnicí

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \mathcal{T} = \chi \nabla^2 \mathcal{T} + \alpha \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2,$$

kde

$$\chi = \frac{\kappa}{\rho c_P}, \quad \alpha = \frac{\eta}{2 \rho c_P}.$$

5. Dokažte, že tekutinu lze pokládat za nestlačitelnou, dokud rychlost proudění je mnohem menší než rychlost zvuku v tekutině.

Řešení. Z rovnice XII(6.6) při harmonických závislostech \mathbf{v}, P' úměrných $\exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$ dostaneme $\rho_0 \omega v = k P'$, což po dosazení $\omega = k w_0$, $P' = \rho' w_0^2$ dá

$$\frac{v}{w_0} = \frac{\rho'}{\rho_0}.$$

Malá ztláčitelnost značí $|\rho'| \ll \rho_0$, a tedy i $v \ll w_0$.

Ke kapitole XIII

1. Odvoďte Lorentzovu transformaci z požadavku invariantnosti d'Alembertova operátoru.

Řešení. V nečárkované soustavě je

$$\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (1)$$

a v čárkované

$$\square' \equiv \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \quad (2)$$

Provedeme transformaci souřadnic a času podle XIII(2.2), tj.

$$x' = A(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = B(t - DVx).$$

Nejdříve vypočteme

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} = A \frac{\partial}{\partial x'} - BDV \frac{\partial}{\partial t'}.$$

Opětovnou derivací dostaneme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = A^2 V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + B^2 D^2 V^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2DABV \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}.$$

Obdobným postupem získáme

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = A^2 V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + B^2 \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2ABV \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'},$$

takže

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= A^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \\ &- \frac{B^2}{c^2} (1 - D^2 V^2 c^2) \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{2ABV}{c^2} (1 - Dc^2) \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'}. \end{aligned}$$

Má-li být pravá strana rovna $(\partial^2/\partial x'^2) - c^{-2}(\partial^2/\partial t'^2)$, pak musí být $1 - Dc^2 = 0$, $A^2(1 - V^2/c^2) = 1$, $B^2(1 - D^2 V^2 c^2) = 1$. Odtud pak plyne Lorentzova transformace XIII(2.3).

2. Zdroj světla v soustavě K' (pevně spojené se zdrojem) emituje záření s frekvencí $\omega' \equiv \omega_0$. Určete změnu frekvence, když se zdroj světla pohybuje rychlostí V (tzv. Dopplerův jev) vůči laboratorní soustavě K .

Řešení. Vlnový vektor \mathbf{k} a $i\omega/c$ jsou složkami čtyřvektoru, takže jejich transformační zákon zní stejně jako transformace souřadnic

$$x_1' = \gamma \left(x_1 + i \frac{V}{c} x_4\right), \quad x_4' = \gamma \left(x_4 - i \frac{V}{c} x_1\right),$$

$$k_1' = \gamma \left(k_1 + i \frac{V}{c} k_4\right), \quad k_4' = \gamma \left(k_4 - i \frac{V}{c} k_1\right).$$

Dosadíme $k_4 = i\omega/c$, $k_4' = i\omega'/c$, $k_1 = k \cos \alpha = (\omega/c) \cos \alpha$, $k_1' = k' \cos \alpha' = (\omega'/c) \cos \alpha'$, pak je

$$\omega' = \gamma \omega \left(1 - \frac{V}{c} \cos \alpha\right),$$

odkud ($\omega' \equiv \omega_0$)

$$\omega = \frac{\omega_0 (1 - V^2/c^2)^{1/2}}{1 - (V/c) \cos \alpha}.$$

Při $V \ll c$ máme známý nerelativistický vzorec pro Dopplerův jev.

3. Určete elektromagnetické pole vytvořené bodovým nábojem e pohybujícím se konstantní rychlostí \mathbf{V} .

Řešení. Soustavu K' pevně spojenou s pohybujícím se nábojem označíme x', y', z', t' , laboratorní soustavu K (vůči níž se náboj pohybuje rychlostí \mathbf{V}), x, y, z, t . Rychlost \mathbf{V} orientujeme ve směru osy x , tj. $\mathbf{V} \equiv (V, 0, 0)$. Z transformačních vzorců XIII(5.1) získáme

$$\begin{aligned} \Phi &= \gamma(\Phi' + VA'_x), \quad A_x = \gamma \left(A'_x + \frac{V}{c^2} \Phi'\right), \\ A'_y &= A_y, \quad A'_z = A_z, \end{aligned}$$

kde $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$. V soustavě pevně spojené s nábojem je Φ' pole Coulombovo ($\mathbf{A}' = 0$), $\Phi' = e/(4\pi\epsilon_0 R')$, takže je

$$\Phi = \gamma \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R'}, \quad A_x = \gamma \frac{eV}{4\pi\epsilon_0 R'}.$$

Vzdálenost $R' \equiv (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2}$ vyjádříme v laboratorních proměnných pomocí Lorentzovy transformace XIII(2.3)

$$R' = \gamma R^*, \quad R^* = \left[(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right]^{1/2}.$$

Je tedy

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^*}, \quad \mathbf{A} = \frac{e\mathbf{V}}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^*}. \quad (1)$$

V soustavě K' je magnetické pole nulové ($\mathbf{B}' = 0$), elektrické pole \mathbf{E}' je Coulombovo

$$\mathbf{E}' = \frac{e\mathbf{R}'}{4\pi\epsilon_0 R'^3}.$$

Z transformačních vzorců XIII(5.2) a XII(5.3) pak dostaneme

$$\mathbf{E} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{e\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 (R^*)^3}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{V}, \mathbf{E}], \quad (2)$$

kde \mathbf{R} je průvodič od náboje e k pozorovacímu bodu x, y, z , tj. vektor o složkách $x - Vt, y, z$.

Vzorce (2) upravíme tak, že zavedeme úhel ϑ mezi směrem pohybu náboje (rychlostí \mathbf{V}) a průvodičem \mathbf{R} . Položíme $x - Vt = R \cos \vartheta$, $y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \vartheta$, což dá

$$\mathbf{E} = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}} \frac{e\mathbf{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad (3)$$

kde $\beta \equiv V/c$. Nejmenší hodnota pole odpovídá $\vartheta = 0$, tj.

$$E_{\parallel} = \frac{e(1 - \beta^2)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2 \gamma^2},$$

a maximální ($\vartheta = \pi/2$)

$$E_{\perp} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^2 (1 - \beta^2)^{1/2}} \equiv \frac{\gamma e}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

4. Určete sílu vzájemného působení (v laboratorní soustavě K) mezi dvěma náboji pohybujícími se se stejnými rychlostmi \mathbf{V} . Použijte při tom výsledků předchozí úlohy.

Řešení. Náboj e_2 vytvoří pole \mathbf{E}_2 , v němž se pohybuje náboj e_1 . Síla \mathbf{F} je pak rovna

$$\mathbf{F} = e_1 \mathbf{E}_2 + e_1 [\mathbf{V}, \mathbf{B}_2]. \quad (1)$$

Magnetické pole \mathbf{B}_2 vyjádříme pomocí rovnice (2) předešlé úlohy, takže po úpravě dvojitého vektorového součinu bude

$$\mathbf{F} = e_1 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \mathbf{E}_2 + \frac{e_1}{c^2} (\mathbf{V}\mathbf{E}_2)\mathbf{V}.$$

Pole \mathbf{E}_2 vyjádříme pomocí rovnice (3) předešlé úlohy. Zavedeme průvodič \mathbf{R} od náboje e_2 k e_1 a ϑ úhel mezi \mathbf{R} a \mathbf{V} . Po jednoduché úpravě získáme pro paralelní (F_x) a perpendikulární (F_y) složku síly

$$F_x = \frac{F_0(1 - \beta^2) \cos \vartheta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}}, \quad F_y = \frac{F_0(1 - \beta^2)^2 \sin \vartheta}{(1 - \beta^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}},$$

kde $F_0 \equiv e_1 e_2 / (4\pi\epsilon_0 R^2)$.

5. Najděte ekvipotenciální plochy (v laboratorní soustavě K) bodového náboje pohybujícího se konstantní rychlostí \mathbf{V} .

Řešení. Podle příkladu 3 k této kapitole je

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^*},$$

kde $R^* = [(x - Vt)^2 + (1 - V^2/c^2)(y^2 + z^2)]^{1/2}$. Ekvipotenciální plocha $\Phi = \text{konst}$ je tedy určena rovnicí ($a = \text{konst}$)

$$(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) (y^2 + z^2) = a^2,$$

což představuje posouvající se elipsoidy. Zploštění elipsoidu závisí na poměru V/c .

6. Najděte Lorentzovu transformaci při přechodu od soustavy K k soustavě K' , jejíž rychlost \mathbf{V} je libovolně orientována vzhledem k soustavě K .

Řešení. Zavedeme transverzální a longitudinální komponenty průvodiče

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{r\mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V}, & r'_{\parallel} &= \frac{r'\mathbf{V}}{V^2} \mathbf{V}, \\ r_{\perp} &= \mathbf{r} - r_{\parallel}, & r'_{\perp} &= \mathbf{r}' - r'_{\parallel}. \end{aligned} \quad (1)$$

Pro longitudinální (tj. paralelní s rychlostí \mathbf{V}) a transverzální (kolmé k \mathbf{V}) složky užijeme speciální Lorentzovy transformace XIII(2.5), tj.

$$r_{\parallel} = \gamma(r' + Vt'), \quad r_{\perp} = r'_{\perp}.$$

Spojení s rovnicemi (1) pak poskytne hledaný výsledek

$$\mathbf{r} = \gamma(\mathbf{r}' + \mathbf{V}t') + \frac{\gamma - 1}{V^2} \mathbf{V} \times [\mathbf{V} \times \mathbf{r}'], \quad t = \gamma \left(t' + \frac{\mathbf{V}\mathbf{r}'}{c^2} \right). \quad (2)$$

Libovolný čtyřvektor se pak transformuje stejně jako (r, ict) .

7. Najděte zobecnění adičního teorému rychlostí při libovolně orientované vzájemné rychlosti \mathbf{V} soustav K a K' . Použijte výsledků předešlé úlohy.

Řešení. Najdeme paralelní a příčné složky $\mathbf{v}_{\parallel}, \mathbf{v}_{\perp}, \mathbf{v}'_{\parallel}, \mathbf{v}'_{\perp}$. Výsledek zní

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} = \frac{\mathbf{v}' + \mathbf{V} + \frac{\gamma - 1}{V^2} [V^2 + (\mathbf{V}\mathbf{v}')] \mathbf{V}}{\gamma(1 + \mathbf{V}\mathbf{v}'/c^2)},$$

kde \mathbf{v}' je rychlost částice v K' .

8. Elektrický dipólový moment \mathbf{p}_0 se pohybuje rovnoměrně rychlostí \mathbf{V} . Najděte jím vytvořené pole $\Phi, \mathbf{A}, \mathbf{E}, \mathbf{B}$ v laboratorní (klidové) soustavě.

Řešení. V soustavě K' pevně spojené s dipólem je pole Φ' určeno vzorcem I(4.4), tj.

$$\Phi' = \frac{\mathbf{p}_0 \mathbf{r}'}{4\pi\epsilon_0 r'^3}, \quad \mathbf{A}' = 0.$$

Stejným postupem jako v úloze 3 k této kapitole dospějeme k výsledným vztahům

$$\Phi = \frac{\rho_0 r^*}{4\pi\epsilon_0\gamma(r^*)^3}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{V}\Phi,$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\gamma^2(r^*)^3} [3(\rho_0 r^*)\mathbf{R} - (r^*)^2\rho_0],$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2} [\mathbf{V}, \mathbf{E}],$$

kde

$$\mathbf{R} \equiv (x - \mathbf{V}t, y, z), \quad r^* = \left(x - \mathbf{V}t, \frac{y}{\gamma}, \frac{z}{\gamma}\right).$$

Souřadná soustava je zvolena tak, že dipól se pohybuje po ose x .

