Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Skupina: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	6	6	4	4	6	4	30
Získáno							

[6] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^2([1,2]) \mid y(1) = \frac{3}{2},\, y'(1) = 3,\, y(2) = \frac{14}{3} + \ln 2,\, y'(2) = \frac{9}{2} \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_1^2 \left(x^3 \left(y''\right)^2 - 12xy \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnic pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gateaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nezáporná.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) \right|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y + th) = \int_1^2 \left(x^3 \left(y'' + th''\right)^2 - 12x(y + th) \right) \mathrm{d}x$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) = \int_1^2 \left(2x^3 \left(y'' + th''\right) h'' - 12xh \right) \mathrm{d}x$$

po dosazení $t = 0$ dostaneme

$$\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) \right|_{t=0} = \int_1^2 \left(2x^3 y'' h'' - 12xh \right) \mathrm{d}x$$

a proto

$$D\Phi(y)[h] = \int_1^2 \left(2x^3 y'' h'' - 12xh \right) \mathrm{d}x$$

Po dvojnásobné integraci *per partes* dostaneme

$$D\Phi(y)[h] = \int_1^2 \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left(2x^3 y'' \right) - 12x \right] h \, \mathrm{d}x$$

kde jsme využili skutečnost, že testovací “směr” h je zvolen z prostoru N, kde

$$N = \left\{ g \in \mathcal{C}^2([1,2]) \mid g(1) = 0,\, g'(1) = 0,\, g(2) = 0,\, g'(2) = 0 \right\}$$

Použijeme základní lemma variačního počtu a vidíme, že Eulerovy–Lagrangeovy rovnice příslušného funkcionálu jsou

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left(2x^3 y'' \right) - 12x = 0.$$

Předtím, než se pustíme do řešení Eulerových–Lagrangeových rovnic, spočteme ještě druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. Druhou derivaci funkcionálu Φ spočteme podle předpisu

$$D^2\Phi(y)[h,h] = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y + th)[h] \right|_{t=0} = \left. \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_1^2 \left(2x^3 (y'' + th'') h'' - 12xh \right) \mathrm{d}x \right) \right|_{t=0} = 2 \int_1^2 x^3 \left(h''\right)^2 \mathrm{d}x \geq 0.$$

Druhá derivace tedy nezávisí na y, což se dalo očekávat, neboť funkcionál je “kvadratický” v y, a navíc je zřejmé, že druhá derivace je vždy nezáporná. Speciálně tedy bude nezáporná i v bodě y_{ext}. (Pokud se náme takovýto bod podaří najít řešením Eulerových–Lagrangeových rovnic.)

Řešme nuní Eulerovu–Lagrangeovu rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left(2x^3 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} \right) = 12x.$$

Integrace postupně vede na rovnice

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x^3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) &= 6x^2 + C_1, \\
2x^3\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= 2x^3 + C_1 x + C_2,
\end{aligned}
$$

poslední rovnici vydělíme x^3 (pracujeme na intervalu $[1,2]$ takže dělení x^3 je vpořádku) a další integrace postupně vede na rovnice

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= x - \frac{C_1}{2}\frac{1}{x} - \frac{C_2}{4}\frac{1}{x^2} + C_3, \\
y &= \frac{x^2}{2} - \frac{C_1}{2}\ln x + \frac{C_2}{4}\frac{1}{x} + C_3 x + C_4,
\end{aligned}
$$

kde $\{C_i\}_{i=1}^4$ jsou integrační konstanty. Integrační konstanty určíme z okrajových podmínek, má být

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{C_2}{4} + C_3 + C_4, \\
\frac{14}{3} + \ln 2 &= 2 - \frac{C_1}{2}\ln 2 + \frac{C_2}{8} + 2C_3 + C_4, \\
3 &= 1 - \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{4} + C_3, \\
\frac{9}{2} &= 2 - \frac{C_1}{4} - \frac{C_2}{16} + C_3,
\end{aligned}
$$

odkud

$$
C_1 = -2, \qquad C_2 = \frac{16}{3}, \qquad C_3 = \frac{7}{3}, \qquad C_4 = -\frac{8}{3},
$$

a proto

$$
y_{\mathrm{ext}} = \frac{x^2}{2} + \frac{7}{3}x + \frac{4}{3}\frac{1}{x} + \ln x - \frac{8}{3}.
$$

[6] 2. Určete pro jaká $a \in \mathbb{R}$ existuje integrál

$$I(a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} \, \mathrm{d}x,$$

a integrál spočtěte.

