Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Skupina: ______________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	7	6	4	3	6	4	30
Získáno							

[7] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1\left([-2,-1]\right) \,|\, y(-2) = \frac{3}{2}, y(-1) = 2 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_{-2}^{-1} \left(2yy' - x^2 \left(y'\right)^2 \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte Gâteaux derivaci funkcionálu Φ.

b) Napište Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremály funkcionálu Φ na množině M.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ a poté rozhodněte, zda jsou nalezené extermály minimizéry či maximizéry daného funkcionálu.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\right|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y+th) = \int_{-2}^{-1} \left(2(y+th)\left(y+th\right)' - x^2 \left(\left(y+th\right)'\right)^2 \right) \mathrm{d}x,$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th) = \int_{-2}^{-1} \left(2h\left(y+th\right)' + 2(y+th)h' - 2x^2\left(y+th\right)' h' \right) \mathrm{d}x$$

po dosazení $t = 0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\right|_{t=0} = 2\int_{-2}^{-1} \left(hy' + yh' - x^2 y'h' \right) \mathrm{d}x$$

po integraci per partes

$$2\int_{-2}^{-1} \left(y' - y' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^2y'\right) \right) h\mathrm{d}x.$$

Eulerovy–Lagrangeovy rovnice tedy jsou

$$\left(x^2y'\right)' = 0,$$

řešením výše uvedené diferenciální rovnice je zřejmě funkce

$$y = -\frac{C_0}{x} + C_1,$$

integrační konstanty určíme z okrajových podmínek, má být

$$\frac{C_0}{2} + C_1 = \frac{3}{2},$$
$$C_0 + C_1 = 2,$$

odkud $C_0 = 1$, $C_1 = 1$ a tedy

$$y = -\frac{1}{x} + 1.$$

Druhou derivaci funkcionálu φ spočteme podle předpisu

$$D^2\Phi(y)[h,h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y+th)[h]\Big|_{t=0}$$
$$= 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-2}^{-1}\big(h(y+th)' + (y+th)h' - x^2(y+th)'h'\big)\,\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{t=0}$$
$$= 2\int_{-2}^{-1}\left(2hh' - x^2\left(h'\right)^2\right)\mathrm{d}x = -2\int_{-2}^{-1}\left(x^2\left(h'\right)^2\right)\mathrm{d}x,$$

kde jsme opět použili integraci per partes a skutečnost, že funkce h je rovná nule v krajních bodech zkoumaného intervalu. Získaný výsledek je kupodivu totožný s výsledkem získaným z obecné věty:

Buď Φ funkcionál zadaný předpisem

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x.$$

Pak je jeho druhý diferenciál roven

$$D^2\Phi(y)[h,h] = \int_a^b \left[P\left(h'\right)^2 + Qh^2\right]\mathrm{d}x,$$

kde

$$P = \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y'},$$
$$Q = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right),$$

Máme tedy

$$D^2\Phi(y)[h,h] = -2\int_{-2}^{-1} x^2\left(h'\right)^2 < 0,$$

extremála může být maximum.

Ke zjištění povahy extremály použijeme některé z následujících kritérií

Je-li y klasické řešení Euler–Lagrange rovnic pro funkcionál

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x,$$

a je-li pro každé x z intervalu $[a,b]$ funkce $f(y,z) = F(x,y,z)$ konvexní, pak je y minimizér daného funkcionálu.

nebo

Řekneme, že bod $\tilde{a}$ je konjugovaný k bodu a, pokud má rovnice (za y se dosazuje bod podezřelý z extrému)

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Ph'\right) + Qh = 0$$

netriviální řešení s okrajovými podmínkami $h(a) = 0$, $h(\tilde{a}) = 0$.

Buď Φ funkcionál zadaný předpisem

$$\Phi(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x$$

a nechť y splňuje následující podmínky:

- Funkce y je extremálou funkcionálu Φ, to jest řeší příslušnou Eulerovu–Lagrangeovu rovnici.
- Koeficient P je (v bodě extremály) kladný (resp. záporný). Přesněji $P(x,y,y') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y'} > 0$ (resp. $P(x,y,y') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y'} < 0$).