9. V referenční soustavě K existuje homogenní elektromagnetické pole \mathbf{E}, \mathbf{B} . Jakou rychlostí (vzhledem ke K) se musí pohybovat referenční soustava K' , aby v ní pole \mathbf{E}' a \mathbf{B}' byly paralelní.

Řešení. Takových soustav K' je nekonečně mnoho. Je-li nalezena jedna taková soustava, pak stejnou požadovanou vlastností ($\mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}'$) se bude vyznačovat i libovolná jiná soustava pohybující se (vzhledem k první) rychlostí paralelní se společným směrem \mathbf{E}, \mathbf{B} . Budeme proto hledat pouze takový referenční systém K' , jehož rychlost je kolmá k polím \mathbf{E}, \mathbf{B} .

Rychlost \mathbf{V} zvolíme ve směru osy x . V transformačních vzorcích XIII(5.2) a XIII(5.3) použijeme toho, že v K' je $E'_x = B'_x = 0$, $E'_y B'_z - E'_z B'_y = 0$. Po jednoduché úpravě dostaneme kvadratickou rovnici pro V

$$\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) (E_y B_z - E_z B_y) = \frac{V}{c^2} (E^2 + c^2 B^2).$$

Položíme $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, $\mathbf{S} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}]$, $u = \frac{1}{2} \epsilon_0 (E^2 + c^2 B^2)$, pak je

$$\left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right) \mathbf{S} = 2u\mathbf{V}.$$

Ze dvou kořenů nutno vzít ten, jenž $V < c$.

10. V referenční soustavě K jsou elektrické a magnetické pole navzájem kolmé $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$. Najděte referenční soustavu K' , v níž je pouze pole elektrické. Totéž pro případ vymizení pole elektrického.

Řešení. V rovnicích XIII(5.3) položíme $B'_x = B'_y = B'_z = 0$ a vzniklé vztahy mezi \mathbf{B} a \mathbf{E} pak užijeme v XIII(5.2), čímž máme

$$B_y = -\frac{V}{c^2} E_z, \quad B_z = \frac{V}{c^2} E_y,$$

$$E'_y = \frac{\gamma c^2}{V} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) B_z, \quad E'_z = -\frac{\gamma c^2}{V} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) B_y.$$

Z první rovnice plyne

$$c^2 (B_y^2 + B_z^2) = \frac{V^2}{c^2} (E_y^2 + E_z^2).$$

Rovnice má řešení $V < c$ při $E > cB$. Rychlost \mathbf{V} je

$$\mathbf{V} = \frac{c^2}{E^2} [\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{E}' = \frac{\mathbf{E}}{E} (E^2 - c^2 B^2)^{1/2}.$$

Je-li $\mathbf{E}' = 0$, pak obdobným postupem najdeme

$$\mathbf{V} = \frac{[\mathbf{E}, \mathbf{B}]}{B^2}, \quad \mathbf{B}' = \frac{\mathbf{B}}{B} (c^2 B^2 - E^2)^{1/2}.$$

Elektrické pole $\mathbf{E}' = 0$ vyžaduje, aby bylo $cB > E$.

11. Soustava diferenciálních rovnic

$$[\mathbf{B}, d\mathbf{r}] = 0 \quad (1)$$

pro magnetické indukční čáry není relativisticky invariantní; při přechodu k jiné inerciální soustavě mění svůj tvar. Ukažte, že pro jistý speciální typ polí lze soustavu rovnic

$$[\mathbf{B}, d\mathbf{r}] - \mathbf{E} dt = 0, \quad (\mathbf{E} d\mathbf{r}) = 0, \quad (2)$$

pokládat za relativistické zobecnění soustavy (1). Vyšetřete strukturu polí, pro něž je takové zobecnění možné, jakož i kompatibilitu soustavy (2).

Řešení. Ve fixovaném čase ($dt = 0$) je $[\mathbf{B}, d\mathbf{r}] = 0$, tj.

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z},$$

což je standardní tvar rovnice magnetických indukčních čar. Pomocí vztahů XIII(4.13) pro tenzor $F_{\mu\nu}$ elektromagnetického pole se snadno přesvědčíme, že soustavu (2) lze zapsat v relativisticky invariantním tvaru

$$F_{\mu\nu} dx_\nu = 0. \quad (3)$$

Kompatibilita rovnic (2) vyžaduje, aby bylo $\mathbf{E}\mathbf{B} = 0$. Tato podmínka je relativisticky invariantní (viz čl. XIII.8). Odtud plyne, že relativisticky invariantní magnetické indukční čáry lze zavést pouze v případě kolmých polí \mathbf{E} a \mathbf{B} .

Podmínka integrability soustavy (2) je

$$\left[\mathbf{B}, \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right] - \mathbf{E} \text{ div } \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

V kovariantní formě (3) tomu odpovídá

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu} F_{\nu\alpha} (\partial F_{\mu\nu} / \partial x_\alpha) = 0. \quad (5)$$

Podmínky (4) nebo (5) jsou vždycky splněny díky platnosti Maxwellových rovnic $\text{rot } \mathbf{E} + (\partial \mathbf{B} / \partial t) = 0$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$, resp. XIII(7.5).

První rovnici (2) vynásobíme vektorově vektorem \mathbf{B} a uijeme podmínku kompatibility $\mathbf{E}\mathbf{B} = 0$. Pro element $d\mathbf{r}$ magnetické indukční čáry dostáváme

$$d\mathbf{r} = \frac{1}{B} (\mathbf{B} d\mathbf{r}) + \frac{1}{B^2} [\mathbf{E}, \mathbf{B}] dt.$$

Odtud je vidět, že magnetické indukční čáry definované soustavou (2) se v prostoru posouvají rychlostí

$$\mathbf{u} = \frac{1}{B^2} [\mathbf{E}, \mathbf{B}],$$

kteřá je nenulová i v případě statických polí \mathbf{E}, \mathbf{B} .

12. Dokažte, že soustavu rovnic pro elektrické siločáry $[\mathbf{E}, d\mathbf{r}] = 0$ lze nahradit relativisticky invariantní soustavou

$$[\mathbf{E}, d\mathbf{r}] + c^2 \mathbf{B} dt = 0, \quad (\mathbf{B} d\mathbf{r}) = 0. \quad (1)$$

Najděte podmínky, za nichž je takové zobecnění možné. Postupujte obdobně jako v předešlé úloze.

Řešení. Pomocí tenzoru $F_{\mu\nu}$ elektromagnetického pole vyjádříme (1) relativisticky invariantní soustavou

$$e_{\alpha\lambda\mu} F_{\lambda\mu} dx_\alpha = 0. \quad (2)$$

Rovnice soustavy (1) jsou kompatibilní při $\mathbf{E}\mathbf{B} = 0$ (kolmosti polí \mathbf{E}, \mathbf{B}) a při podmínce integrability

$$\left[\mathbf{E}, \text{rot } \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] + \mathbf{B} \text{div } \mathbf{E} = 0. \quad (3)$$

Jelikož $\text{rot } \mathbf{B} - c^2(\partial \mathbf{E} / \partial t) = \mu_0 \mathbf{j}$, $\text{div } \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$, podmínka integrability (3) dává vztah mezi proudy \mathbf{j} a hustotou ρ

$$c^2 \rho \mathbf{B} - [\mathbf{j}, \mathbf{B}] = 0.$$

Není-li tato podmínka splněna, pak nelze elektrické siločáry zavést relativisticky invariantním způsobem.

Podobně jako v předešlé úloze najdeme, že elektrické siločáry definované soustavou rovnic (1), resp. (2) se pohybují rychlostí

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{B^2} [\mathbf{E}, \mathbf{B}].$$

13. Dokažte, že třírozměrný vlnový vektor \mathbf{k} a $i\omega/c$ jsou složkami čtyřrozměrného vlnového vektoru

$$k_\mu \equiv \left(\mathbf{k}, i \frac{\omega}{c} \right). \quad (1)$$

Řešení. Potenciál \mathcal{A}_μ rovinné elektromagnetické vlny ($\square \mathcal{A}_\mu = 0$) má tvar

$$\mathcal{A}_\mu = a_\mu \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \quad (2)$$

Relativisticky invariantní Lorentzova podmínka ($\partial \mathcal{A}_\mu / \partial x_\mu = 0$) pak vyžaduje, aby bylo $k_4 = i\omega/c$, čímž je tvrzení dokázáno.

Místo \mathcal{A}_μ lze vzít tenzor $F_{\mu\nu}$ elektromagnetického pole, jenž (vně nábojů a proudů) vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0; \quad (3)$$

opět položíme

$$F_{\mu\nu} = f_{\mu\nu} \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]. \quad (4)$$

Po dosazení do (3) dostaneme opět, že musí být $k_4 = i\omega/c$. To je ostatně vidět přímo z (2), resp. (4). Má-li být \mathcal{A}_μ čtyřvektorem, musí být fáze $\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t$ skalárem. Jelikož \mathbf{k} a \mathbf{r} jsou třírozměrné vektory, musí být $-\omega t = k_4 x_4$.

14. Najděte relativistické zobecnění materiálových vztahů $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$.

Řešení. Rovnice $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\text{rot } \mathbf{E} + (\partial \mathbf{B} / \partial t) = 0$ zapíšeme pomocí tenzoru $F_{\mu\nu}$ [viz XII(4.3)] soustavou XIII(7.1). Obdobně rovnice $\text{div } \mathbf{D} = 0$, $\text{rot } \mathbf{H} - (\partial \mathbf{D} / \partial t) = 0$ vyjádříme v kovariantním tvaru ($\partial H_{\alpha\beta} / \partial x_\beta = 0$), kde tenzor

$$H_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -i c D_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -i c D_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -i c D_3 \\ i c D_1 & i c D_2 & i c D_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí čtyřrozměrné rychlosti u_α zapíšeme vztah $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ v kovariantním tvaru

$$H_{\mu\nu} u_\nu = c \epsilon F_{\mu\nu} u_\nu.$$

Místo $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ máme $e_{\lambda\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma} u_\gamma = c \mu e_{\lambda\alpha\beta\gamma} H_{\alpha\beta} u_\gamma$, tj.

$$F_{\alpha\beta} u_\gamma + F_{\beta\gamma} u_\alpha + F_{\gamma\alpha} u_\beta = \mu c (H_{\alpha\beta} u_\gamma + H_{\beta\gamma} u_\alpha + H_{\gamma\alpha} u_\beta),$$

Ve vektorovém zápisu tomu odpovídají rovnice

$$c^2 \mathbf{D} + [\mathbf{v}, \mathbf{H}] = c^2 \epsilon (\mathbf{E} + [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \quad (1)$$

$$c^2 \mathbf{B} + [\mathbf{E}, \mathbf{v}] = \mu (c^2 \mathbf{H} + c[\mathbf{D}, \mathbf{v}]). \quad (2)$$

Při malých rychlostech $v \ll c$ tomu odpovídají vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} + (\varepsilon\mu - c^{-2})[\mathbf{v}, \mathbf{H}], \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} + (\varepsilon\mu - c^{-2})[\mathbf{E}, \mathbf{v}]. \end{aligned}$$

Rovnice (1) a (2) prvně odvodil H. MINKOVSKI v r. 1908; kovariantní přepis jiných materiálových vztahů se provede obdobně.