Řešení:

Nejprve zjistíme pro jaké $a \in \mathbb{R}$ integrál existuje. (To jest existuje a je konečný.) Problematickými body jsou 0 a 1. Platí $\frac{x^a - 1}{\ln x} = \frac{\mathrm{e}^{a \ln x} - 1}{\ln x} = a \frac{\mathrm{e}^{a \ln x} - 1}{a \ln x}$. Pro $x \to 1-$ tedy dostaneme

$$\lim_{x \to 1-} a \frac{\mathrm{e}^{a \ln x} - 1}{a \ln x} = a.$$

A integrand lze tudíž v bodě 1 touto limitou spojitě dodefinovat. Zabývejme se nyní bodem $x = 0$. Kritické je chování výrazu $\frac{x^a}{\ln x}$. Chování funkce $\frac{x^a}{\ln x}$ stačí posoudit srovnáním s funkcí $\frac{1}{x^b}$, přičemž posledně jmenovaná funkce je integrovatelná u nuly pokud $b > -1$. Platí

$$\lim_{x \to 0+} \frac{\frac{x^a}{\ln x}}{\frac{1}{x^b}} = \lim_{x \to 0+} \frac{x^{a-b}}{\ln x}.$$

Posledně jmenovaná limita je nulová pokud $a > b$. To znamená, že pro $a > b$ roste funkce $\left| \frac{x^a}{\ln x} \right|$ u nuly pomaleji než $\frac{1}{x^b}$, přičemž $\frac{1}{x^b}$ je u nuly integrovatelná funkce pro $b > -1$. Integrál proto existuje pro $a > -1$.

Počítejme nejprve formálně bez ověření korektnosti prováděných operací (záměna derivace a integrálu). Jest

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{x^a - 1}{\ln x} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{a \ln x} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 x^a \, \mathrm{d}x,$$

což je integrál, který umíme přímo spočíst,

$$\int_0^1 x^a \, \mathrm{d}x = \left[\tfrac{x^{a+1}}{a+1} \right]_{x=0}^1 = \frac{a+1}{.}$$

Můžeme si povšimnout, že primitivní funkci jsme dokázali vyčíslit v $x = 0$ pouze pro $a > -1$, což jsou ale hodnoty parametru a, pro které nás hodnota integrálu zajímá. Celkem proto

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = \frac{1}{a+1}.$$

Diferenciální rovnici pro funkci I snadno vyřešíme přímou integrací,

$$I(a) = \ln(a+1) + C,$$

kde C je integrační konstanta.

Zbývá určit hodnotu integrační konstanty. To je ale jednoduché, z právě odvozeného vztahu plyne

$$I(0) = C.$$

Přímým výpočtem ovšem získáme

$$I(0) = \left(\int_0^1 \frac{x^a - 1}{\ln x} \, \mathrm{d}x \right) \bigg|_{a=0} = 0.$$

Integrační konstanta C je tedy rovna nule, a platí

$$I(a) = \ln(a+1).$$

Zbývá ověřit platnost formálně provedených operací. Nejprve se budeme zaobírat záměnou limity a integrálu, k tomu poslouží věta:

Buď $f(x, b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí

- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x, b) \right| \leq g(x)$.

- Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x, b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.

Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x, b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce

$$F(b) = \int_I f(x, b)\mathrm{d}x$$

je diferencovatelná na I a platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x, b)\mathrm{d}x.$$

V našem případě je $I = (0, 1)$ a $J = (-1 + \varepsilon, +\infty)$, kde ε je libovolné kladné reálné číslo, a

$$f(x, a) = \frac{x^a - 1}{\ln x}$$

Diferencovatelnost funkce $f(x, a)$ vůči proměnné a je zřejmá, měřitelnost vůči proměnné x je zjevná ze spojitosti vůči proměnné x na intervalu $I = (0, 1)$.

