Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ____________________

Skupina: ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	6	6	4	4	6	4	30
Získáno							

[6] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1([2,3]) \mid y(2) = 4,\, y(3) = 3 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_2^3 \left(4y \left(y'\right)^5 - \frac{8}{3} x \left(y'\right)^6 \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnic pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gateaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nekladná.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) \bigg|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y + th) = \int_2^3 \left(4(y + th) \left((y + th)'\right)^5 - \frac{8}{3} x \left((y + th)'\right)^6 \right) \mathrm{d}x,$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) = \int_2^3 \left(4h \left((y + th)'\right)^5 + 20(y + th) \left((y + th)'\right)^4 h' - \frac{48}{3} x \left((y + th)'\right)^5 h' \right) \mathrm{d}x,$$

po dosazení $t = 0$ dostaneme

$$D\Phi(y)[h] = \int_2^3 \left(4h \left(y'\right)^5 + 20y \left(y'\right)^4 h' - 16x \left(y'\right)^5 h' \right) \mathrm{d}x.$$

Funkce h bereme z prostoru $\left\{ h \in \mathcal{C}^1([2,3]) \mid h(2) = 0,\, h(3) = 0 \right\}$. Integrací metodou *per partes* dostaneme

$$D\Phi(y)[h] = \int_2^3 \left(4 \left(y'\right)^5 - 20 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(y \left(y'\right)^4 \right) + 16 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(x \left(y'\right)^5 \right) \right) h \, \mathrm{d}x$$

$$= \int_2^3 \left(4 \left(y'\right)^5 - 20 \left(y'\right)^5 - 20y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(y'\right)^4 + 16 \left(y'\right)^5 + 16x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(y'\right)^5 \right) h \, \mathrm{d}x = \int_2^3 \left(-20y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(y'\right)^4 + 16x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(y'\right)^5 \right) h \, \mathrm{d}x,$$

odkud lze přečíst Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál $\Phi(y)$

$$-20y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(y'\right)^4 + 16x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(y'\right)^5 = 0.$$

Rozepíšeme explicitně derivace a přepíšeme Eulerovy–Lagrangeovy rovnice do tvaru

$$-80y \left(y'\right)^3 y'' + 80x \left(y'\right)^4 y'' = 0,$$

což lze upravit to tvaru

$$(y')^3 (-y + xy')\, y'' = 0.$$

Eulerovy–Lagrangeovy rovnice vyřešíme jednoduchou úvahou. Buď musí být

$$y'' = 0$$

nebo

$$(-y + xy') = 0$$

nebo

$$y' = 0.$$

V prvním případě je řešením funkce

$$y = ax + b,$$

kde a a b jsou integrační konstanty. V druhém případě řešíme rovnici pomocí standardního přepisu do tvaru

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x},$$

odkud plyne, že

$$y = cx,$$

kde c je integrační konstanta. V třetím případě je řešením konstantní funkce $y = d$. Okrajové podmínky lze zjevně splnit pouze pro řešení ve tvaru $y = ax + b$. Požadujeme

$$y(2) = 4,$$
$$y(3) = 3,$$

odkud

$$y_{\mathrm{ext}} = -x + 6.$$

Druhou derivaci funkcionálu Φ spočteme podle definice

$$\begin{aligned}
D^2\Phi(y)[h,h] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y+th)[h]\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_2^3 \left(4h\,(y'+th')^5 + 20\,(y+th)\,(y'+th')^4\,h' - 16x\,(y'+th')^5\,h'\right)\mathrm{d}x\Big|_{t=0} \\
&= \int_2^3 \left(20h\,(y'+th')^4\,h' + 20h\,(y'+th')^4\,h' + 80\,(y+th)\,(y'+th')^3\,(h')^2 - 80x\,(y'+th')^4\,(h')^2\right)\mathrm{d}x\Big|_{t=0} \\
&= \int_2^3 \left(40\,(y')^4\,hh' + 80y\,(y')^3\,(h')^2 - 80x\,(y')^4\,(h')^2\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pro další výpočty bude vhodné provést integraci *per partes* v prvním členu, což vede k

$$D^2\Phi(y)[h,h] = \int_2^3 \left[-20\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y')^4\right)h^2 + \left(80y\,(y')^3 - 80x\,(y')^4\right)(h')^2\right]\mathrm{d}x,$$

což je kupodivu totéž co plyne z obecné věty:

> Buď Φ funkcionál zadaný předpisem
>
> $$\Phi(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x.$$
>
> Pak je jeho druhý diferenciál roven
>
> $$D^2\Phi(y)[h,h] = \int_a^b \left[P\,(h')^2 + Qh^2\right]\mathrm{d}x,$$
>
> kde
>
> $$P = \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'},$$
> $$Q = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right),$$

Spočteme nyní druhou Gateaux derivaci v bodě y_{ext}, kde

$$y_{\mathrm{ext}} = -x + 6$$

$$y'_{\mathrm{ext}} = -1.$$

Přímým dosazením do právě odvozeného vzorce pro druhou Gateaux derivaci dostaneme

$$D^2\Phi(y_{\mathrm{ext}})[h,h] = 80 \int_2^3 \left[\left(-(-x+6) - x\right) \left(h'\right)^2 \right] \mathrm{d}x = -480 \int_2^3 \left(h'\right)^2 \mathrm{d}x \leq 0.$$

[6] 2. Spočtěte

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \frac{1-\cos x}{x} \,\mathrm{d}x,$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$ je libovolné ale pevné kladné reálné číslo.

Řešení:

Počítejme nejprve formálně bez ověření korektnosti prováděných operací (záměna derivace a integrálu). Jest

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a}\left(\mathrm{e}^{-ax}\frac{1-\cos x}{x}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} (\cos x - 1)\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x,$$

což je integrál, který umíme přímo spočíst. Jest

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a}.$$

Integrál $\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x$ spočteme klasickým postupem,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \mathrm{e}^{-ax} & v = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \end{vmatrix} = \left[-\cos x \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \sin x\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x \\
= \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \sin x\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x &= \begin{vmatrix} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \mathrm{e}^{-ax} & v = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a}\left(\left[-\sin x \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

odkud plyne, že

$$\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+1}.$$

Celkem proto

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = \frac{a}{1+a^2} - \frac{1}{a}.$$

Diferenciální rovnici pro funkci I snadno vyřešíme přímou integrací,

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(1+a^2\right) - \ln a + C,$$

kde C je integrační konstanta.

Zbývá určit hodnotu integrační konstanty. To provedem pomocí limit $a \to +\infty$. Z právě odvozeného vztahu plyne

$$\lim_{a\to+\infty} I = \lim_{a\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a^2}{a^2}\right) + C\right) = C.$$

Přímým výpočtem ovšem získáme (pokud lze zaměnit limitu a integrál)

$$\lim_{a\to+\infty} I = \lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\frac{1-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\frac{1-\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Integrační konstanta je tedy rovna nule, a platí

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+a^2}{a^2}\right).$$

Zbývá ověřit platnost formálně provedených operací. Nejprve se budeme zaobírat záměnou limity a integrálu, k tomu poslouží věta:

Buď $f(x,b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí

- Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
- Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x,b)\right| \leq g(x)$.

- Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x, b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.

Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x, b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce

$$F(b) = \int_I f(x, b) \mathrm{d}x$$

je diferencovatelná na I a platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x, b) \mathrm{d}x.$$

V našem případě je $I = \mathbb{R}^+$ a $J = (\varepsilon, +\infty)$, kde ε je libovolné kladné reálné číslo, a

$$f(x, a) = \mathrm{e}^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x}.$$

Diferencovatelnost funkce $f(x, a)$ vůči proměnné a je zřejmá, měřitelnost vůči proměnné x je zjevná ze spojitosti vůči proměnné x.

