Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ______________________________

Skupina: ______________________________

[40] 1. Vyšetřete průběh funkce $F(b)$ dané předpisem

$$F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-bx^2}}{x^2 e^{x^2}} \mathrm{d}x.$$

Diskutujte definiční obor funkce F, spojitost funkce F, limity v krajních bodech definičního oboru, derivaci funkce F, limity derivace v krajních bodech definičního oboru. Najděte inf, sup a (lokální) max, min (pokud existují). Načrtněte graf.

Nápověda: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Řešení:

Funkce $F(b)$ daná přepisem

$$F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-bx^2}}{x^2 e^{x^2}} \mathrm{d}x$$

má dva rizikové body $x = 0$ a $x = +\infty$ (měřitelnost integrandu je zřejmá neboť funkce $f(x, b)$ je pro libovolné b spojitá funkce proměnné x). V okolí nuly je

$$\frac{1 - e^{-bx^2}}{x^2 e^{x^2}} = \frac{1 - \left(1 + \frac{(-bx^2)}{1!} + \frac{(-bx)^2}{2!} + \cdots\right)}{x^2} e^{-x^2},$$

z čehož okamžitě vidíme, že pro $b \neq 0$ lze funkci pohodlně dodefinovat limitou a integrál bude (na okolí nuly) zcela jistě konečný. Pro $b = 0$ je samozřejmě $F(b) = 0$. (Dokonce platí, že funkce $F(b)$ je v tomto bodě spojitá.)

Zbývá zjistit, jak se integrand chová v druhém rizikovém bodě, a sice v $+\infty$. Pro všechna $b \geq -1 + \varepsilon$, kde ε je libovolné kladné číslo zřejmě platí

$$\left| \frac{1 - e^{-bx^2}}{x^2 e^{x^2}} \right| \leq \frac{(1 + e^{(1-\varepsilon)x^2})e^{-x^2}}{x^2} = \frac{e^{-x^2} + e^{-\varepsilon x^2}}{x^2}$$

a integrál bude (zajímáme-li se o chování v $+\infty$) zcela jistě konečný. Definiční obor tedy je $[-1, +\infty)$.

K výpočtu funkce $F(b)$ využijeme větu o derivaci integrálu podle parametru, která říká

Buď $f(x, b) : I \times J \to \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí

- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.

- Funkce $f(x,b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \to \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x,b)| \leq g(x)$.
- Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x,b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I.

Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x,b)$, jakožto funkce x, lebesguovsky integrovatelná na I, funkce

$$F(b) = \int_I f(x,b)\mathrm{d}x$$

je diferencovatelná na I a platí

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_I \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x,b)\mathrm{d}x.$$

V našem případě volme $I = (0, +\infty)$, $J = (-1+\varepsilon, +\infty)$, kde ε je libovolné kladné číslo. Diferencovatelnost funkce $f(x,b) = \frac{1-e^{-bx^2}}{x^2 e^{x^2}}$ podle proměnné b je zřejmá, měřitelnost podle proměnné x jsme diskutovali v úvodu, bod $b_0 \in J$, ve kterém má být funkce $f(x,b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I, nepochybně existuje, protože výše jsme dokonce zjistili, že $f(x,b)$ je lebesgueovsky integrovatelná pro libovolné b z definičního oboru.

Zbývá najít integrovatelnou majorantu pro derivaci

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b} f(x,b) = e^{-(b+1)x^2},$$

což je snadné neboť platí

$$\forall x \in I, \forall b \in (-1+\varepsilon, +\infty) : \left| e^{-(b+1)x^2} \right| \leq e^{-\epsilon x^2}$$

kde funkce na pravé straně je ovšem lebesgueovsky integrovatelná.

Pro funkci $F(b)$ jsme tedy obdrželi

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \int_0^{+\infty} e^{-(b+1)x^2}\mathrm{d}x,$$

z čehož plyne (užíváme známého vztahu $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$), že

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}b} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b+1}},$$

odkud integrováním podle proměnné b dostaneme

$$F(b) = \sqrt{\pi(b+1)} + C,$$

kde C je integrační konstanta. Hodnota funkce $F(b)$ v bodě $b = 0$ je zřejmě $F(0) = 0$, odkud $C = -\sqrt{\pi}$, celkem tedy

$$F(b) = \sqrt{\pi}\left(\sqrt{b+1} - 1\right),$$

odkud

$$F'(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a+1}},$$
$$F''(b) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{1}{(b+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Limity funkce a její derivace v krajních bodech definičního oboru jsou jasné

$$\lim_{b\to -1+} F(b) = -\sqrt{\pi},$$
$$\lim_{b\to +\infty} F(b) = +\infty,$$
$$\lim_{b\to -1+} F'(b) = +\infty,$$
$$\lim_{b\to +\infty} F'(b) = 0.$$

Funkce je zřejmě na svém definičním oboru rostoucí, nemá maximum, má minimum (v bodě $b = -1$), má supremum a infimum,

$$\inf_{b\in(-1,+\infty)} F(b) = -\sqrt{\pi},$$
$$\sup_{b\in(-1,+\infty)} F(b) = +\infty.$$

Průběh funkce je naznačen na obrázku 1.