- Interval $(a, b]$ neobsahuje žádné body konjugované k bodu a.

Pak je y (slabým) minimem (resp. maximem) funkcionálu Φ.

Zkusme nejprve postupovat podle prvního jmenovaného kritéria. Fukce $f(y, z)$ z příslušného kritéria je

$$f(y, z) = 2yz - x^2 z^2,$$

kde $x \in [a, b]$ je parametr. Matice druhých derivací funkce f je

$$D^2 f[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \mathbf{v} \bullet \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2x^2 \end{bmatrix} \mathbf{v}.$$

Matice má zjevně jedno vlastní číslo kladné a druhé záporné, rozhodně tedy není pozitivně nebo negativně definitní. Na základě zmíněného kritéria tedy nelze rozhodnout.

Zkusme nyní využít druhé jmenované kritérium. V našem případě je diferenciální rovnice pro konjugovaný bod následující

$$\begin{aligned} (x^2 h')' &= 0, \\ h(-2) &= 0, \\ h(\tilde{a}) &= 0. \end{aligned}$$

Ihned vidíme, že daná diferenciální rovnice nemá netriviální řešení a v zkoumaném intervalu tedy neexistuje konjugovaný bod k bodu $-\frac{1}{2}$. Protože jsou splněny všechny podmínky z citované věty, je nalezená extremála maximizérem funkcionálu Φ.

[6] 2. Určete pro jaké hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}^+$ je limita

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\left[\int_{s=0}^{x^2} \frac{\left(\sin s^2\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right)}{s^2} \,\mathrm{d}s\right] - \frac{x^4}{2}}{x^a}$$

konečná. Limitu spočtěte.

Řešení:

Víme, že platí

$$\begin{aligned} \sin s &= s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots, \\ \mathrm{e}^s &= 1 + s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2}\left(\sin s^2\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right) &= \frac{1}{s^2}\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \cdots\right)\Big|_{u=s^2}\left(s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{s^2}\left(s^3 + \frac{s^4}{2} + \frac{s^5}{6} + \cdots\right) = s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \cdots. \end{aligned}$$

Pokud se nám podaří ověřit, že lze výše uvedenou řadu integrovat po členech, tak dostaneme

$$\int_{s=0}^{x^2} \frac{\left(\sin s^2\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right)}{s^2} \,\mathrm{d}s = \int_{s=0}^{x^2} \left(s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \cdots\right) \mathrm{d}s = \left[\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \frac{s^4}{24} + \cdots\right]_{s=0}^{x^2} = \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \cdots.$$

Dosadíme do zkoumaného výrazu a vidíme, že

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\left[\int_{s=0}^{x^2} \frac{\left(\sin s^2\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right)}{s^2} \,\mathrm{d}s\right] - \frac{x^4}{2}}{x^a} = \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \cdots}{x^a} = \begin{cases} 0 & a \in (0, 6), \\ \frac{1}{6} & a = 6 \\ \text{neexistuje/není konečná} & a > 6. \end{cases}$$

Zbývá ověřit platnost záměny řady a integrálu. To provedeme pomocí Lebesgueovy věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost lebesgueovsky integrovatelných funkcí na množině M.
- Pro skoro všechna $x \in M$ platí $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna N a pro skoro všechna $x \in M$ platí $\left|\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\right| \leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a sumu, aneb

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M \sum_{n=1}^{N} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Připomeňme si, že rozvojem v řadu jsme získali

$$\frac{1}{s^2}\left(\sin s^2\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right) = s + \frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(s)$$

přičemž tento výpočet byl založen na známých řadách pro funkce $\sin x$ a e^x. Platnost záměny limity a integrálu potřebujeme vyšetřit na intervalu $s \in (0, \varepsilon)$, kde ε je nějaké (malé) kladné reálné číslo. Platí odhad