Zbývá zjistit, zda existuje $a_0 \in J = (\varepsilon, +\infty)$ takové, že funkce $f(x, a)$ je lebesgueovsky integrovatelná na $I = \mathbb{R}^+$. To je ovšem snadné. Předně funkci $f(x, a)$ lze spojitě dodefinovat v nule,

$$f(x, a)|_{x=0} = \lim_{x \to 0+} \mathrm{e}^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Lebesgueovská integrovatelnost $f(x, a)$ na intervalu $(0, K)$, kde $K \in \mathbb{R}^+$, je tedy zřejmá ze spojitosti $f(x, a)$ na intervalu $[0, K]$. Zbývá vyšetřit chování "v nekonečnu". Na intervalu $(2, +\infty)$ platí odhad

$$\left| \mathrm{e}^{-ax} \frac{1 - \cos x}{x} \right| \leq 2\mathrm{e}^{-ax},$$

kde na pravé straně stojí lebesgueovsky integrovatelná funkce na $\mathbb{R}^+$. Hledané $a_0 \in J = (\varepsilon, +\infty)$ je tedy libovolné číslo z požadovaného intervalu.

Posledním krokem je nalezení majoranty pro derivaci. Derivace $\frac{\partial}{\partial a} f(x, a)$ je dána vztahem

$$\frac{\partial}{\partial a} f(x, a) = (\cos x - 1)\, \mathrm{e}^{-ax},$$

a hledaný odhad pro $a \in (\varepsilon, +\infty)$ je

$$\left| (\cos x - 1)\, \mathrm{e}^{-ax} \right| \leq 2\mathrm{e}^{-ax} \leq 2\mathrm{e}^{-\varepsilon x},$$

kde na pravé straně zjevně stojí lebesgueovsky integrovatelná funkce na $\mathbb{R}^+$.

Záměnu limity a integrálu odůvodníme například podle Lebesgueovy věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro skoro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_M f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_M \lim_{n \to +\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_M f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Množina M je v našem případě $(0, +\infty)$, posloupnost f_n tvoří funkce

$$f_n = \mathrm{e}^{-a_n x} \frac{1 - \cos x}{x},$$

kde a_n je nějaká posloupnost pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, přičemž můžme bez újmy na obecnosti uvažovat pouze posloupnost, kde platí $a_n \leq a_{n+1}$. Platí

$$|f_n| = \left| \mathrm{e}^{-a_n x} \frac{1 - \cos x}{x} \right| = \mathrm{e}^{-a_1 x} \left| \frac{1 - \cos x}{x} \right|,$$

kde na pravé straně stojí lebesgueovsky integrovatelná funkce. (Použijeme stejnou argumentaci jako při vyšetřování platnosti předpoladů věty o záměně limity a integrálu.) Lze tedy zaměnit limitu $\lim_{a\to+\infty}$ a integrál. (Použili jsme Lebesgueovu větu pro posloupnosti, což je ale vzhledem k Heineho větě totéž jako kdybychom zkoumali limitu funkce.)

[4] 3. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} n\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Postupujme formálně, záměnou limity a integrálu získáme

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} n\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} n\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1}{\frac{x}{n}}\right)x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Výsledný integrál snadno spočteme jednoduchou substitucí

$$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{matrix}u=x^2\\ \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_{u=0}^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

Zbývá ověřit, že můžeme provést záměnu limity a integrálu, například podle Lebesgueovy věty:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x\in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x\in M$ platí $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n\in\mathbb{N}$ pro skoro všechna $x\in M$ platí $|f_n(x)|\leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_M\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Množina M je v našem případě $(0,+\infty)$, posloupnost f_n tvoří funkce

$$f_n=n\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Měřitelnost jednotlivých členů f_n posloupnosti plyne z jejich spojitosti na $(0,+\infty)$. Vztah $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}$ zjevně platí pro všechna $x\in(0,+\infty)$. Dále platí

$$n\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1\right)=n\left(1+\frac{\frac{x}{n}}{1!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^4}{4!}+\ldots-1\right)=n\left(\frac{\frac{x}{n}}{1!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^4}{4!}+\ldots\right)$$
$$=\frac{x}{1!}+n\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2!}+n\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^3}{3!}+n\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^4}{4!}+\cdots\leq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\mathrm{e}^x,$$

a proto

$$|f_n|=\left|n\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-1\right)\mathrm{e}^{-x^2}\right|\leq\mathrm{e}^{-x^2+x}=\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}},$$

kde na pravé straně zjevně stojí funkce, která je lebesgueovsky integrovatelná na intervalu $(0,+\infty)$.