[10] 2. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\,\mathrm{d}x.$$

Použijete-li při výpočtu nějakou větu, pečlivě odůvodněte, že jsou splněny patřičné předpoklady.

Řešení:

Zjevně platí, že

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x = 0.$$

Pokud tedy ukážeme, že je možné zaměnit limitu a integrál, můžeme snadno spočíst původní limitu,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\right)\mathrm{d}x = 0.$$

Záměnu limity a integrálu lze odůvodnit například podle Lebesgueovy věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M.
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ k funkci f, aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g, taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro skoro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M.
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_M f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_M f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f.

Posloupnost f_n je v našem případě tvořena funkcemi

$$f_n(x) =_{\mathrm{def}} \frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x.$$

Tyto funkce jsou na intervalu $M = (0, +\infty)$ spojité a tudíž měřitelné. První předpoklad Lebesgueovy věty je tedy splněn.

Druhý předpoklad je rovněž splněn, limitu jsme spočetli pro libovolné $x \in M$.

Zbývá najít integrovatelnou majorantu. (Třetí předpoklad Lebesgueovy věty.) Pro libovolné n platí

$$\left|\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\cos x\right| \leq \left|\frac{\ln(x+n)}{n}\mathrm{e}^{-x}\right| \leq \left|\frac{x+n}{n}\mathrm{e}^{-x}\right| \leq (x+1)\mathrm{e}^{-x},$$

kde funkce $(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ je lebesgueovsky integrovatelná na M. (Funkce $(x+1)\mathrm{e}^{-x}$ je spojitá na jakémkoliv uzavřeném intervalu $[0, K]$, je tedy Lebesgueovsky integrovatelná na $(0, K)$. Navíc $\int_0^K (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{+\infty} (x+1)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, kde druhý z integrálů je chápán jako Newtonův integrál. Limitní přechod $K \to +\infty$ a Leviho věta pak zaručují lebesgeovskou integrovatelnost na M.) Stačí tedy volit

$$g(x) =_{\mathrm{def}} (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Všechny předpoklady Lebesgueovy věty jsou splněny a lze proto provést záměnu limity a integrálu.

[30] 3. Spočtěte plošný obsah množiny $M \subset \mathbb{R}^2$ zadané jako průnik množin A a B a C, kde

$$\begin{aligned} A &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2\right\}, \\ B &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2Ry \leq 0\right\}, \\ C &= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

Řešení:

Množina A je kruh se středem v bodě $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ o poloměru R. Množina B je kruh se středem v bodě $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix}$ o poloměru R. To je zřejmé pokud přepíšeme

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0$$

jako

$$x^2 + (y - R)^2 - R^2 = 0.$$

Pro lepší představu si nakreslíme Obrázek 2.

Cílem je spočítat

$$\int_M \mathrm{d}\lambda.$$

Povšimneme si toho, že množinu M lze rozdělit na kruhovou výseč T_1 a kruhovou úseč U_1, Integrál lze proto přepsat jako

$$\int_M \mathrm{d}\lambda = \int_{T_1} \mathrm{d}\lambda + \int_{U_1} \mathrm{d}\lambda.$$

Pro parametrizaci množin T_1 a U_1 bude vhodné použít polární souřadnice,

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi. \end{aligned}$$

Determinant Jacobiho matice je

$$\det \begin{bmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{bmatrix} = r.$$

Výpočet plošného obsahu množiny T_1 je jednoduchý,

$$\int_{T_1} \mathrm{d}\lambda = \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3}\frac{R^2}{2}.$$

Pro výpočet plošného obsahu množiny U_1 je nutné odpovídajícím způsobem upravit integrační meze. Dosazením do vzahu $x^2 + y^2 - 2Ry = 0$ zjistíme, že oblouk kružnice ohraničující množinu U je dán vztahem

$$r^2 = 2Rr\sin\varphi,$$

a proto platí

$$\begin{aligned} \int_{U_1} \mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}} \int_{r=0}^{2R\sin\varphi} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 2R^2 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}} \sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi = 2R^2 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}\mathrm{d}\varphi \\ = 2R^2 \left[\frac{2\varphi - \sin(2\varphi)}{4}\right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Celkem tedy

$$\int_M \mathrm{d}\lambda = \frac{R^2}{2}\frac{\pi}{3} + \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{R^2}{2}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

[20] 4. Spočtěte

$$\int_M x \,\mathrm{d}\lambda,$$

kde množina $M \subset \mathbb{R}^3$ je čtyřstěn ohraničený rovinami

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 0, \\ z &= 0, \\ x + 2y + z &= 1. \end{aligned}$$

(Zápis $\int_M x \,\mathrm{d}\lambda$ je jen jiné značení pro $\int_M x \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.)

