Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________

Skupina: ______________________

Příklad	1	2	3	4	5	6	**Celkem bodů**
Bodů	6	6	4	4	6	4	30
Získáno							

[6] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{y \in \mathcal{C}^1([0,1]) \,|\, y(0) = 0, y(1) = 1 - \frac{1}{e}\right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_0^1 \left(2yy' - e^x (y')^2\right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte první Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta\Phi[y](h)$ neboli $D\Phi(y)[h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.) Popište přesně v jakém prostoru funkcí leží h.

b) Napište Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremálu funkcionálu Φ na množině M, extremálu označte y_{ext}.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y ve směru h. (Tedy $\delta^2\Phi[y](h,h)$ neboli $D^2\Phi(y)[h,h]$, záleží na značení, kterému dáváte přednost.)

e) Vyčíslete druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ v bodě y_{ext} ve směru h pro y_{ext}, které je řešením Euler–Lagrange rovnic pro funkcionál Φ. Ukažte, že Gateaux derivace je v tomto bodě v libovolném směru h nekladná.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\bigg|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y+th) = \int_0^1 \left(2(y+th)(y+th)' - e^x \left((y+th)'\right)^2\right) \mathrm{d}x,$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th) = \int_0^1 \left(2h(y+th)' + 2(y+th)h' - 2e^x (y+th)' h'\right) \mathrm{d}x$$

po dosazení $t = 0$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\bigg|_{t=0} = 2\int_0^1 \left(hy' + yh' - e^x y'h'\right) \mathrm{d}x,$$

a proto

$$D\Phi(y)[h] = 2\int_0^1 \left(hy' + yh' - e^x y'h'\right) \mathrm{d}x.$$

Po integraci *per partes*

$$2\int_0^1 \left(y' - y' + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(e^x y'\right)\right) h\mathrm{d}x.$$

Eulerovy–Lagrangeovy rovnice tedy jsou

$$\left(e^x y'\right)' = 0,$$

řešením výše uvedené diferenciální rovnice je zřejmě funkce

$$y = -C_0 e^{-x} + C_1,$$

integrační konstanty určíme z okrajových podmínek, má být

$$-C_0 + C_1 = 0,$$
$$-\frac{C_0}{e} + C_1 = 1 - \frac{1}{e},$$

odkud $C_0 = 1$, $C_1 = 1$ a tedy

$$y = -e^{-x} + 1.$$

Druhou derivaci funkcionálu Φ spočteme podle předpisu

$$\begin{aligned}
D^2\Phi(y)[h,h] &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y+th)[h]\right|_{t=0} \\
&= 2\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^1 (h(y+th)' + (y+th)h' - e^x (y+th)'h')\,\mathrm{d}x\right)\right|_{t=0} \\
&= 2\int_0^1 \left(2hh' - e^x \left(h'\right)^2\right)\mathrm{d}x = -2\int_0^1 \left(e^x \left(h'\right)^2\right)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

což je (v poslední úpravě jsme použili integraci per partes a skutečnost, že funkce h je rovná nule v krajních bodech zkoumaného intervalu) kupodivu totéž jako dle věty

> Buď Φ funkcionál zadaný předpisem
>
> $$\Phi(y) = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x.$$
>
> Pak je jeho druhý diferenciál roven
>
> $$D^2\Phi(y)[h,h] = \int_a^b \left[P\left(h'\right)^2 + Qh^2\right]\mathrm{d}x,$$
>
> kde
>
> $$\begin{aligned}
P &= \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'}, \\
Q &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right),
\end{aligned}$$

Máme tedy

$$D^2\Phi(y)[h,h] = -2\int_0^1 e^x \left(h'\right)^2 \leq 0,$$

a okamžitě vidíme, že druhá derivace je nekladná v jakémkoliv bodě y a navíc nezávisí na y. (To není překvapení, funkcionál Φ je “kvadratický” v proměnné y.) Druhá derivace vyčíslená v bodě y_{ext} je

$$D^2\Phi(y_{\mathrm{ext}})[h,h] = -2\int_0^1 e^x \left(h'\right)^2.$$

[6] 2. Spočtěte

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x,$$

kde $a \in \mathbb{R}^+$ je libovolné ale pevné kladné reálné číslo.