[4] 4. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}}.$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0,1]$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a K, kde

a) $J = (0,1)$,

b) $K = (\alpha, 1)$, kde $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

Řešení:

Na intervalu $I = [0,1]$ zjevně platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

Označme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & x \in (0,1]. \end{cases}.$$

Zbývá rozhodnout, zda platí $f_n \rightrightarrows f$. Použijeme ekvivalentní charakterizaci stejnoměrné konvergence, která říká:

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\mathrm{def}} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|.$$

Zabývejme se nyní intervalem J. Platí

$$\sigma_n = \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in J} \left| \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} - 1 \right|.$$

Můžeme si povšimnout, že $\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} < 1$ a absolutní hodnotu je tedy nutné odstranit se záporným znaménkem. Nalezneme extrém funkce

$$-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} + 1.$$

Derivace této funkce je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} + 1\right) = -\frac{n\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}} < 0,$$

funkce je proto klesající a platí

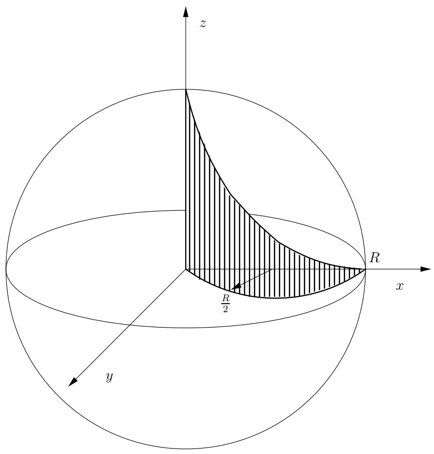
$$\sigma_n = \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in J} \left| \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} - 1 \right| = \lim_{x\to 0+} \left| \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} - 1 \right| = \frac{1}{2}$$

a následně tedy $\sigma_n \not\to 0$ pro $n \to +\infty$. Konvergence proto není na intervalu J stejnoměrná. Na intervalu K platí

$$\sigma_n = \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in K} \left| \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} - 1 \right| = \lim_{x\to \alpha+} \left| \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} - 1 \right| = -\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-n\alpha}} + 1$$

a následně tedy $\sigma_n \to 0$ pro $n \to +\infty$. Konvergence je proto na intervalu K stejnoměrná.

[6] 5. Spočtěte plošný obsah plochy S, která je popsána jako část válcové plochy $x^2+y^2=xR$ ležící uvnitř koule $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ a v prvním oktantu ($x>0$, $y>0$, $z>0$), viz Obrázek 1. (Číslo $R \in \mathbb{R}^+$ je parametr.)



Obrázek 1: Plocha S.

Řešení:

Válcová plocha je dána rovnicí $x^2+y^2=xR$, což upravíme na

$$\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{R}{2}\right)^2,$$

jedná se tedy o válcovou plochu se středem v bodě $x=\frac{R}{2}$ o poloměru $\frac{R}{2}$. Situace je znázorněna na Obrázku 1. Napíšeme parametrizaci plochy (válcové souřadnice se středem v bodě $x=\frac{R}{2}$)

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos\varphi, \\ y &= \frac{R}{2}\sin\varphi, \\ z &= z, \end{aligned}$$

kde $\varphi \in [0,\pi]$ (vyžadujeme $x>0$, $y>0$). Parametr z ovšem není libovolný, musí být splněna podmínka $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ aneb

$$z^2 \le R^2-(x^2+y^2)=R^2-\left(\frac{R^2}{4}+\frac{R^2}{2}\cos\varphi+\frac{R^2}{4}\cos^2\varphi+\frac{R^2}{4}\sin^2\varphi\right)=\frac{R^2}{2}(1-\cos\varphi)$$

odkud

$$z \in \left[0,\sqrt{\frac{R^2}{2}(1-\cos\varphi)}\right]=\left[0,R\sin\frac{\varphi}{2}\right].$$

Hledaná parametrizace plochy tedy je

$$\Phi(\mathbf{x})=\begin{cases} x=\frac{R}{2}+\frac{R}{2}\cos\varphi, \\ y=\frac{R}{2}\sin\varphi, \\ z=z, \end{cases}$$

kde $z \in \left[0,R\sin\frac{\varphi}{2}\right]$ a $\varphi \in [0,\pi]$.