DODATEK I

Vektorová a tenzorová analýza

Mějme kartézskou souřadnou soustavu x_i ($i = 1, 2, 3$) a skalární funkci $f \equiv f(x_1, x_2, x_3)$. Parciální derivace $(\partial f / \partial x_i)$ jsou složkami vektoru zvaného *gradient* funkce f

$$\nabla f \equiv \text{grad } f \equiv \left(i_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + i_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + i_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) f. \quad (1)$$

Zde i_1, i_2, i_3 jsou jednotkové vektory kartézské báze, přičemž

$$i_j i_k = \delta_{jk}. \quad (2)$$

V křivočarých ortogonálních souřadnicích q_1, q_2, q_3 je přírůstek $d\mathbf{r}$ průvodiče vyjádřen vztahem

$$d\mathbf{r} = h_1 \mathbf{e}_1 dq_1 + h_2 \mathbf{e}_2 dq_2 + h_3 \mathbf{e}_3 dq_3. \quad (3)$$

přičemž

$$\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \delta_{jk}. \quad (4)$$

Z vyjádření (3) a (4) plyne pro Laméovy koeficienty h_i vyjádření ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$)

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2. \quad (5)$$

Výraz (3) odpovídá třem vzájemně ortogonálním infinitezimálním posunutím podél souřadnic q_1, q_2, q_3 , tj. třem vzájemně kolmým obloukovým elementům

$$dl_1 = h_1 dq_1, \quad dl_2 = h_2 dq_2, \quad dl_3 = h_3 dq_3, \quad (6)$$

$$(dl)^2 \equiv (d\mathbf{r})^2 = (h_1 dq_1)^2 + (h_2 dq_2)^2 + (h_3 dq_3)^2. \quad (7)$$

Složkami gradientu v křivočarých souřadnicích jsou parciální derivace $\partial f/\partial l_i$, tj.

$$\nabla f = \left(\frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) f. \quad (8)$$

Uvedeme výrazy pro h_i ve třech nejčastěji používaných souřadných soustavách. V kartézské soustavě $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ je $dl_1 = dx$, $dl_2 = dy$, $dl_3 = dz$, $h_1 = h_2 = h_3 = 1$.

Ve sférických souřadnicích r , ϑ , φ je

$$dl_1 = dr, \quad dl_2 = r d\vartheta, \quad dl_3 = r \sin \vartheta d\varphi, \quad (9)$$

$$h_1 \equiv h_r = 1, \quad h_2 \equiv h_\vartheta = r, \quad h_3 \equiv h_\varphi = r \sin \vartheta. \quad (10)$$

V cylindrických souřadnicích r , φ , z ($x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$) je

$$dl_1 = dr, \quad dl_2 = r d\varphi, \quad dl_3 = dz, \quad (11)$$

$$h_1 \equiv h_r = 1, \quad h_2 \equiv h_\varphi = r, \quad h_3 \equiv h_z = 1. \quad (12)$$

Složkami ds_i plošného elementu jsou plochy obdélníků vytvořených z obloukových elementů

$$ds_1 = dl_2 dl_3 = h_2 h_3 dq_2 dq_3, \quad (13)$$

$$ds_2 = dl_3 dl_1 = h_3 h_1 dq_3 dq_1,$$

$$ds_3 = dl_1 dl_2 = h_1 h_2 dq_1 dq_2.$$

Objemový element dV je roven

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (14)$$

Gaussova věta

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int \operatorname{div} \mathbf{A} dV \quad (15)$$

převádí integrál přes uzavřenou plochu na integrál objemový. V kartézské soustavě je

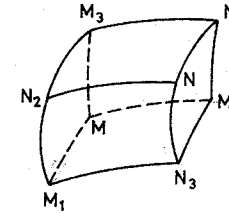
$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}. \quad (16)$$

Rovnici (15) užijeme k výpočtu $\operatorname{div} \mathbf{A}$ v křivočarých souřadnicích

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta s} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta V}. \quad (17)$$

Objem ΔV vezme ve tvaru infinitezimálního křivočarého rovnoběžnostěnu, jehož jedním z vrcholů je bod M , v němž počítáme hodnotu $\operatorname{div} \mathbf{A}$ (viz obr. A.1.).

Stěna $MM_2N_1M_3$ tohoto rovnoběžnostěnu má plošku $ds_1 = h_2 h_3 dq_2 dq_3$. Zvolí-



Obr. A.1.

me-li orientaci MM_1 ve směru rostoucích hodnot q_1 , pak normálová komponenta vektoru \mathbf{A} k této stěně je $-A_1$ (minus A_1) a tok stěnou $MM_2N_1M_3$ je $-A_1 h_2 h_3 dq_2 dq_3$. Protilehlá stěna $M_1N_3NN_2$ se liší od stěny $MM_2N_1M_3$ pouze tím, že jí odpovídá hodnota souřadnice $q_1 + dq_1$ při nezměněných souřadnicích q_2 a q_3 . Tok vektoru \mathbf{A} stěnou $M_1N_3NN_2$ je

$$\left(A_1 h_2 h_3 + \frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} dq_1 \right) dq_2 dq_3.$$

Výsledný tok stěnami $MM_2N_1M_3$ a $M_1N_3NN_2$ je

$$\frac{\partial(A_1 h_2 h_3)}{\partial q_1} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Stejným způsobem dostaneme tok stěnami $MM_1N_2M_3$ a $M_2N_3NN_1$, resp. $MM_1N_3M_2$ a $M_3N_2NN_1$

$$\frac{\partial(A_2 h_3 h_1)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3, \quad \frac{\partial(A_3 h_1 h_2)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Složením těchto tří výrazů dostaneme celkový tok $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \equiv \oint A_n ds$ a pak pomocí vztahu (17) získáme hledané vyjádření

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_3 h_1) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right]. \quad (18)$$

Zvolíme-li $\mathbf{A} = \nabla f$, pak pro Laplaceův operátor $\operatorname{div} \operatorname{grad} \equiv \nabla^2$ máme vyjádření

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (19)$$

Z vyjádření (10) a (12) získáme $\operatorname{div} \mathbf{A}$ a ∇^2 ve sférických a cylindrických souřadnicích.

V křivočarých souřadnicích q_1, q_2, q_3 se orientace vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ mění s místem. Při úpravách se často potřebuje divergence těchto vektorů. Příslušné výrazy získáme z (18), kde postupně položíme $\mathbf{A} = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, čímž dostaneme

$$\operatorname{div} \mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3) \quad (20)$$

a další dva vztahy cyklickou permutací.

Cirkulaci $\oint \mathbf{A} \, dl$ vektoru podél uzavřené křivky l převedeme pomocí Stokesovy věty

$$\oint \mathbf{A} \, dl = \int d\mathbf{s} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = \int d\mathbf{s} \cdot \text{rot}_n \mathbf{A} \quad (21)$$

na integrál přes plochu, která má tuto křivku za konturu. V kartézských souřadnicích je

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Rovnice (21) uijeme k vyjádření $\text{rot } \mathbf{A}$ v křivočarých souřadnicích

$$\text{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta l} \mathbf{A} \, dl}{\Delta s}. \quad (23)$$

Postup je obdobný jako při odvozování (18), proto provedeme výklad stručněji. Abychom dostali průmět $\text{rot } \mathbf{A}$ do souřadnicové čáry q_1 vezmeme křivku $MM_2N_1M_3M$, a odpovídající plošku $ds_1 = h_2h_3 \, dq_2 \, dq_3$. Vypočteme křivkové integrály podél částí tohoto uzavřeného oblouku. První člen je očividný

$$\int_{MM_2} \mathbf{A} \, dl = A_2 \, dl = A_2 h_2 \, dq_2.$$

Integrál po oblouku M_3N_1 se liší od předchozího integrálu pouze tím, že q_3 je zaměněno na $q_3 + dq_3$ při nezměněných souřadnicích q_1, q_2 . Je tedy

$$\int_{M_3N_1} \mathbf{A} \, dl = - \int_{N_1M_3} \mathbf{A} \, dl = \left[A_2 h_2 + \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial q_3} \right] dq_3 \, dq_2.$$

Stejným způsobem vypočteme

$$\int_{MM_3} \mathbf{A} \, dl = - \int_{M_3M} \mathbf{A} \, dl = A_3 h_3 \, dq_3,$$

$$\int_{M_2N_1} \mathbf{A} \, dl = \left[A_3 h_3 + \frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial q_2} \right] dq_3 \, dq_2.$$

Složením získaných výrazů dostaneme cirkulaci po uzavřené křivce $MM_2N_1M_3M$

$$\oint \mathbf{A} \, dl = \left[\frac{\partial(A_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(A_2 h_2)}{\partial q_3} \right] dq_2 \, dq_3.$$

Po vydělení ploškou $ds_1 = h_3 h_2 \, dq_3 \, dq_2$ dostaneme $(\text{rot } \mathbf{A})_1$ a další složky cyklickou permutací

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{A})_1 &= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 h_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 h_2) \right], \\ (\text{rot } \mathbf{A})_2 &= \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (A_1 h_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (A_3 h_3) \right], \\ (\text{rot } \mathbf{A})_3 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (A_2 h_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (A_1 h_1) \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Výsledek lze zapsat ve tvaru determinantu

$$\text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Gaussovu větu (15) lze snadno zobecnit i na tok tenzorové veličiny. Je-li T_{ij} tenzorem druhého řádu, pak

$$\oint T_{ij} \, ds_j = \oint T_{ij} n_j \, ds = \int dV \frac{\partial}{\partial x_j} T_{ij}. \quad (26)$$

Pro tenzory vyšších řádů platí obdobné vztahy, např.

$$\oint T_{ijk} \, ds_k = \oint T_{ijk} n_k \, ds = \int dV \frac{\partial}{\partial x_k} T_{ijk}. \quad (27)$$

Formálně tomu odpovídá záměna

$$ds_k \rightarrow dV \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (28)$$

Obdobně Stokesově větě odpovídá formální záměna

$$dl \rightarrow d\mathbf{s} \times \nabla. \quad (29)$$

Závěrem uvedeme několik často se vyskytujících vztahů, jejichž ověření je elementární

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f, \quad (30)$$

$$\nabla(\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B}, \quad (31)$$

$$\text{div}(f\mathbf{A}) = f \text{div } \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla f, \quad (32)$$

$$\text{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \text{rot } \mathbf{B}, \quad (33)$$

$$\text{rot}(f\mathbf{A}) = f \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \times \nabla f, \quad (34)$$

$$\text{rot}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A}, \quad (35)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \text{div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (36)$$

Pomocí těchto identit a záměn (27) a (28) se snadno přesvědčíme o platnosti integrálních vztahů

$$\oint f \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \int [f \operatorname{div} \mathbf{A} + \mathbf{A} \nabla f] \, dV, \quad (37)$$

$$\oint [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \, d\mathbf{s} = \int (\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}) \, dV, \quad (38)$$

$$\int f \mathbf{A} \, d\mathbf{l} = \int (f \operatorname{rot} \mathbf{A} - [\mathbf{A} \times \nabla f]) \, d\mathbf{s}, \quad (39)$$

$$\oint u \, dv = \int [\nabla u \times \nabla v] \, d\mathbf{s}. \quad (40)$$

Pro snazší reference uvedeme základní diferenciální operace ve dvou nejčastěji používaných křivočarých souřadnicích — sférických a cylindrických.