Řešení:

Počítejme nejprve formálně bez ověření korektnosti prováděných operací (záměna derivace a integrálu). Jest

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\mathrm{e}^{-ax} \frac{\sin x}{x} \right) \mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x,$$

což je integrál, který umíme přímo spočíst. Integrál $\int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x$ spočteme klasickým postupem,

$$\int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \sin x & u' = \cos x \\ v' = \mathrm{e}^{-ax} & v = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \end{vmatrix} = \left[\sin x \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \cos x \,\mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \cos x \,\mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u = \cos x & u' = -\sin x \\ v' = \mathrm{e}^{-ax} & v = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \left(\left[-\cos x \frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x \right)$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} \int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x,$$

odkud plyne, že

$$\int_0^{+\infty} \sin x \,\mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2+1}.$$

Celkem proto

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}a} = -\frac{1}{1+a^2}.$$

Diferenciální rovnici pro funkci I snadno vyřešíme přímou integrací,

$$I = -\arctan a + C,$$

kde C je integrační konstanta.

Zbývá určit hodnotu integrační konstanty. To provedem pomocí limit $a \to +\infty$. Z právě odvozeného vztahu plyne

$$\lim_{a \to +\infty} I = \lim_{a \to +\infty} (-\arctan a + C) = -\frac{\pi}{2} + C.$$

Přímým výpočtem ovšem získáme (pokud lze zaměnit limitu a integrál)

$$\lim_{a \to +\infty} I = \lim_{a \to +\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{a \to +\infty} \mathrm{e}^{-ax} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = 0.$$

Integrační konstanta C je tedy rovna $\frac{\pi}{2}$, a platí

$$I = -\arctan a + \frac{\pi}{2} = \arctan \frac{1}{a}.$$

Zbývá ověřit platnost formálně provedených operací. Nejprve se budeme zaobírat záměnou limity a integrálu, k tomu poslouží věta:

Buď $f(x, b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí

- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x, b)\right| \leq g(x)$.
- Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x, b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.

Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x, b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce

$$F(b) = \int_I f(x, b) \mathrm{d}x$$

je diferencovatelná na I a platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x, b) \mathrm{d}x.$$

V našem případě je $I = \mathbb{R}^+$ a $J = (\varepsilon, +\infty)$, kde ε je libovolné kladné reálné číslo, a

$$f(x,a) = \mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}.$$

Diferencovatelnost funkce $f(x,a)$ vůči proměnné a je zřejmá, měřitelnost vůči proměnné x je zjevná ze spojitosti vůči proměnné x.

Zbývá zjistit, zda existuje $a_0 \in J = (\varepsilon, +\infty)$ takové, že funkce $f(x,a)$ je lebesgueovsky integrovatelná na $I = \mathbb{R}^+$. To je ovšem snadné. Předně funkci $f(x,a)$ lze spojitě dodefinovat v nule,

$$f(x,a)|_{x=0} = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Lebesgueovská integrovatelnost $f(x,a)$ na intervalu $(0,K)$, kde $K \in \mathbb{R}^+$, je tedy zřejmá ze spojitosti $f(x,a)$ na intervalu $[0,K]$. Zbývá vyšetřit chování “v nekonečnu”. Na intervalu $(2,+\infty)$ platí odhad

$$\left|\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\right| \leq \mathrm{e}^{-ax},$$

kde na pravé straně stojí lebesgueovsky integrovatelná funkce na $\mathbb{R}^+$. Hledané $a_0 \in J = (\varepsilon, +\infty)$ je tedy libovolné číslo z požadovaného intervalu.

Posledním krokem je nalezení majoranty pro derivaci. Derivace $\frac{\partial}{\partial a} f(x,a)$ je dána vztahem

$$\frac{\partial}{\partial a} f(x,a) = -\left(\sin x\right)\mathrm{e}^{-ax},$$

a hledaný odhad pro $a \in (\varepsilon, +\infty)$ je

$$\left|-\left(\sin x\right)\mathrm{e}^{-ax}\right| \leq \mathrm{e}^{-ax} \leq \mathrm{e}^{-\varepsilon x},$$

kde na pravé straně zjevně stojí lebesgueovsky integrovatelná funkce na $\mathbb{R}^+$.