Spočteme element plochy

$$\mathrm{d}S=\sqrt{g}\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z,$$

kde

$$g=\det\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi}\bullet\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{4} \end{bmatrix}.$$

Je tedy $\mathrm{d}S=R^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi$, zbývá zintegrovat přes danou plochu

$$\int_S \mathrm{d}S=\int_{\varphi=0}^{\pi}\int_{z=0}^{R\sin\frac{\varphi}{2}}\frac{R}{2}\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\varphi=\frac{R}{2}\int_{\varphi=0}^{\pi}R\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi=\frac{R^2}{2}\left[-2\cos\frac{\varphi}{2}\right]_{\varphi=0}^{\pi}=R^2.$$

Plošný obsah plochy S je tedy R^2.

Je možné použít i válcové souřadnice se středem v počátku. Válcovou plochu tedy popíšeme pomocí

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi, \\
y &= r\sin\varphi, \\
z &= z,
\end{aligned}
$$

ze vztahu $x^2 + y^2 = xR$ pak plyne, že

$$r^2 = rR\cos\varphi,$$

aneb

$$r = R\cos\varphi.$$

Proměnná φ je nyní z rozmezí $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, rozmezí hodnot pro proměnnou z dostaneme z podmínky $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, aneb

$$z^2 = R^2 - (x^2 + y^2) = R^2 - r^2 = R^2(1 - \cos^2\varphi) = R^2\sin^2\varphi.$$

Celkem tedy

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} x = R\cos^2\varphi, \\ y = R\cos\varphi\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

kde $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $z \in [0, R\sin\varphi]$.

Spočteme element plochy

$$\mathrm{d}S = \sqrt{g}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z,$$

kde

$$g = \det\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \end{bmatrix}.$$

Tečné vektory jsou

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}z} = \begin{bmatrix} -2R\cos\varphi\sin\varphi \\ -R\sin^2\varphi + R^2\cos^2\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\sin 2\varphi \\ -R\cos 2\varphi \\ 0 \end{bmatrix},$$

a proto

$$g = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{bmatrix}.$$

Je tedy $\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi$, zbývá zintegrovat přes danou plochu

$$\int_S \mathrm{d}S = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{R\sin\varphi} R\mathrm{d}z\ \mathrm{d}\varphi = R\int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} R\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = R^2\left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} = R^2,$$

což se kupodivu shoduje s výsledkem zíkaným výpočtem s užitím původní parametrizace.

[4] 6. Spočtěte integrál
$$I = \int_\gamma (2a - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y,$$
kde je křivka v $\mathbb{R}^2$ daná parametrickými rovnicemi
$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t),$$
pro $t \in [0, 2\pi]$ (oblouk cykloidy).

Řešení:

Spočteme přenos diferenciální formy
$$\omega = (2a - y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y,$$
zobrazením Φ
$$\Phi(t) = \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$
kde $t \in [0, 2\pi]$. Diferenciály souřadnicových funkcí jsou po řadě
$$\mathrm{d}x = a(1 - \cos t)\mathrm{d}t,$$
$$\mathrm{d}y = a \sin t \mathrm{d}t.$$
Přenos formy ω je tedy
$$\Phi^{\#}(\omega) = ((2a - a(1 - \cos t))a(1 - \cos t) + a(t - \sin t)a \sin t)\, \mathrm{d}t,$$
nyní již můžeme spočíst integrál
$$\begin{aligned} I = a^2 \int_0^{2\pi} ((1 - \cos t)(1 + \cos t) + (t - \sin t) \sin t)\, \mathrm{d}t \\ = a^2 \int_0^{2\pi} \left((1 - \cos^2 t) + t \sin t - \sin^2 t\right) \mathrm{d}t = a^2 \int_0^{2\pi} t \sin t \mathrm{d}t \\ = \begin{vmatrix} u = t & u' = 1 \\ v' = \sin t & v = -\cos t \end{vmatrix} = a^2 \left([-t \cos t]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t \mathrm{d}t \right) = -2\pi a^2. \end{aligned}$$