Zbývá zjistit, zda existuje $a_0 \in J = (-1 + \varepsilon, +\infty)$ takové, že funkce $f(x, a)$ je lebesgueovsky integrovatelná na $I = (0, 1)$. To je ovšem snadné, integrovatelnost jsme pečlivě diskutovali v úvodu, a zjistili jsme, že daná funkce je na intervalu I lebesgueovsky integrovatelná kdykoliv $a > -1$, tedy pro všechna $a \in J$. Hledané $a_0 \in J = (-1 + \varepsilon, +\infty)$ je tedy libovolné číslo z požadovaného intervalu.

Posledním krokem je nalezení majoranty pro derivaci. Derivace $\frac{\partial}{\partial a} f(x, a)$ je dána vztahem

$$\frac{\partial}{\partial a} f(x, a) = x^a,$$

a hledaný odhad pro $a \in J = (-1 + \varepsilon, +\infty)$ je tedy

$$|x^a| \leq \frac{1}{x^{1-\varepsilon}},$$

kde na pravé straně zjevně stojí lebesgueovsky integrovatelná funkce na $I = (0, 1)$.

Záměnu limity a integrálu lze tedy provést pro $a \in (-1 + \varepsilon, +\infty)$, kde ε je libovolné kladné reálné číslo. Výsledek výpočtu proto platí pro všechna $a > -1$, což jsou přesně ty hodnoty parametru a, pro které integrál existuje.

[4] 3. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} n\left(\arctan\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Postupujme formálně, záměnou limity a integrálu získáme

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} n\left(\arctan\frac{x}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} n\left(\arctan\frac{x}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\arctan\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Výsledný integrál snadno spočteme jednoduchou substitucí

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{matrix} u = x^2 \\ \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_{u=0}^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Zbývá ověřit, že můžeme provést záměnu limity a integrálu, například podle Lebesgueovy věty:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x\in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x\in M$ platí $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n\in\mathbb{N}$ pro skoro všechna $x\in M$ platí $|f_n(x)|\le g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Množina M je v našem případě $(0,+\infty)$, posloupnost f_n tvoří funkce

$$f_n = n\left(\arctan\frac{x}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}.$$

Měřitelnost jednotlivých členů f_n posloupnosti na $(0,+\infty)$ plyne z jejich spojitosti na $(0,+\infty)$. Vztah pro limitu $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$ zjevně platí pro všechna $x\in(0,+\infty)$. Dále na intervalu $[0,+\infty)$ platí

$$n\left(\arctan\frac{x}{n}\right)\le n\frac{x}{n} = x,$$

a proto

$$|f_n| = \left|n\left(\arctan\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-x^2}\right|\le x\mathrm{e}^{-x^2},$$

kde na pravé straně stojí funkce, která nezávisí na n a je zjevně lebesgueovsky integrovatelná na intervalu $(0,+\infty)$.

[4] 4. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \begin{cases} n & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right], \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \left[0, \frac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0, 1]$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a K, kde

a) $J = (0, 1)$,

b) $K = (\varepsilon, 1)$, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon < 1$.

Řešení:

Na intervalu $J = (0, 1)$ zjevně platí

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = 0,$$

v bodě $x = 0$ je

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = \lim_{n \to +\infty} n = +\infty$$

Označme

$$f(x) = 0.$$

Zbývá rozhodnout, zda na daných intervalech J a K platí $f_n \rightrightarrows f$. Použijeme ekvivalentní charakterizaci stejnoměrné konvergence, která říká:

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\mathrm{def}} \sup_{x \in M} \left| f_n(x) - f(x) \right|.$$

Zabývejme se nyní intervalem J. Platí

$$\sigma_n = \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = n.$$

(Supremum se nabývá například v bodě $x = \frac{1}{n}$.) Následně tedy $\sigma_n \not\to 0$ pro $n \to +\infty$. Konvergence proto není na intervalu J stejnoměrná. Na intervalu K a pro $n > \frac{1}{\varepsilon}$ platí

$$\sigma_n = \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

("Hrb" je pro $\frac{1}{n} < \varepsilon$ mimo interval K.) Následně tedy $\sigma_n \to 0$ pro $n \to +\infty$, a konvergence je tedy na intervalu K stejnoměrná.