Pomocí vztahů (8), (9), (12), (18), (19), (25) dostaneme odpovídající výrazy. Ve sférických souřadnicích r, ϑ, φ je

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \nabla_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta}, \quad \nabla_\varphi = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (41)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \quad (42)$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\varphi \sin \vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right],$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\vartheta = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}, \quad (43)$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\vartheta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta},$$

$$\nabla^2 \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (44)$$

V cylindrických souřadnicích r, φ, z je

$$\nabla_r = \frac{\partial}{\partial r}, \quad \nabla_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (45)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \quad (46)$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad (47)$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi},$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (48)$$

Zvláštní zmínky vyžaduje vektor $\nabla^2 \mathbf{A}$. V kartézských souřadnicích jsou složky vektoru $(\nabla^2 \mathbf{A})_i = \nabla^2 A_i$. V křivočarých souřadnicích najdeme složky $\nabla^2 \mathbf{A}$ z vektorové identity $\nabla^2 \mathbf{A} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Pomocí uvedených výrazů pro grad , div a rot dostaneme

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) - \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\vartheta = \nabla^2 A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} -$$

$$\frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\varphi = \nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2 \sin^2 \vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \vartheta}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi},$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_r = \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi},$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_\varphi = \nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi},$$

$$(\nabla^2 \mathbf{A})_z = \nabla^2 A_z.$$

Diracova distribuce

Bodový náboj chápeme jako limitní případ náboje malých rozměrů. Poněvadž náboj je konečný (má konečnou hodnotu), stává se hustota $\rho = \Delta e / \Delta V$ v místě sídla náboje nekonečnou.

V jednorozměrném případě vyjádříme tyto abstrakce vztahy

$$\rho_0(x) = e\delta(x), \quad (1)$$

kde

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \infty & \text{pro } x &= 0, \\ \delta(x) &= 0 & \text{pro } x &\neq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

a singularita v bodě $x = 0$ je taková, že

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (3)$$

Veličinu $\delta(x)$ definovanou vztahy (2) a (3) nazýváme *Diracovou zobecněnou funkcí* nebo *Diracovou distribucí*. Z těchto vztahů plyne také

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x') dx' = f(0), \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\delta(x' - x) dx' = f(x). \quad (5)$$

Obyčejně píšeme integrační meze $\langle -\infty, +\infty \rangle$, avšak stačí, aby integrační oblast obsahovala singulární bod $\delta(x)$.

Distribuci $\delta(x)$ budeme chápat jako jistou limitní operaci. Nechť

$$\delta_a = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (6)$$

je posloupnost funkcí. Při $x \neq 0$ je $\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x) = 0$; v bodě $x = 0$ je $\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(0) = \infty$, přičemž platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} = 1.$$

Jiné vyjádření získáme z Dirichletova teorému. Je-li $f(x)$ spojitá v bodě $x = 0$, pak je

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \frac{\sin Kx}{x} dx = f(0). \quad (7)$$

Srovnání tohoto výrazu s (4) dává možnost interpretovat $\delta(x)$ jako limitu posloupnosti funkcí

$$\delta_K(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin Kx}{x}. \quad (8)$$

Jelikož

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_K(x) dx = 1,$$

je splněn také požadavek (3). Vzhledem k tomu, že je

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin Kx}{x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-K}^K e^{ikx} dk,$$

můžeme $\delta(x)$ chápat takto

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk, \quad (9)$$

tj. jako Fourierův obraz jedničky.

Uvedeme některé užitečné vztahy pro $\delta(x)$. Tyto vztahy nutno chápat jako rovnost mezi odpovídajícími integrály obou stran. Tak např.

$$x\delta(x) = 0 \quad (10)$$

nutno chápat ve shodě s definicí (4), tj.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\delta(x) dx = 0.$$

Obdobný význam má i často užívaný evidentní vztah

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (11)$$

Distribuci složitějších argumentů zavedeme obdobně. Nechť $g(x)$ má pouze prosté kořeny $g(x_i) = 0$. Substitucí $g(x) = y$ se přesvědčíme o platnosti vztahu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta[g(x)] dx = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad (12)$$

jemuž odpovídá rovnost

$$\delta[g(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}. \quad (13)$$

Speciálním případem je často užívaný vztah

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} [\delta(x + a) + \delta(x - a)]. \quad (14)$$

Distribuci $\delta(x)$ lze též vyjádřit jako derivaci Heavisideovy skokové funkce

$$\Theta(x) = 1 \text{ pro } x > 0, \quad \Theta(x) = 0 \text{ pro } x < 0.$$

Derivace $\Theta'(x)$ splňuje požadavky (1) až (3).

Derivaci distribuce $\delta'(x)$ budeme opět chápat ve smyslu limity posloupnosti. Integrací per partes máme vztah

$$\int f(x) \delta'_a(x) dx = f(x) \delta_a(x) - \int f'(x) \delta_a(x) dx.$$

Jelikož na hranicích integrační oblasti je $\delta_a(x) = 0$, platí

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \delta(x) dx = -f'(0). \quad (15)$$

Zobecnění na n -tou derivaci $\delta^{(n)}(x)$ je nasnadě

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x') \delta^{(n)}(x' - x) dx' = (-1)^n f^{(n)}(x). \quad (16)$$

Distribuci $\delta(x)$ lze spojit s relací úplnosti báze φ_n lineárního hermiteovského operátoru L . Nechť

$$L\varphi_n = L_n\varphi_n. \quad (17)$$

Vlastní funkce jsou ortogonální, lze je zvolit tak, že platí

$$(\varphi_m, \varphi_n) \equiv \int \varphi_m^*(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{mn}. \quad (18)$$

Je-li báze φ_n úplná, pak funkci $f(x)$ lze vyjádřit rozvojem

$$f(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x), \quad (19)$$

přičemž koeficienty a_n jsou určeny vztahem

$$a_n = (\varphi_n, f) \equiv \int \varphi_n^*(x') f(x') dx'. \quad (20)$$

Tento vztah se získá tak, že (19) vynásobíme $\varphi_m^*(x)$, prointegrujeme a užijeme (18). Po dosazení (20) do (18) dospějeme ke vztahu

$$f(x) = \int f(x') \left(\sum_n \varphi_n^*(x') \varphi_n(x) \right) dx'.$$

Odtud je vidět, že lze položit

$$\delta(x' - x) = \sum_n \varphi_n^*(x') \varphi_n(x). \quad (21)$$

V případě spojitého spektra operátoru L se sumace nahradí integrací

$$\delta(x' - x) = \int \varphi_L^*(x') \varphi_L(x) dL, \quad (22)$$

přičemž vlastní funkce jsou normovány vztahem

$$\int \varphi_L^*(x) \varphi_L(x) dx = \delta(L - L'). \quad (22')$$

Vezmeme-li

$$\varphi_n(x) = (n + \frac{1}{2})^{1/2} P_n(x),$$

kde $P_n(x)$ jsou Legendreovy polynomy (viz dodatek V), pak je

$$\delta(x' - x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2}) P_n(x') P_n(x). \quad (23)$$

Z ortogonalit a úplnosti Besselových funkcí $J_n(z)$ lze získat vyjádření

$$\delta(r' - r) = (rr')^{1/2} \int_0^{\infty} k J_n(kr) J_n(kr') dk, \quad (0 \leq r, r' < \infty). \quad (24)$$

V případě více proměnných definujeme distribuci jako součin jednorozměrných distribucí. Uvedeme dva příklady

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z'), \quad (25)$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = (2\pi)^{-3} \int \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] d^3\mathbf{k}. \quad (26)$$

Pro funkci $\delta(\mathbf{R}) \equiv \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ lze odvodit užitečný vztah. Potenciál Φ vyhovuje rovnici $\nabla^2 \Phi = -\rho/\epsilon$. Bodovému náboji $\rho = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ odpovídá potenciál

$$\Phi(\mathbf{R}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Z toho plyne, že platí

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{R}). \quad (27)$$

Greenova funkce

Mějme lineární diferenciální rovnici s pravou stranou

$$L\psi = f. \quad (1)$$

Greenovou funkcí $G(x, x')$ této rovnice nazýváme funkci vyhovující rovnici

$$LG(x, x') = \delta(x - x'), \quad (2)$$

kde $\delta(z)$ je Diracova distribuce zavedená v předešlém dodatku II. Je-li $G(x, x')$ známo, pak řešení rovnice (1) je

$$\psi(x) = \int G(x, x')f(x') dx'. \quad (3)$$

O správnosti této rovnice se přesvědčíme tak, že na obě strany zapůsobíme operátorem L , což s ohledem na (2) dá

$$L\psi(x) = \int LG(x, x')f(x') dx' = \int \delta(x - x')f(x') dx' = f(x).$$

Greenovu funkci lze vyjádřit pomocí báze φ_n a vlastních hodnot L_n . Ze vztahů

$$\psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x), \quad f(x) = \sum_n b_n \varphi_n(x)$$

po dosazení do (1) dostaneme vztah mezi koeficienty a_n a b_n

$$a_n = \frac{1}{L_n} b_n, \quad (4)$$

přičemž

$$b_n = (\varphi_n, f) \equiv \int \varphi_n^*(x')f(x') dx'. \quad (5)$$

Pomocí (4) a (5) dostaneme

$$\psi(x) = \int f(x') \left(\sum_n \frac{1}{L_n} \varphi_n^*(x')\varphi_n(x) \right) dx'.$$

Srovnání s (3) poskytuje vztah

$$G(x, x') = \sum_n \frac{1}{L_n} \varphi_n^*(x')\varphi_n(x). \quad (6)$$

Greenova funkce není rovnicí (2) určena jednoznačně, jelikož k ní lze přidat funkci G_0 , která je řešením homogenní rovnice

$$LG_0 = 0. \quad (7)$$

Tato funkce se zvolí v závislosti na dodatečných podmínkách (hraničních, počátečních apod.).

Fourierova transformace

Zobecněním rozvoje funkce $f(x)$ pomocí trigonometrických funkcí $\exp(ikx)$

$$f(x) = \sum_k a_k \exp(ikx)$$

je Fourierův integrál

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int f_k \exp(ikx) dk. \quad (1)$$

Veličinu f_k nazýváme *Fourierovým obrazem* funkce $f(x)$. Nalezení těchto veličin je důležitým úkolem spektrální analýzy. Je-li funkce $f(x)$ známa, pak (1) představuje integrální rovnici pro f_k . Řešení této rovnice zní

$$f_k = \int f(x) \exp(-ikx) dx. \quad (2)$$

Důkaz provedeme takto: Rovnici (1) vynásobíme $\exp(-ik'x)$ a prointegrujeme přes x

$$\int f(x) \exp(-ik'x) dx = (2\pi)^{-1} \int f_k dk \int \exp[i(k-k')x] dx.$$

Ve shodě s výsledky dodatku II je

$$\int \exp[i(k-k')x] dx = 2\pi \delta(k-k'),$$

$$\int f_k \delta(k-k') dk = f_{k'},$$

čímž je potvrzena platnost (2).

S ohledem na reference uvedeme trojrozměrné zobecnění předchozích výsledků.

Funkci $f(\mathbf{r})$ vyjádříme Fourierovým integrálem

$$f(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-3} \int f_k \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{k}, \quad (3)$$

v němž je

$$f_k = \int f(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}. \quad (4)$$

Upozornění. V literatuře se vyskytují různé definice Fourierových koeficientů (obrazů) $\tilde{f}(k) \equiv f_k$. Tak např. místo (1) se užívá

$$f(x) = \int f_k \exp(ikx) dk,$$

popř.

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \int f_k \exp(ikx) dk.$$

Tomu pak odpovídají příslušné změny v koeficientech v rovnici (2). Na tuto skutečnost nutno dávat pozor při porovnávání či přebírání vzorců z různých pramenů.