Řešení:

Nakreslíme si Obrázek 3. Použijeme Fubiniho větu,

$$\int_M x \,\mathrm{d}\lambda = \int_N \left(\int_{z=0}^{1-x-2y} x \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=0}^{\frac{1-x}{2}} \left(\int_{z=0}^{1-x-2y} x \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x,$$

kde N značí podstavu čtyřstěnu ležící v rovině $z = 0$. Zbývá postupně spočíst jednotlivé integrály,

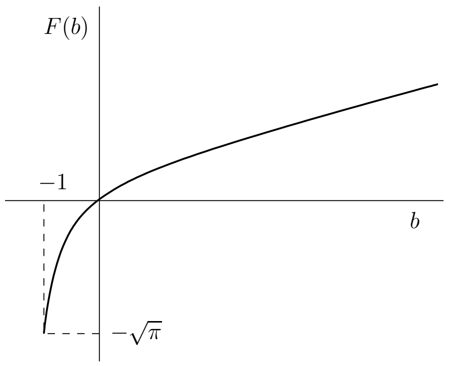
$$\int_{z=0}^{1-x-2y} x \,\mathrm{d}z = x\,(1 - x - 2y)\,,$$

dále

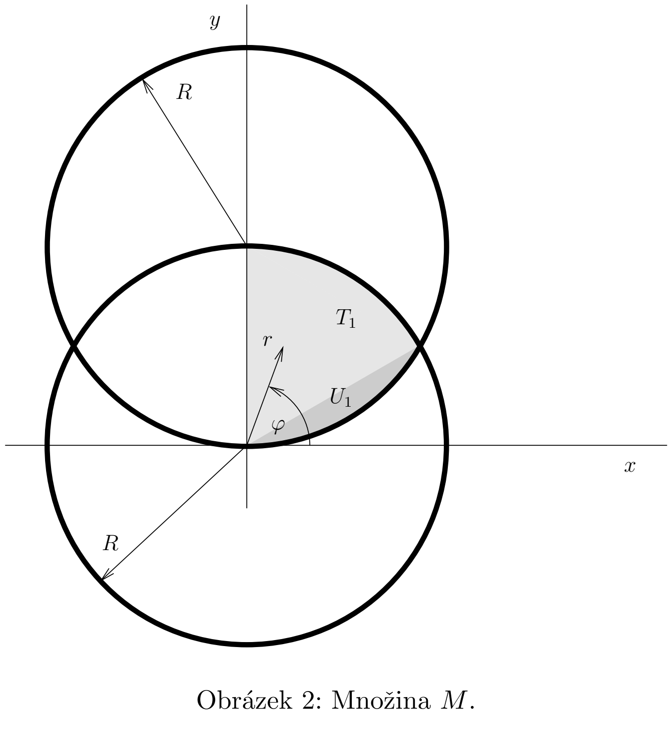
$$\begin{aligned} \int_{y=0}^{\frac{1-x}{2}} \left(\int_{z=0}^{1-x-2y} x \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y &= \int_{y=0}^{\frac{1-x}{2}} x\,(1 - x - 2y)\,\mathrm{d}y \\ &= \left[x \left(y - yx - y^2 \right) \right]_{y=0}^{\frac{1-x}{2}} = \frac{x(1-x)^2}{4} \end{aligned}$$

a konečně

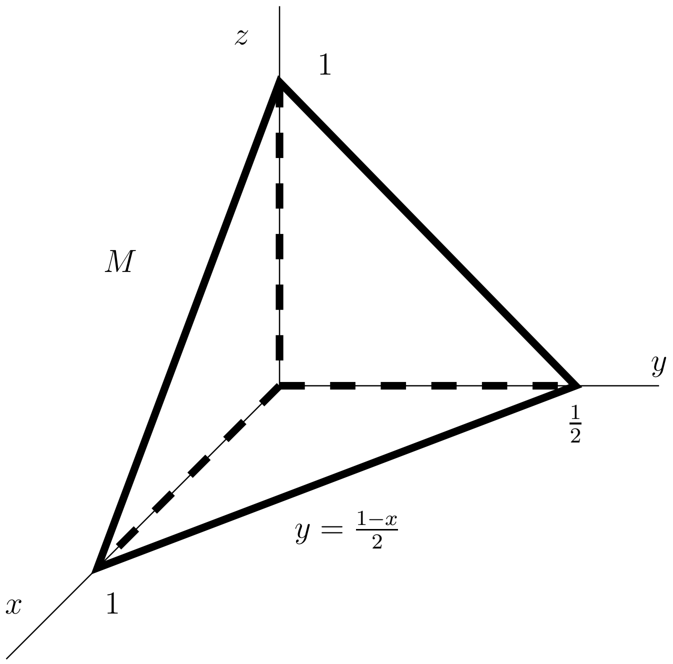
$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=0}^{\frac{1-x}{2}} \left(\int_{z=0}^{1-x-2y} x \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x &= \int_{x=0}^{1} \frac{x(1-x)^2}{4} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^3}{4} \right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$



Obrázek 1: Průběh funkce $F(b)$.



Obrázek 2: Množina M.



Obrázek 3: Množina M.