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s^2}&\left(s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots + (-1)^N \frac{s^{2N+1}}{(2N+1)!}\right)\left(s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots + \frac{s^N}{N!}\right) \\
&\leq \frac{1}{s^2}\left(s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots + (-1)^N \frac{s^{2N+1}}{(2N+1)!}\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right) \\
&\leq \frac{1}{s^2}\left(s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \frac{s^4}{4!} + \frac{s^5}{5!} + \cdots + \frac{s^{2N+1}}{(2N+1)!}\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right) \leq \frac{1}{s^2}\left(\mathrm{e}^s - 1\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right).
\end{aligned}$$

Funkce $\frac{1}{s^2}\left(\mathrm{e}^s - 1\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right)$ je po dodefinování limitou v bodě $s = 0$ spojitá funkce na uzavřeném intervalu $[0, \varepsilon]$ a je tudíž vhodnou integrovatelnou majorantou. Ostatní podmínky Lebesgueovy věty jsou zjevně splněny.

Případně jsme mohli využít stejnoměrnou konvergenci příslušných řad, která pro $s \in (0, \varepsilon)$ implikuje

$$\sum_{n=1}^{N} f_n(s) \overset{N\to+\infty}{\rightrightarrows} \frac{1}{s^2}\left(\sin s^2\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right).$$

Případně jsme také mohli použít základní větu diferenciálního a integrálního počtu a l'Hospitalovo pravidlo. V l'Hospitalově pravidle je potřeba spočíst derivaci integrálu s proměnnou horní mezí. Využijeme základní větu diferenciálního a integrálního počtu a větu o derivaci složené funkce,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{s=0}^{y} f(s)\,\mathrm{d}s &= f(y), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) &= \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\right|_{y=g(x)} \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}.
\end{aligned}$$

Platí tedy

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{s=0}^{x^2} \frac{\left(\sin s^2\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right)}{s^2}\,\mathrm{d}s &= \left.\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{s=0}^{y} \frac{\left(\sin s^2\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right)}{s^2}\right)\right|_{y=x^2} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2\right) \\
&= \left.\frac{\left(\sin y^2\right)\left(\mathrm{e}^y - 1\right)}{y^2}\right|_{y=x^2} (2x) = 2\frac{\left(\sin x^4\right)\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right)}{x^3}.
\end{aligned}$$

Vrátíme-li se k původnímu problému, získáme aplikací l'Hospitalova pravidla

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\left[\int_{s=0}^{x^2} \frac{\left(\sin s^2\right)\left(\mathrm{e}^s - 1\right)}{s^2}\,\mathrm{d}s\right] - \frac{x^4}{2}}{x^a} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\frac{\left(\sin x^4\right)\left(\mathrm{e}^{x^2} - 1\right)}{x^3} - 2x^3}{a x^{a-1}},$$

což je limita, kterou spočteme standardními technikami z prvního ročníku. (Nejlépe opět s použitím Taylorova rozvoje, viz výše.) Pozor, nelze bezmyšlenkovitě rozdělit limitu na součet limit, aneb *není* nutně pravda, že

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2\frac{\left(\sin x^4\right)\left(e^{x^2}-1\right)}{x^3} - 2x^3}{ax^{a-1}} = \lim_{x\to 0+} \frac{2\frac{\left(\sin x^4\right)\left(e^{x^2}-1\right)}{x^3}}{ax^{a-1}} - \lim_{x\to 0+} \frac{2x^3}{ax^{a-1}}.$$

[4] 3. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x^2} \, dx.$$

Nápověda: Platí $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$.