Sférické funkce

V teorii potenciálu se často vyskytuje funkce $1/R$, kde $R = |r - r'| = (r^2 - 2rr' \cos \alpha + r'^2)^{1/2}$. Nechť $r' < r$, pak

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} \frac{1}{(1 - 2\mu \cos \alpha + \mu^2)^{1/2}},$$

kde $\mu = (r'/r) < 1$. Funkci $(1 - 2\mu \cos \alpha + \mu^2)^{-1/2}$ rozvineme v řadu podle mocnin μ

$$\frac{1}{(1 - 2\mu \cos \alpha + \mu^2)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \mu^l P_l(\cos \alpha). \quad (1)$$

Polynomy $P_l(\xi)$ nazýváme Legendreovy; prvních několik členů je

$$P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi, \quad P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1), \quad P_3(\xi) = \frac{1}{2}(5\xi^3 - 3\xi);$$

obecně je

$$P_l(\xi) = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2} \left[\xi^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)} \xi^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2l-1)(2l-3)} \xi^{l-4} \mp \dots \right]. \quad (2)$$

Rozvineme $(\xi^2 - 1)^l$ podle mocnin ξ a vypočteme derivaci

$$\frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l = \frac{d^l}{d\xi^l} \left[\sum_{k=0}^l (-1)^k \frac{l!}{k!(l-k)!} \xi^{2l-2k} \right].$$

Porovnání s (2) vede k Rodriguesově formuli

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l. \quad (3)$$

Položíme-li v (1) $\cos \alpha = \pm 1$ a porovnáme s geometrickou řadou $(1 \mp \mu)^{-1} =$

$\sum (\pm 1)^l \mu^l$, dospějeme k rovnici

$$P_l(\pm 1) = (\pm 1)^l. \quad (4)$$

Funkce $u \equiv P_l(\xi)$ jsou řešením Legendreovy rovnice

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 u}{d\xi^2} - 2\xi \frac{du}{d\xi} + l(l+1)u = 0. \quad (5)$$

Jednoduchým výpočtem se přesvědčíme, že polynomy jsou ortogonální na intervalu $\langle -1, +1 \rangle$, tj. platí

$$\int_{-1}^{+1} P_k(\xi) P_l(\xi) d\xi = 0, \quad (k \neq l). \quad (6)$$

Tento vztah lze dokázat také přímo z Legendreovy rovnice (5). Při $k = l$ se jedná o integrál

$$I \equiv \int_{-1}^{+1} P_l^2(\xi) d\xi = \frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{+1} P_l(\xi) \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l d\xi.$$

Integrací per partes dostaneme

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2^l l!} \left[P_l(\xi) \frac{d^{l-1}}{d\xi^{l-1}} (\xi^2 - 1)^l - \int \frac{dP_l}{d\xi} \frac{d^{l-1}}{d\xi^{l-1}} (\xi^2 - 1)^l d\xi \right] = \\ &= -\frac{1}{2^l l!} \int_{-1}^{+1} \frac{dP_l}{d\xi} \frac{d^{l-1}}{d\xi^{l-1}} (\xi^2 - 1)^l d\xi. \end{aligned}$$

Postup prodloužíme, až vznikne integrál

$$\int_{-1}^{+1} \frac{d^l P_l}{d\xi^l} (1 - \xi^2)^l d\xi.$$

Podle (2) je

$$\frac{d^l P_l}{d\xi^l} = \frac{(2l)!}{2^l l!}.$$

Výsledný vztah zní

$$\int_{-1}^{+1} P_k(\xi) P_l(\xi) d\xi = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl}. \quad (7)$$

Legendreovy polynomy souvisí s jistým typem řešení Laplaceovy rovnice $\nabla^2 f = 0$. Nechť f je forma (homogenní polynom) l -tého stupně proměnných x, y, z . Každý člen bude mít tvar

$$x^{n_1} y^{n_2} z^{n_3}, \quad n_1 + n_2 + n_3 = l.$$

Po zavedení sférických souřadnic $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $z = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$ se separuje radiální a angulární část, čemuž odpovídá řešení typu

$$f \equiv f(r, \vartheta, \varphi) = r^l Y(\vartheta, \varphi). \quad (8)$$

Z vyjádření Laplaceova operátoru ve sférických souřadnicích (viz dodatek I)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$$

pak pro funkci $Y \equiv Y(\vartheta, \varphi)$ plyne rovnice (užijeme $\nabla^2 f = 0$ a (8))

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial Y}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y = 0. \quad (9)$$

Separaci proměnných

$$Y(\vartheta, \varphi) = \Phi(\varphi)\Theta(\vartheta) \quad (10)$$

dostaneme pro $\Phi(\varphi)$ rovnici

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -m^2 \Phi, \quad (11)$$

kde m je reálné číslo. Jednoznačnost řešení $\Phi_m = \exp(im\varphi)$ vyžaduje, aby m bylo celým číslem

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (12)$$

$$\Phi_m(\varphi) = \exp(im\varphi). \quad (13)$$

Spojením rovnic (9), (10) a (13) dostaneme pro $\Theta(\vartheta)$ rovnici

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 \Theta}{d\xi^2} - 2\xi \frac{d\Theta}{d\xi} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] \Theta = 0, \quad (14)$$

kde

$$\xi \equiv \cos \vartheta. \quad (15)$$

Rovnice (14) je při $m=0$ totožna s rovnicí (5). Substitucí

$$\Theta(\xi) = (1 - \xi^2)^{|m|/2} v(\xi) \quad (16)$$

získáme rovnici

$$(1 - \xi^2) \frac{d^2 v}{d\xi^2} - 2\xi(|m|+1) \frac{dv}{d\xi} + [l(l+1) - |m| - m^2]v = 0. \quad (17)$$

Srovnáním s rovnicí (5) se přesvědčíme, že lze položit

$$v(\xi) = \frac{d^{|m|}}{d\xi^{|m|}} P_l(\xi). \quad (18)$$

Nenulové jsou tedy pouze ta $v(\xi) \equiv v$, pro něž $|m| \leq l$, tj.

$$m = 0, \pm 1, \dots, \pm l. \quad (19)$$

Funkce

$$\Theta(\xi) \equiv P_{lm}(\xi) = (1 - \xi^2)^{|m|/2} \frac{d^{|m|}}{d\xi^{|m|}} P_l(\xi) \quad (20)$$

se nazývají *sdužené (asociované) Legendreovy polynomy*.

Normované řešení

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = N_{lm} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \quad (21)$$

s normovacími faktory

$$N_{lm} = \left[\frac{(l - |m|)! (2l + 1)}{(l + |m|)! 4\pi} \right]^{1/2} \quad (22)$$

jsou *sférické funkce*. Funkce Y_{lm} jsou ortonormální

$$\int Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l'm'}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (23)$$

kde $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ je element prostorového úhlu.

V rovnici (1) je α úhel mezi vektory \mathbf{r} a \mathbf{r}' . Označme ϑ, φ a ϑ', φ' sférické úhly těchto vektorů. V teorii sférických funkcí se dokazuje tzv. *adiční teorém*

$$P_l(\cos \alpha) = \sum_{m=-l}^{+l} \frac{2}{2l+1} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \quad (24)$$

kde

$$\cos \alpha = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (25)$$

Pro reference uvedeme explicitní tvar funkcí Y_{lm} pro $l=0, 1, 2$

$$Y_{00} = \frac{1}{(4\pi)^{1/2}},$$

$$Y_{10} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \cos \vartheta, \quad Y_{1,\pm 1} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \sin \vartheta \exp(\pm i\varphi),$$

$$Y_{20} = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{4\pi}\right)^{1/2} (3 \cos^2 \vartheta - 1), \quad Y_{2,\pm 2} = \left(\frac{15}{32\pi}\right)^{1/2} \sin^2 \vartheta \exp(\pm 2i\varphi),$$

$$Y_{2,\pm 1} = \left(\frac{15}{8\pi}\right)^{1/2} \sin \vartheta \cos \vartheta \exp(\pm i\varphi).$$

Cylindrické funkce

Cylindrické funkce $Z \equiv Z(z)$ jsou řešením Besselovy rovnice

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dZ}{dz} + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) Z = 0. \quad (1)$$

Řešení, jež při $\operatorname{Re} p \geq 0$ je regulární (ohraňované) v bodě $z=0$, se nazývá cylindrickou funkcí prvního druhu neboli Besselovou funkcí. Toto řešení — značí se $J_p(z)$ — je dáno řadou

$$J_p(z) = \frac{z^p}{2^p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2^{2k} k! \Gamma(p+k+1)}. \quad (2)$$

V rovnici (1) se vyskytuje p^2 , proto druhým nezávislým řešením lze vzít $J_{-p}(z)$. Je-li p celým číslem

$$p = n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

pak z (2) plyne

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \quad (4)$$

V tom případě ($p=n$) nejsou řešení J_p a J_{-p} lineárně nezávislé, proto se zvolí Neumannovy funkce $N_p(z)$ definované vztahem

$$N_p(z) = \frac{1}{\sin(p\pi)} [J_p(z) \cos(p\pi) - J_{-p}(z)]. \quad (5)$$

Při $p=n$ definujeme N_n jako limitu N_p pro $p \rightarrow n$.

Často se užívají lineární kombinace Besselových J_p a Neumannových N_p funkcí. Tyto kombinace — Hankelovy funkce — jsou

$$\begin{aligned} H_p^{(1)}(z) &= J_p(z) + i N_p(z), \\ H_p^{(2)}(z) &= J_p(z) - i N_p(z). \end{aligned} \quad (6)$$

Pro $|z| \ll 1$ se snadno odvodí asymptotické vztahy

$$J_p(z) \cong \frac{z^p}{2^p \Gamma(p+1)}, \quad J_0(z) \cong 1 - \frac{z^2}{4}, \quad (7)$$

$$N_n(z) \cong -\frac{2^n (n-1)!}{\pi z^n}, \quad N_0(z) \cong \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma z}{2}\right), \quad (8)$$

$$H_0^{(1,2)}(z) \cong \pm \frac{2i}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma z}{\pm 2i}\right), \quad (9)$$

kde $\ln \gamma \cong 0,5772$ je Eulerova konstanta.

Pro velké hodnoty $|z| \gg 1$ pak platí

$$J_p(z) \cong \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right), \quad (10)$$

$$N_p(z) \cong \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right), \quad (11)$$

$$H_p^{(1,2)}(z) \cong \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \exp\left[\pm i\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right)\right]. \quad (12)$$

Z rovnice (1) lze odvodit řadu rekurentních vztahů, např.

$$Z_{p-1}(z) + Z_{p+1}(z) = \frac{2p}{z} Z_p(z). \quad (13)$$

Při $p=n$ se dá $J_n(z)$ vyjádřit integrálem

$$J_n(z) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \exp[i(z \sin \varphi - n\varphi)] d\varphi. \quad (14)$$

Hypergeometrická funkce

Hypergeometrická funkce $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ je řešením Gaussovy hypergeometrické rovnice

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)]u' - \alpha\beta u = 0. \quad (1)$$

Řešením regulárním v bodě $z=0$ je nekonečná řada

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad (2)$$

která se při $\alpha = -m$, nebo $\beta = -n$ ($m, n = 0, 1, 2, \dots$) redukuje na polynom.

Druhé lineárně nezávislé řešení rovnice (1) je řešení, jež je v bodě $z=0$ singulární, a nebudeme je potřebovat.