[6] 5. Spočtěte objem tělesa $B \subset \mathbb{R}^3$, které je vymezeno plochami $z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$, $z = -1$ a $x^2 + y^2 = R^2$, kde $R \in \mathbb{R}^+$ je nějaké pevně zvolené číslo.

Řešení:

Výpočet provedeme v cylindrických souřadnicích, transformační vztah $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(\mathbf{s})$ mezi kartézskými souřadnicemi $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}$ a cylindrickými souřadnicemi $\mathbf{s} = \begin{bmatrix} r & \varphi & z \end{bmatrix}$ je

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi, \\
y &= r\sin\varphi, \\
z &= z.
\end{aligned}
$$

Determinant Jacobiho matice je proto

$$
\det\left[\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \mathbf{s}}\right] = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial z} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = r.
$$

Použijeme Fubiniho větu a větu o substituci

$$
\begin{aligned}
\int_B \mathrm{d}\lambda = \int_B r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\int_{r=0}^{R}\left(\int_{z=-1}^{\mathrm{e}^{-r^2}}\mathrm{d}z\right) r\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_{r=0}^{R}\left(\int_{z=-1}^{\mathrm{e}^{-r^2}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r = 2\pi\int_{r=0}^{R}\left(\mathrm{e}^{-r^2}+1\right) r\mathrm{d}r \\
= 2\pi\int_{r=0}^{R} r\mathrm{d}r + 2\pi\int_{r=0}^{R} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = \pi R^2 + 2\pi\int_{r=0}^{R} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r = \left|\begin{matrix} u = r^2 \\ \mathrm{d}u = 2r\mathrm{d}r \end{matrix}\right| = \pi R^2 + \pi\left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_{u=0}^{R^2} = \pi R^2 + \pi\left(1-\mathrm{e}^{-R^2}\right) \\
= \pi\left(R^2 + 1 - \mathrm{e}^{-R^2}\right).
\end{aligned}
$$

[4] 6. Spočtěte integrál

$$I = \int_\gamma y\,\mathrm{d}x + (y-a)\,\mathrm{d}y,$$

kde je křivka v $\mathbb{R}^2$ daná parametrickými rovnicemi

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t),$$

pro $t \in [0, 2\pi]$ (oblouk cykloidy), $a \in \mathbb{R}^+$ je pevné číslo.

Řešení:

Spočteme přenos diferenciální formy

$$\omega = y\,\mathrm{d}x + (y-a)\,\mathrm{d}y,$$

zobrazením Φ

$$\Phi(t) = \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

kde $t \in [0, 2\pi]$. Diferenciály souřadnicových funkcí jsou po řadě

$$\mathrm{d}x = a(1 - \cos t)\mathrm{d}t,$$
$$\mathrm{d}y = a \sin t \mathrm{d}t.$$

Přenos formy ω je tedy

$$\Phi^{\#}(\omega) = [a(1-\cos t)a(1-\cos t) - (a\cos t)\,a\sin t]\,\mathrm{d}t,$$

nyní již můžeme spočíst integrál

$$I = a^2 \int_0^{2\pi} \left[(1-\cos t)^2 - \sin t \cos t\right] \mathrm{d}t = a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 - 2\cos t + \cos^2 t - \sin t \cos t\right] \mathrm{d}t = a^2 \int_0^{2\pi} \left[1 + \cos^2 t\right] \mathrm{d}t$$
$$= 2\pi a^2 + a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \mathrm{d}t = 2\pi a^2 + a^2 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \mathrm{d}t = 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$