Řešení:

Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} e^{n \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} \frac{x}{n}} = e^x.$$

Pokud je možné zaměnit limitu a integrál

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x^2} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x^2} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+x} \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \, dx.$$

Provedeme substituci a s použitím nápovědy dostaneme výsledek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}} \, dx = \begin{vmatrix} s = x - \frac{1}{2} \\ ds = dx \end{vmatrix} = e^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} \, ds = e^{\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}.$$

Zbývá ověřit podmínky Lebesgueovy věty o záměně limity a integrálu. Věta říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro skoro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_M f_n(x) \, dx = \int_M \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \, dx = \int_M f(x) \, dx.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Víme, že pro $s \geq 0$ platí $\ln(1+s) \leq s$, a proto

$$|f_n(x)| = \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-x^2}\right| = e^{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} e^{-x^2} \leq e^{n\frac{x}{n}} e^{-x^2} = e^x e^{-x^2},$$

přičemž funkce e^{-x^2+x} je zjevně lebesgueovsky integrovatelná funkce na intervalu $(0+, \infty)$, čímž jsme nalezli integrovatelnou majorantu. Ostatní podmínky věty jsou splněny.

[3] 4. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = e^{-nx^2}.$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0, 1]$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a K, kde

a) $J = (0, 1)$,
b) $K = (\alpha, 1)$, kde $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$.

Řešení:
Na intervalu $I = [0, 1]$ zjevně platí

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-nx^2} = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Označme

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (0, 1]. \end{cases}.$$

Zbývá rozhodnout, zda platí $f_n \rightrightarrows f$. Použijeme ekvivalentní charakterizaci stejnoměrné konvergence, která říká:

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\mathrm{def}} \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|\,.$$

Funkce f_n je na intervalu J i K klesající funkce. Zabývejme se nyní intervalem J. Platí

$$\sigma_n = \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to 0+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{-nx^2} = 1,$$

a následně tedy $\sigma_n \not\to 0$ pro $n \to +\infty$. Konvergence proto není na intervalu J stejnoměrná. Na intervalu K platí

$$\sigma_n = \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to \alpha+} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{x\to \alpha+} \mathrm{e}^{-nx^2} = \mathrm{e}^{-n\alpha^2}$$

a následně tedy $\sigma_n \to 0$ pro $n \to +\infty$. Konvergence je proto na intervalu K stejnoměrná.

[6] 5. Buď $\omega \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$ diferenciální 2-forma v $\mathbb{R}^3$ daná předpisem

$$\omega = -\frac{1}{2}xz\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + y^2z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Spočtěte integrál

$$I = \int_S \omega$$

kde množina S je plocha daná jako průnik množin $M = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ a $N = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = z\right\}$. Plocha S je orientována tak, aby průmět vektoru normály $\mathbf{n}$ do roviny $z = 0$ směřoval do počátku souřadného systému.

Řešení:
Počítejme bez použití Stokesovy věty. Plochu, viz Obrázek 1, lze zřejmě parametrizovat následujícím způsobem

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = r^2, \end{cases}$$

kde $r \in [0, 1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. Zafixujeme pořadí souřadnic $[r, \varphi]$ a spočteme normálu k ploše

$$\mathbf{n} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \times \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r^2\cos\varphi \\ -2r^2\sin\varphi \\ r \end{bmatrix}.$$

Průmět normály do roviny $z = 0$ zřejmě směřuje do počátku souřadného systému a je tedy ve shodě s požadovanou orientací vnější normály. V dané parametrizaci je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}y &= \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}z &= 2r\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

odkud

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z &= 2r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}r, \\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x &= -2r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= r\cos^2\varphi\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi - r\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \wedge \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

se správným pořadím souřadnic je tedy

$$\begin{aligned} \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z &= -2r^2\cos\varphi\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x &= -2r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi, \\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= r\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Přenos formy

$$\omega = -\frac{1}{2}xz\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + x^2y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + y^2z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

je proto

$$\begin{aligned} \Phi^{\#}(\omega) &= \left(r^5\cos^2\varphi - 2r^5\cos^2\varphi\sin^2\varphi + r^5\sin^2\varphi\right)\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi \\ &= r^5\left(1 - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi = r^5\left(1 - \frac{1}{2}(\sin 2\varphi)^2\right)\,\mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