S hypergeometrickou rovnicí souvisí tzv. *degenerovaná* nebo *konfluentní hypergeometrická rovnice*

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0. \quad (3)$$

Řešením regulárním v počátku $z=0$ je

$$u_1 = F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (4)$$

Druhým řešením je řešení singulární v bodě $z=0$, proto je zde uvádět nebudeme.

Středování tenzorových veličin

Často potřebujeme střední hodnoty ze součinů komponent vektorů. Zde budeme uvažovat jednotkové vektory. Střední hodnota $\langle n_i \rangle$ je definována rovnicí

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{4\pi} \int n_i \, d\Omega, \quad (1)$$

kde $d\Omega$ je element prostorového úhlu. Položíme-li $n_1 = \sin \vartheta \cos \varphi$, $n_2 = \sin \vartheta \sin \varphi$, $n_3 = \cos \vartheta$, $d\Omega = \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$, pak je

$$\langle n_i \rangle = 0. \quad (2)$$

Jelikož $\langle n_i \rangle$ je vektor nezávislý na volbě souřadného systému, musí to být nulový vektor.

Střední hodnota

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{4\pi} \int n_i n_j \, d\Omega \quad (3)$$

je symetrickým tenzorem druhého řádu, nezávislým na volbě souřadné báze. Jediným tenzorem tohoto druhu je Kroneckerovo δ_{ij} , proto

$$\langle n_i n_j \rangle = a \delta_{ij}.$$

Položíme-li $i=j$ a sečteme $n_i n_i = 1 = a \delta_{ii} = 3a$, tudíž

$$\langle n_i n_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}. \quad (4)$$

Střední hodnota ze součinů tří jednotkových vektorů je nulová

$$\langle n_i n_j n_k \rangle = \frac{1}{4\pi} \int n_i n_j n_k \, d\Omega = 0. \quad (5)$$

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle = \frac{1}{4\pi} \int n_i n_j n_k n_l d\Omega \quad (6)$$

je tenzorem čtvrtého řádu symetrickým vůči záměně libovolné dvojice indexů. Tomu vyhovuje tenzor

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle = b(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}).$$

Položíme-li $i = j, k = l$ a přes stejné indexy sečítáme, dostaneme $15b = 1$, a tudíž

$$\langle n_i n_j n_k n_l \rangle = \frac{1}{15} (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}). \quad (7)$$

Ze získaných vzorců lze počítat střední hodnoty komponent vektorů; např. pro $(\mathbf{An})(\mathbf{Bn}) = A_i n_i B_j n_j$ pomocí (4) dostaneme

$$\langle (\mathbf{An})(\mathbf{Bn}) \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} A_i B_j = \frac{1}{3} (\mathbf{AB}), \quad (8)$$

obdobně pro $(\mathbf{An})(\mathbf{Bn})(\mathbf{Cn})(\mathbf{Dn}) = A_i B_j C_k D_l n_i n_j n_k n_l$ obdržíme

$$\langle (\mathbf{An})(\mathbf{Bn})(\mathbf{Cn})(\mathbf{Dn}) \rangle = \frac{1}{15} [(\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{AC})(\mathbf{BD}) + (\mathbf{AD})(\mathbf{BC})]. \quad (9)$$

Soustava jednotek CGS

U nás je bezvýhradně uzákoněna soustava jednotek SI (ČSN 01 1301). Jelikož převážná část světové teoretické literatury je psána v soustavě jednotek centimetr, gram, sekunda (zkráceně CGS), uvádíme Maxwellovy rovnice a materiálové vztahy v této soustavě.

Jednotkou síly je 1 dyn, což je síla, jež jednomu gramu udělí zrychlení 1 cm s^{-2} . Je tedy

$$1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}. \quad (1)$$

Jednotkou energie je 1 erg = 1 dyn cm, což dá

$$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}. \quad (2)$$

U mechanických jednotek se jedná o pouhé bezrozměrné převodové faktory. Rozdíl nastává u elektromagnetických veličin.

Počátek je ve volbě konstanty k_0 v Coulombově zákonu I(2.1). Zatímco v SI se volí I(2.2), v CGS se klade $k_0 = 1$, což dá pro sílu F mezi dvěma náboji

$$F = \frac{e_1 e_2}{r^2}. \quad (3)$$

Jednotkovému náboji $e_1 = e_2 = \text{CGS}$ odpovídá $r = 1 \text{ cm}$, $F = 1 \text{ dyn}$. Rozměr jednotky náboje v této soustavě je $\text{cm}^{3/2} \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Elementární náboj e_0 (absolutní hodnota náboje elektronu) je

$$e_0 = (4,803242 \pm 0,000014) 10^{-10} \text{ CGS}. \quad (4)$$

Klasický poloměr elektronu s hmotností

$$m = (9,109534 \pm 0,000047) 10^{-28} \text{ g} \quad (5)$$

pak je

$$r_0 = \frac{e_0^2}{mc^2} = (2,817938 \pm 0,000007) 10^{-13} \text{ cm.} \quad (6)$$

Při tom rychlost světla

$$c = (2,99792458 \pm 0,00000001) 10^{10} \text{ cm s}^{-1}. \quad (7)$$

V souvislosti s volbou (3) se mění Maxwellova rovnice $\text{div } \mathbf{D} = \rho$. V látkovém prostředí bude $\text{div } \mathbf{E} = 4\pi(\rho - \text{div } \mathbf{P})$, a tedy

$$\text{div } \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (8)$$

kde materiálový vztah (místo $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$) je

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}. \quad (9)$$

V soustavě CGS mají tedy \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{P} stejný rozměr, což je důsledkem volby $k_0 = 1$. Permittivita je v CGS bezrozměrným číslem. Poznamenejme ještě, že rovnice (8) odpovídá hraniční podmínce

$$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\eta, \quad (10)$$

kde η je plošná hustota (volných) nábojů na rozhraní.

Druhým rozdílným momentem mezi soustavou SI a CGS je volba konstanty k_1 v I(8.1). Zatímco v SI soustavě se pro vakuum klade $k_1 = \mu_0/(2\pi)$, v soustavě CGS se volí $k_1 = 4\pi/c$. Tím místo $\text{rot } \mathbf{H} - (\partial \mathbf{D}/\partial t) = \mathbf{j}$ máme v soustavě CGS

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (11)$$

Materiálový vztah (místo $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$) nyní je

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} \quad (12)$$

a Maxwellův proud

$$\mathbf{j}^{(M)} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \left(\text{místo } \mathbf{j}^{(M)} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Veličiny \mathbf{B} , \mathbf{H} , \mathbf{M} mají stejný rozměr. Jednotkou magnetické indukce je gauss (1 G) a jednotkou magnetické intenzity je oersted (1 Oe).

Rovnice

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

a hraniční podmínka

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (14)$$

zůstanou v CGS soustavě formálně stejné jako v soustavě SI.

Faradayův zákon elektromagnetické indukce je v soustavě CGS vyjádřen rovnicí

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (15)$$

V soustavě CGS se pak zavádějí skalární (Φ) a vektorový (\mathbf{A}) potenciál

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi. \quad (16)$$

Ve vakuu pak místo rovnic X(3.14) a X(3.15) platí pro tyto potenciály nehomogenní vlnová rovnice

$$\square \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad \square \Phi = -4\pi\rho. \quad (17)$$

Ostatní modifikace se snadno odvodí pomocí uvedených vztahů. Zde explicitně uvedeme pouze příslušné modifikace pro hustotu elektromagnetické energie u a Poyntingův vektor \mathbf{S}

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}), \quad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \quad (18)$$

OZNAČENÍ ZÁKLADNÍCH VELIČIN

A	vektorový potenciál
A	absolutní hodnota vektorového potenciálu
\mathcal{A}	radiační část vektorového potenciálu
B	vektor magnetické indukce
B	absolutní hodnota vektoru magnetické indukce
\mathcal{B}	radiační část vektoru magnetické indukce
<i>c</i>	rychlost světla ve vakuu
D	vektor elektrické indukce
D	absolutní hodnota vektoru elektrické indukce
\mathcal{D}	radiační část vektoru elektrické indukce
e_{ijk}	jednotkový antisymetrický tenzor
<i>e</i>	základ přirozených logaritmů
<i>e</i>	elektrický náboj
e_0	elementární náboj
$e^{(p)}$	polarizační náboj
E	vektor elektrické intenzity
E	absolutní hodnota vektoru elektrické intenzity
\mathcal{E}	radiační část vektoru elektrické intenzity
\mathcal{E}	energie
f	hustota síly
F	síla
\mathcal{F}	volná energie
g	hustota hybnosti elektromagnetického pole
<i>h</i>	Planckova konstanta
\hbar	$h/2\pi$
H	vektor magnetické intenzity

H	absolutní hodnota vektoru magnetické intenzity
\mathcal{H}	radiační část vektoru magnetické intenzity
H	hamiltonián
\mathcal{H}	hustota hamiltoniánu
<i>i</i>	imaginární jednotka
i	hustota plošného proudu
\mathcal{I}	intenzita elektrického proudu
I	intenzita záření
j	vektor proudové hustoty
j_n	normálová komponenta vektoru proudové hustoty
k, K	vlnový vektor
<i>k, K</i>	absolutní hodnota vlnového vektoru
L	lagrangián
\mathcal{L}	hustota lagrangiánu
L	koeficient samoindukce
L_{AB}	koeficient vzájemné indukce
m	magnetický dipólový moment
<i>m</i>	hmotnost
M	vektor magnetizace
M	absolutní hodnota vektoru magnetizace
n, N	jednotkový vektor ve směru normály
N	index lomu
N	počet částic
<i>n</i>	hustota částic
p	elektrický dipólový moment
<i>p</i>	absolutní hodnota elektrického dipólového momentu
p	hybnost
P	vektor elektrické polarizace
P	absolutní hodnota vektoru elektrické polarizace
<i>q</i>	průřez
Q	elektrický kvadrupólový moment
Q_{ik}	tenzor elektrického kvadrupólu
r, R	průvodič, polohový vektor
r_{AB}	$r_A - r_B$
r_{AB}	$ r_{AB} $
r_0	$e_0^2/(4\pi\epsilon_0 mc^2)$ — klasický poloměr elektronu
R_{AB}	$R_A - R_B$
R_{AB}	$ R_{AB} $
\mathcal{R}	elektrický odpor
s	plocha, povrch
S	Poyntingův vektor

\mathcal{E}	radiační část Poyntingova vektoru
\mathcal{S}	hustota entropie
t	čas
T	charakteristická doba, perioda
T_{ik}	tenzor napětí
\mathcal{T}	absolutní teplota
u	hustota elektromagnetické energie
U	elektromagnetická energie
\mathcal{U}	napětí, elektromotorická síla
\mathbf{v}, \mathbf{V}	rychlost
v, V	absolutní hodnota rychlosti
V	objem
w	fázová rychlost elektromagnetické vlny
\mathcal{Z}	komplexní odpor
β	V/c
γ	měrná elektrická vodivost, v kap. XIII $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$
γ_{ik}	tenzor měrné elektrické vodivosti
δ	změna, variace veličiny
$\delta(x)$	Diracova distribuce
δ_{ik}	Kroneckerův symbol
Δ	přírůstek
∇^2	Laplaceův operátor
∇	operátor nabla (gradient)
ε	elektrická permitivita
ε_0	permitivita vakua
$\varepsilon^{(r)}$	relativní permitivita ($\varepsilon/\varepsilon_0$)
ε_{ik}	tenzor permitivity
η	plošná hustota volného náboje, v kap. XII koeficient viskozity
$\eta^{(p)}$	plošná hustota polarizačního (vázaného) náboje
$\boldsymbol{\kappa}$	jednotkový vektor (\mathbf{k}/k)
κ	elektrická susceptibilita
κ_{ik}	tenzor elektrické susceptibility
λ	vlnová délka
μ	magnetická permeabilita
μ_0	permeabilita vakua
$\mu^{(r)}$	relativní permeabilita (μ/μ_0)
μ_{ik}	tenzor magnetické permeability
ν	frekvence
$\mathbf{\Pi}$	Hertzův vektor
ϱ	objemová hustota volného náboje, v kap. XII hustota tekutiny
$\varrho^{(p)}$	objemová hustota polarizačního náboje