Záměnu limity a integrálu odůvodníme například podle Lebesgueovy věty, která říká:

> Nechť platí:
>
> - Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
> - Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
> - Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro skoro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$.
>
> Pak platí:
>
> - Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
> - Lze zaměnit limitu a integrál,
>
> $$\lim_{n\to+\infty}\int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$
>
> Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Množina M je v našem případě $(0,+\infty)$, posloupnost f_n tvoří funkce

$$f_n = \mathrm{e}^{-a_n x}\frac{\sin x}{x},$$

kde a_n je nějaká posloupnost pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, přičemž můžme bez újmy na obecnosti uvažovat pouze posloupnost, kde platí $a_n \leq a_{n+1}$. Platí

$$|f_n| = \left|\mathrm{e}^{-a_n x}\frac{\sin x}{x}\right| = \mathrm{e}^{-a_1 x}\left|\frac{\sin x}{x}\right|,$$

kde na pravé straně stojí lebesgueovsky integrovatelná funkce. (Použijeme stejnou argumentaci jako při vyšetřování platnosti předpoladů věty o záměně limity a integrálu.) Lze tedy zaměnit limitu $\lim_{a\to+\infty}$ a integrál. (Použili jsme Lebesgueovu větu pro posloupnosti, což je ale vzhledem k Heineho větě totéž jako kdybychom zkoumali limitu funkce.)

[4] 3. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení:

Postupujme formálně, záměnou limity a integrálu získáme

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} n^2\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\left(\frac{x}{n}\right)^2}\right)x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Výsledný integrál snadno spočteme jednoduchou substitucí

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\begin{vmatrix} u=x^2\\ \mathrm{d}u=2x\mathrm{d}x\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{4}\left[-\mathrm{e}^{-u}\right]_{u=0}^{+\infty}=\frac{1}{4}.$$

Zbývá ověřit, že můžeme provést záměnu limity a integrálu, například podle Lebesgueovy věty:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x\in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x\in M$ platí $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n\in\mathbb{N}$ pro skoro všechna $x\in M$ platí $|f_n(x)|\le g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_M\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Množina M je v našem případě $(0,+\infty)$, posloupnost f_n tvoří funkce

$$f_n=n^2\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}.$$

Měřitelnost jednotlivých členů f_n posloupnosti na $(0,+\infty)$ plyne z jejich spojitosti na $(0,+\infty)$. Vztah pro limitu $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x^2}$ zjevně platí pro všechna $x\in(0,+\infty)$. Dále platí

$$n^2\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{x}=\left|\frac{n^2}{x}\left(1-\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^4}{4!}-\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^6}{6!}+\ldots-1\right)\right|\le\frac{n^2}{x}\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^4}{4!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^5}{5!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^6}{6!}+\ldots\right)$$
$$=x\left(\frac{1}{2!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)}{3!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{4!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^3}{5!}+\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^4}{6!}+\ldots\right)\le x\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots\right)=x\mathrm{e}^x,$$

a proto

$$|f_n|=\left|n^2\left(1-\cos\frac{x}{n}\right)\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}\right|\le x\mathrm{e}^{-x^2+x}=x\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}},$$

kde na pravé straně stojí funkce, která je zjevně lebesgueovsky integrovatelná na intervalu $(0,+\infty)$.

[4] 4. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n-1, n+1], \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus [n-1, n+1]. \end{cases}$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0, +\infty)$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J a K, kde

a) $J = (0, +\infty)$,

b) $K = (0, \alpha)$, kde $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Řešení:

Na intervalu $I = [0, +\infty)$ zjevně platí

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = 0.$$

(Posloupnost tvoří "hrb", který postupně putuje k nekonečnu, nakreslete si obrázek.)

Označme

$$f(x) = 0.$$

Zbývá rozhodnout, zda platí $f_n \rightrightarrows f$. Použijeme ekvivalentní charakterizaci stejnoměrné konvergence, která říká:

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\text{def}} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)| \, .$$

Zabývejme se nyní intervalem J. Platí

$$\sigma_n = \sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

(Supremum se nabývá například v bodě $x = n$.) Následně tedy $\sigma_n \not\to 0$ pro $n \to +\infty$. Konvergence proto není na intervalu J stejnoměrná. Na intervalu K a pro $n > (K - 1)$ platí

$$\sigma_n = \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

("Hrb" pro dostatečně velké n "odcestuje" z intervalu $(0, K)$.) Následně tedy $\sigma_n \to 0$ pro $n \to +\infty$. Konvergence je proto na intervalu K stejnoměrná.

[6] 5. Spočtěte plošný obsah plochy S, která je dána jako hranice (povrch) tělesa M, přičemž těleso M je popsáno vztahem $M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, \frac{x^2+y^2}{H} < z, \ 0 < z < H \right\}$. ($H \in \mathbb{R}^+$ je parametr.)