Můžeme spočíst integrál

$$\begin{aligned} \int_{r=0}^{1}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^5\left(1 - \frac{1}{2}(\sin 2\varphi)^2\right)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{6}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2}(\sin 2\varphi)^2\right)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{6}\left(2\pi - \frac{1}{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi\right) = \frac{1}{6}\left(2\pi - \frac{1}{4}\left[\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4}\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Poznámka: Plocha, která vás zajímá, je pouze "plášť" rotačního paraboloidu. Jmenovitě, množina

$$P = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, z = 1,\, x^2 + y^2 < 1\right\},$$

což je "podstava" paraboloidu, do množiny S nepatří. To znamená, *že plocha S není hranicí nějakého objemu*, nelze tedy použít Stokesovu větu ve tvaru

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}v = \int_S \mathbf{u} \bullet \mathbf{n}\,\mathrm{d}s,$$

kde $\mathbf{u}$ je patřičně zvolené vektorové pole. Platí ale

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}v = \int_{-S\cup P} \mathbf{u} \bullet \mathbf{n}\,\mathrm{d}s,$$

kde objem V je "vnitřek" paraboloidu utnutého rovinou $z = 1$. Stokesova věta nás tedy nezbaví nutnosti počítat plošný integrál, platí pouze

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}v = -\int_S \mathbf{u} \bullet \mathbf{n}\,\mathrm{d}s + \int_P \mathbf{u} \bullet \mathbf{n}\,\mathrm{d}s.$$

Kromě objemového integrálu $\int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}v$ bychom tedy museli počítat i (s patřičně zvolenou parametrizací) plošný integrál $\int_P \mathbf{u} \bullet \mathbf{n}\,\mathrm{d}s$.

[4] 6. Určete délku křivky γ v $\mathbb{R}^3$, která je zadána jako průnik ploch S_1 a S_2, kde

$$S_1 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \, ay = x^2 \right\},$$
$$S_2 = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \, xy = \frac{9}{16} z^2 \right\}.$$

Počátečním bodem křivky je bod $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, koncovým bodem křivky je bod $\begin{bmatrix} a & a & \frac{4}{3}a \end{bmatrix}^\top$. Kladné číslo $a \in \mathbb{R}^+$ je parametr.

Řešení:

Volme $x = t$, pak dle rovnice pro plochu S_1 musí být $y = \frac{x^2}{a} = \frac{t^2}{a}$, a dle rovnice pro plochu S_2 pak $\frac{t^3}{a} = \frac{9}{16} z^2$, hledaná parametrizace tedy je

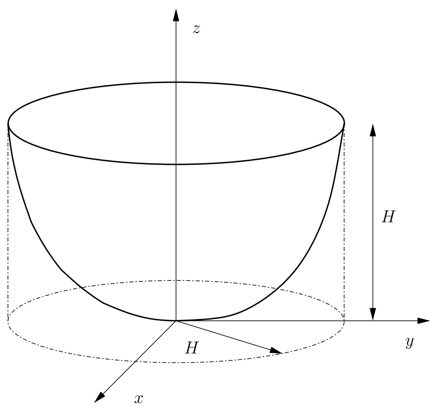
$$x = t,$$
$$y = \frac{t^2}{a},$$
$$z = \frac{4}{3} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}},$$

kde $t \in [0, a]$. Spočteme délkový elemet $\mathrm{d}l$

$$\mathrm{d}l = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{(1)^2 + \left(\frac{2t}{a}\right)^2 + \left(\frac{2}{a^{\frac{1}{2}}} t^{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2t}{a}\right)^2 + \frac{2}{a} t} = \left(1 + \frac{2t}{a}\right).$$

Délka křivky je

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}l = \int_{t=0}^{a} \left(1 + \frac{2t}{a}\right) dt = \left[t + \frac{t^2}{a}\right]_{t=0}^{a} = 2a.$$



Obrázek 1: Plocha S.