Φ	skalární potenciál
σ	účinný průřez
χ	magnetická susceptibilita
χ_{ik}	tenzor magnetické susceptibility
ω	kruhová (úhlová) frekvence
Ω	prostorový úhel
$\boldsymbol{\Omega}$	vektor úhlové rychlosti
Ω	objem čtyřprostoru

- BATYGIN V. V., TOPTYGIN I. N., Zadači po elektrodinamike, Nauka Moskva 1970.
 BECKER R., Theorie der Elektrizität, B. G. Teubner, Leipzig, 1951.
 GRINBERG G. A., Izbrannye voprosy matematičeskoj teorii električeskich i magnitnych javlenij, izd. AN SSSR Moskva 1948.
 HAŇKA L., Teorie elektromagnetického pole, SNTL Praha 1982.
 IVANENKO D. D., SOKOLOV A. A., Klassičeskaja teorija polja, Gostechizdat Moskva 1951.
 JACKSON J. D., Classical Electrodynamics, John Willey New York 1962.
 LANDAU L. D., LIFŠIC E. M., Teorija polja, Nauka Moskva 1976.
 LANDAU L. D., LIFŠIC E. M., Elektrodinamika splošnych sred, GITTL Moskva 1957.
 PANOFKI W. K., PHILLIPS M., Classical Electricity and Magnetism, Addison-Wesley Reading Mass. 1962. Ruský překlad IL Moskva 1968.
 SOMMERFELD A., Elektrodynamik, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1949.
 STRATTON J. A., Electromagnetic Theory, McGraw-Hill New York 1949. Český překlad SNTL 1961.
 TAMM I. E., Osnovy teorii električestva, GITTL Moskva 1954.
 VOTRUBA V., MUZIKÁŘ Č., Teorie elektromagnetického pole, Academia Praha 1958.
 VOTRUBA V., Základy speciální teorie relativity, Academia Praha 1969.

- absolutně černé těleso 129
 absorpce záření oscilátorem 251
 adiční teorém Newtonův 274
 — — Einsteinův 279
 Alfvén 268
 Alfvénovy vlny 268
 Ampère 32
 anténa lineární 220
 — rámová 226
- Besselova funkce 429
 betatronové ztráty 223
 Biotův—Savartův zákon 40
 Boltzmann 10
 Born 312
 Bornova—Infeldova elektrodynamika 312
 Brewsterův úhel 159
- coulomb 11
 Coulomb 13
 Coulombův zákon 13
- čas absolutní 273
 — vlastní 280
 čtyřpotenciál 286
 čtyřvektor 281
 — hybnosti 281
 — proudové hustoty 285
 — rychlosti 281
 — síly 282
 — zrychlení 282
- difúze kvazistacionárního pole 110
 dipól Hertzův 219
 dipólové záření elektrické 218, 234
 — — magnetické 226
 — — řetězce 235
 dipólový moment elektrický 22
 — — magnetický 38
 Dirac 319, 323
 Diracova distribuce 416
 disipace energie 117
 disperzní vztahy 176
 disperzní zákon 64, 185
- eikonál 171
 eikonálová rovnice 172
 Einstein 10, 277
 Einsteinova sumační konvence 6
 Einsteinův adiční teorém 279
 — zákon hmotnost—energie 282
 elektrické dipólové záření 218
 — kvadrupólové záření 224
 elektrický dipólový moment 22, 95
 elektrodynamika Boppa—Podolského 317
 — Bornova—Infeldova 312
 — nelineární 311
 — s magnetickými monopóly 319
 — s vyššími derivacemi 316
 elementární náboj 11
 energie elektrického pole 29
 — elektromagnetického pole 121
 — klidová 282

— magnetické pole 43
← v disperzním prostředí 132
entropická vlna 268
Eulerovy rovnice 254
Eulerovy—Lagrangeovy rovnice 294, 296

Faraday 9, 44
Faradayův zákon elektromagnetické indukce 44
fáze 139
fázová rychlost 139, 168
Fok 191
Formánek 7
formfaktor 243
Foucaultův proud 111
Fourierova transformace 422
Fourierův integrál 422
— rozklad elektrostatického pole 96
Frank 245, 250
Fresnel 158
Fresnelova rovnice 168
Fresnelovy vzorce 158
funkce Besselova 428
— cylindrické 428
— hypergeometrické 430
— Neumannova 428

Galileiova transformace 273
Galileiův princip relativity 274
gauss 439
Gaussova věta 410, 413
— — elektrostatiky 16
geometrická optika 170
Greenova funkce 420
— — kauzální 201
— — Laplaceovy rovnice 76
— — vlnové rovnice 198
grupová rychlost 149, 177
gyromagnetický faktor 103

Hallova konstanta 107
Hallův jev 70, 106
hamiltonián Lorentzovy síly 211
— relativistické částice 282
Hamiltonova hustota 304
Hartman 264
Hartmanovo řešení 262
Hertz 9
Hertzovy vektory 229, 230
Hertzův dipól 219

Hilbertova transformace 178
hloubka průniku 110
hraniční podmínky 20, 28, 38, 74, 109, 162
hustota energie elektrického pole 31
— — elektromagnetického pole 121
— — magnetického pole 43
— hamiltoniánu 304
— lagrangianu 295
— náboje 12
— polarizačního náboje 27
— proudová 12
hybnost elektromagnetického pole 124
hypergeometrické funkce 430

impedance 116
— povrchová 162
index lomu 137, 139, 157, 172, 177
indukce elektrická 26, 56
— elektromagnetická 44
— magnetická 31, 54
indukční tok 43
Infeld 312
intenzita elektrického pole 14, 52
— magnetického pole 36, 57
— záření 218
invariantnost gradientní 191, 214
— kalibrační 10
invarianty pole 293, 294
inverze časová 70
— prostorová 70

Jelley 251
jev Hallův 70, 106
— skinový 112
Jouleovo teplo 66, 121

kalibrační invariantnost 191, 214
kapacita 98
koeficient indukčnosti 43
— influenční 98
— kapacitní 98
— Laméův 409
— odrazu 158
— samoindukce 44
komplexní odpor 115
— potenciál 83
konformní zobrazení 84
konstanta Eulerova 429
— Planckova 173

— šíření 183
Kramersovy 176
Kramersovy—Kronigovy relace 176
kvadrupólový moment 93
kvazistacionární pole 108

Landau 134, 440
Lagrangeova hustota 300
lagrangian 104
Langer 7
Laplaceova rovnice 18, 87
Laplaceova—Poissonova rovnice 18, 28, 40, 73
Laplaceův operátor 18, 414
Larmorova úhlová rychlost 104
Larmorův teorém 104
látky diamagnetické 37
— paramagnetické 37
Lebedev 128
Legendreův polynom 93, 425
Lenzův vektor 214
Leontovičovy podmínky 162
Lifšic 134
lom vln 156
Lorentz 9, 52, 279
Lorentzova elektronová teorie 51
— podmínka 39, 192, 286
— síla 33, 191, 288
— transformace 9, 279
Lorentzovy rovnice 52
Lundquist 286

magnetická indukce 32, 54
magnetické dipólové záření 224
magnetický monopól (náboj) 319
magnetizace 36, 57
magnetizační proud 36
magnetohydrodynamika 253
magnetohydrodynamické vlny 264, 269
magnetozvukové vlny 268
materiálové vztahy 58, 60, 72
Maxwell 9, 45, 139
Maxwellovy rovnice 48
— — hamiltonovská forma 205
— — jednoznačnost řešení 131
— — kovariantní tvar 291
— — z variačního principu 298
Maxwellův proud 46
měrná vodivost 65
metoda inverze 84

— komplexních potenciálů 82
— nábojového zobrazení 84
— separace proměnných 78
Michelsonův—Morleyův pokus 275
Minkovského formalismus 280
Minkovski 280, 408
moment dipólový elektrický 22, 89
— — magnetický 38, 102
— kvadrupólový 92
— multipólový 94, 100
multipólový moment 94, 100
— rozvoj 88, 100
— — radiačního pole 215

náboj bodový 13
— elektrický 11
— elementární 11
— fiktivní 85
— magnetický 34
— plošný 18
— polarizační 24, 52
— vázaný 24, 52
nábojové zobrazení 84
Noetherová 302
Noetherové teorém 302
Noga 7

odpor komplexní 116
— ohmický 115
— wattový 115
odraz vln 157
— — na kovech 160
Ohmův zákon 65, 105
— — lokální 65, 119
— — diferenciální 65, 119
operátor d'Alembertův 190
— Laplaceův 18, 411
— nabla 409

Pauliovy matice 147
permeabilita 37, 177
permitivita 27, 36, 60, 176
Planckova konstanta 173
Planckův zákon 211
plocha Fresnelova 169
— nabitá 18
podmínka Lorentzova 39, 192
podmínky Cauchyovy—Riemannovy 82
— hraniční 20, 28, 38, 74, 109

- Leontovičovy 162
- polarizace 26, 56
 - elektromagnetické vlny 144
 - eliptická 145
 - kruhová 145
 - lineární 145
- polarizační proud 48
- pole bodového náboje 13
 - elektrické 24
 - elektrického dipólu 24
 - elektrostatické 17, 72
 - elektromagnetické 9, 51
 - magnetické 34, 100
 - makroskopické 54
 - mikroskopické 52
 - stacionárního proudu 34, 99
 - záření (radiální) 216
- potenciál avanceovaný 196
 - elektrostatický 17
 - elektromagnetický 189
 - komplexní 83
 - Lienardův—Wiechertův 203
 - radiální 216
 - retardovaný 196
 - skalární 17, 190
 - vektorový 39, 189
- polynom Legendreův 425
- Poyntingův vektor 121, 169
- princip superpozice 14
 - přičinnosti 174
 - variační 294, 295
- prostorčas 280
- prostorčasový interval 279
- proud elektrický 12
 - Foucaultův 111
 - magnetizační 36
 - Maxwellův 46
 - polarizační 47
 - stacionární 34, 99
- proudová hustota 12
 - — plošného proudu 38
- radiální pole 216
 - zóna 215
- Rayleigh 186
- Rayleighův—Jeansův zákon 210
- relace disperzní 63, 176
 - Kramersovy—Kronigovy 64, 176
 - Onsangerovy 105

- relaxační doba 66, 138
- rezonátor 180
- rovnice Eulerovy 254
 - Eulerovy—Lagrangeovy 294, 296
 - Hamiltonova—Jacobiova 214
 - Helmholtzova 137
 - kontinuity 13
 - Lagrangeovy 209, 294
 - Laplaceova—Poissonova 17, 28
 - Lorentzova 33
 - Lorentzovy 52
 - magnetohydrodynamiky 258
 - Maxwellovy 48, 131, 205
 - Navierovy—Stokesovy 257
 - siločar 16
 - telegrafní 136
 - vlnová 136
 - — nehomogenní 193
- rozptyl koherentní 238
 - na atomech 243
 - Thomsonův 237
- rychlost fázová 139, 168
 - grupová 149, 177
- sférické funkce 427
- siločáry 16
 - elektrického dipólu 91
 - — kvadrupólu 350
- síla Lorentzova 33
- skinový jev 112
- Snellův zákon 156
- spin 147
- Stokesova věta 17, 412
- Stokesovy parametry 147
- stupeň polarizace 146
- susceptibilita elektrická 26, 173
 - magnetická 36
- Tamm 245, 250
- telegrafní rovnice 136
- tesla 32
- Tesla 32
- tenzor elektrické permitivity 60
 - — susceptibilita 61
 - energie hybnosti 302
 - kvadrupólového momentu 92
 - magnetické permeability 61
 - — susceptibilita 61
 - měrné vodivosti 65