Řešení:

Těleso M je zjevně rotační paraboloid, viz Obrázek 1. Hranici rozdělíme na dvě části – plášť a podstavu.

Parametrizace pláště je

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = \frac{1}{H} r^2, \end{cases}$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $r \in [0, H]$. Tečné vektory k ploše S jsou zřejmě

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 2\frac{r}{H} \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Spočteme element plochy

$$\mathrm{d}S = \sqrt{g}\,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r,$$

kde

$$g = \det \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 + 4\frac{r^2}{H^2} & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

Je tedy $\mathrm{d}S = r\sqrt{1 + 4\frac{r^2}{H^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, zbývá zintegrovat přes danou plochu

$$S_{\text{plášť}} = \int_S \mathrm{d}S = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{H} r\sqrt{1 + 4\frac{r^2}{H^2}}\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{r=0}^{H} r\sqrt{1 + 4\frac{r^2}{H^2}}\mathrm{d}r$$

$$= \left| \begin{matrix} u = 1 + 4\frac{r^2}{H^2} \\ \mathrm{d}u = \frac{8}{H^2} r\mathrm{d}r \end{matrix} \right| = \frac{\pi}{4} H^2 \int \sqrt{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\left(1 + 4\frac{r^2}{H^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{r=0}^{H} = \frac{\pi}{6} H^2 \left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Parametrizace podstavy je

$$\Phi(r,\varphi) = \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = H, \end{cases}$$

kde $\varphi \in [0, 2\pi]$ a $r \in [0, H]$. Tečné vektory k ploše S jsou zřejmě

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} = \begin{bmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Spočteme element plochy

$$\mathrm{d}S = \sqrt{g}\,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r,$$

kde

$$g = \det \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \bullet \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\varphi} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{bmatrix}.$$

Je tedy $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, zbývá zintegrovat přes danou plochu

$$S_{\text{podstava}} = \int_S \mathrm{d}S = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{H} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_{r=0}^{H} r\mathrm{d}r = \pi H^2.$$

Celkem tedy

$$S = S_{\text{plášť}} + S_{\text{podstava}} = \frac{\pi}{6} H^2 \left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right) + \pi H^2 = \frac{5}{6}\pi H^2 \left(\sqrt{5} + 1\right).$$

[4] 6. Spočtěte plošný obsah množiny $M \subset \mathbb{R}^2$, kde $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 < y < x+2\}$.

Řešení:

Množina $M \subset \mathbb{R}^2$ je "sevřená" parabolou $y = x^2$ a přímkou $y = x + 2$. Cílem je spočítat

$$\int_M \mathrm{d}\lambda.$$

Nejprve zjistíme, ve kterých bodech se protíná parabola $y = x^2$ s přímkou $y = x + 2$. Řešíme rovnici

$$x^2 = x + 2,$$

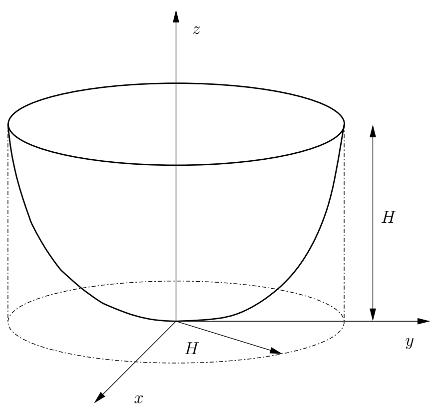
aneb $x^2 - x - 2$, jejímž řešením je

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases} .$$

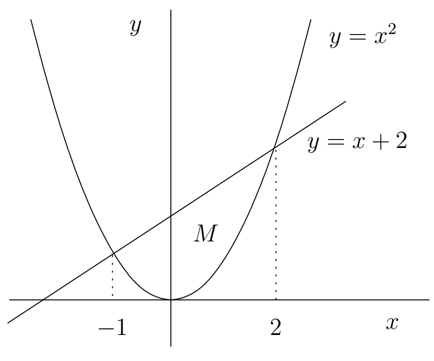
Množina M tedy vypadá tak, jak je znázorněno na Obrázku 2.

Výpočet proto proběhne takto

$$\int_M \mathrm{d}\lambda = \int_{x=-1}^{2} \left(\int_{y=x^2}^{x+2} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_{x=-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\tfrac{x^2}{2} + 2x - \tfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{9}{2}.$$



Obrázek 1: Plocha S.



Obrázek 2: Množina M.