- momentu hybnosti 130, 307
- napětí Abrahamův 127
 - — Maxwellův 126
 - — Minkovského 126
- polarizace 146
- pole elektromagnetického 287
- Thomson 238
- Thomsonův rozptyl 237
 - účinný průřez 238
- tlak záření (světelný) 128
- transformace Fourierova 422
 - Hilbertova 178
 - Lorentzova 279
- tvarový faktor 243
- úhel Brewsterův 159
 - lomu 157
 - odrazu 157
 - totální reflexe 159
 - úplné polarizace 159
- úloha Dirichletova 74
 - Neumannova 74
- variační princip 294
 - — pro pole 295
- vektor elektrické indukce 25, 54, 166
 - elektrické intenzity 14, 54
 - elektrické polarizace 25, 54
 - Lenzův 214
 - magnetické indukce 32, 166
 - magnetické intenzity 36, 57
 - magnetizace 36
 - proudové hustoty 12, 33
 - Poyntingův 121, 166
- vektorový potenciál 39, 189
- věta Gaussova 16, 410
- vlna Alfvénova 268
 - cylindrická 152
 - entropická 268
 - magnetohydrodynamická 269
 - mimořádná 169
 - monochromatická 141
 - normální 169

- rovinná 138
- polarizovaná 145
- sférická 151
- vlnová rovnice 136
 - — nehomogenní 193
 - — v dielektrikách 136, 141
 - — ve vodičích 137
- vlnočet 141
- vlnoplocha 139
- vlnovod 183
- vlnový svazek 148
- vlnový vektor 141, 166
- vlny E, B, H 165, 186
 - elektromagnetické 135
 - — v anizotropním prostředí 165
 - — v nehomogenním prostředí 162
- Votruba 273, 440
- zákon Biotův—Savartův 40
 - Coulombův 13
 - disperzní 64, 185
 - elektromagnetické indukce 44
 - Planckův 211
 - Rayleighův—Jeansův 210
 - Snellův 157
 - Stefanův—Boltzmannův 129
 - zachování energie 120
 - — hybnosti 123
 - — momentu hybnosti 129
 - — náboje 13
- záření betatronové 221
 - brzdné 219
 - Čerenkovo 245
 - dipólového řetězce 235
 - elektrické dipólové 218, 234
 - — kvadrupólové 225
 - elektromagnetické 128, 205
 - jehlovité 236
 - koherentní 145
 - magnetické dipólové 226
- zobrazení konformní 84
 - nábojové 84
- zóna blízká 233
 - radiální 215

OBSAH

Předmluva	5
Úvod	9
Kapitola I	
Přehled poznatků o elektromagnetických jevech	11
I.1 Elektrický náboj. Rovnice kontinuity	11
I.2 Coulombův zákon a jeho důsledky	13
I.3 Elektrostatický potenciál. Laplaceova—Poissonova rovnice	17
I.4 Elektrický dipólový moment	22
I.5 Elektrické pole v látkovém prostředí	24
I.6 Energie elektrického pole	29
I.7 Magnetická indukce. Lorentzova síla	31
I.8 Magnetické pole stacionárního proudu. Vektor magnetizace a magnetické intenzity	34
I.9 Vektorový potenciál	39
I.10 Energie magnetického pole	41
I.11 Faradayův zákon elektromagnetické indukce	44
I.12 Maxwellovo zobecnění Biotova—Savartova zákona. Maxwellův proud	45
I.13 Soustava Maxwellových rovnic elektromagnetického pole a hraničních podmínek	47
Kapitola II	
Lorentzova teorie elektromagnetického pole	51
II.1 Základní představy Lorentzovy elektronové teorie	51
II.2 Středování mikroskopických veličin	53
II.3 Lorentzovo odvození rovnic makroskopické elektrodynamiky látkových prostředí	54
II.4 Materiálové vztahy	58
II.5 Lokální tvar Ohmova zákona	64
II.6 Termodynamika látek v elektromagnetickém poli	66
II.7 Prostorová a časová inverze vektorů elektromagnetického pole	70

Kapitola III		
Metody řešení elektrostatického pole		72
III.1 Rovnice elektrostatického pole		72
III.2 Věta o jednoznačnosti řešení		74
III.3 Greenova funkce Laplaceovy rovnice		76
III.4 Metoda separace proměnných		78
III.5 Metoda komplexních potenciálů		82
III.6 Metoda nábojového zobrazení a metoda inverze		84
III.7 Multipólový rozvoj elektrostatického pole		88
III.8 Soustava nábojů ve vnějším elektrostatickém poli		94
III.9 Fourierův rozklad elektrostatického pole		96
III.10 Kapacitní a influenční koeficienty		97
Kapitola IV		
Pole stacionárního proudu		99
IV.1 Základní rovnice		99
IV.2 Multipólový rozvoj pole stacionárního proudu		100
IV.3 Magnetický dipólový moment soustavy nábojů		101
IV.4 Larmorův teorém		103
IV.5 Hallův jev		105
Kapitola V		
Kvazistacionární elektromagnetické pole		108
V.1 Rovnice kvazistacionárního pole		108
V.2 Řešení rovnic kvazistacionárního pole		111
V.3 Skinový jev		112
V.4 Komplexní odpor		115
V.5 Pohyb vodiče v magnetickém poli		118
Kapitola VI		
Zákony zachování v elektrodynamice		120
VI.1 Zákon zachování energie		120
VI.2 Zákon zachování hybnosti. Maxwellův tenzor napětí		123
VI.3 Tlak světelného záření		127
VI.4 Zákon zachování momentu hybnosti		129
VI.5 Jednoznačnost řešení Maxwellových rovnic		131
VI.6 Elektromagnetická energie v disperzním prostředí		132
Kapitola VII		
Elektromagnetické vlny		135
VII.1 Vlnová a telegrafní rovnice		135
VII.2 Vlnová rovnice v homogenním a izotropním dielektriku		136
VII.3 Vlnová rovnice ve vodičích		137
VII.4 Rovinné vlny v dielektriku		138
VII.5 Rovinná monochromatická vlna v dielektriku		141
VII.6 Polarizace elektromagnetické vlny. Tenzor polarizace		144
VII.7 Vlnový svazek. Grupová rychlost		148
VII.8 Sférická a cylindrická vlna		150
Kapitola VIII		
Síření elektromagnetických vln		154
VIII.1 Odraz a lom na dielektrickém rozhraní. Fresnelovy vzorce		154
VIII.2 Odraz na kovech		160
VIII.3 Vlny v nehomogenním prostředí		162
VIII.4 Vlny v anizotropním prostředí		165
VIII.5 Přiblížení geometrické optiky. Eikonálová rovnice		170
VIII.6 Kramersovy—Kronigovy disperzní relace		173
Kapitola IX		
Elektromagnetické rezonátory a vlnovody		179
IX.1 Základní rovnice. Hraníční podmínky		179
IX.2 Elektromagnetické kmity v rezonátorech		180
IX.3 Vlnovod obdélníkového průřezu		183
IX.4 Vlny elektrického a magnetického typu		186
Kapitola X		
Nehomogenní vlnová rovnice		189
X.1 Elektromagnetické potenciály		189
X.2 Kalibrační invariantnost		190
X.3 Lorentzova podmínka		191
X.4 Retardované a avanceované potenciály		195
X.5 Greenova funkce vlnové rovnice		198
X.6 Pole pohybujících se bodových nábojů. Liénardovy—Wiechertovy potenciály		202
X.7 Hamiltonovská forma Maxwellových rovnic		205
X.8 Lagrangián a hamiltonián pro Lorentzovu sílu		211
Kapitola XI		
Elektromagnetické záření		215
XI.1 Radiační zóna a radiační pole		215
XI.2 Multipólový rozvoj radiačního pole		215
XI.3 Elektrické dipólové záření		217
XI.4 Betatronové záření		221
XI.5 Magnetické dipólové a elektrické kvadrupólové záření		223
XI.6 Hertzovy vektory		227
XI.7 Záření dipólového řetězce		235
XI.8 Thomsonův rozptyl		237
XI.9 Rozptyl na atomech		241
XI.10 Čerenkovo záření		245
XI.11 Absorpce záření oscilátorem		251
Kapitola XII		
Magnetohydrodynamika		253
XII.1 Úvodní poznámky		254
XII.2 Přehled základních rovnic hydrodynamiky		254
XII.3 Soustava rovnic magnetohydrodynamiky		258
XII.4 Speciální případy rovnic magnetohydrodynamiky		260
XII.5 Hartmanovo řešení rovnic magnetohydrodynamiky		260
XII.6 Magnetohydrodynamické vlny malé amplitudy		264

XII.7	Entropická vlna	267
XII.8	Alfvénovy vlny	268
XII.9	Magneto-zvukové vlny	268
XII.10	Magneto-hydrodynamické vlny libovolné amplitudy	269
Kapitola XIII		
Relativistická elektrodynamika 273		
XIII.1	Galileiova transformace a Maxwellova elektrodynamika	273
XIII.2	Lorentzova transformace	277
XIII.3	Geometrická interpretace. Minkovského formalismus	280
XIII.4	Čtyřpotenciál a tenzor elektromagnetického pole	284
XIII.5	Transformace vektorů elektromagnetického pole	287
XIII.6	Kovariantní tvar Lorentzovy síly	288
XIII.7	Kovariantní tvar rovnic elektromagnetického pole	290
XIII.8	Invarianty elektromagnetického pole	292
XIII.9	Variační princip pro pole	294
XIII.10	Odvození Maxwellových rovnic z variačního principu	298
XIII.11	Teorém Emmy Noetherové	300
XIII.12	Tenzor energie-hybnosti	302
XIII.13	Tenzor momentu hybnosti	307
XIII.14	Nelineární elektrodynamika	311
XIII.15	Elektrodynamika s vyššími derivacemi	316
XIII.16	Elektrodynamika s magnetickými monopóly	319
Řešené úlohy 324		
Dodatek I. Vektorová a tenzorová analýza 409		
Dodatek II. Diracova distribuce 416		
Dodatek III. Greenova funkce 420		
Dodatek IV. Fourierova transformace 422		
Dodatek V. Sférické funkce 424		
Dodatek VI. Cylindrické funkce 428		
Dodatek VII. Hypergeometrická funkce 430		
Dodatek VIII. Středování tenzorových veličin 431		
Dodatek IX. Soustava jednotek CGS 433		
Označení základních veličin 436		
Literatura 440		
Věcný a jmenný rejstřík 441		



Teorie elektromagnetického pole

Prof. RNDr. JOZEF KVASNICA, DrSc.

Vydala Academia, nakladatelství
Československé akademie věd
v Praze 1985

Přebal a vazbu navrhl Daniel Sodoma
Odpovědný redaktor Daniel Zitko
Technický redaktor Petr Čech

Vydání 1. – 452 stran (27 obrázků)
Vytiskl ofsetem Tisk, knižní výroba, n. p.,
Brno, závod 1

27,20 AA – 27,77 VA
Náklad 2500 výtisků – 03/5 – 1466
21-081-85

Cena váz. výtisku Kčs 42,–