Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: ____________________

Skupina: ____________________

[10] 1. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^3\left([-1,1]\right) \mid y(-1) = 0,\, y(1) = 1 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_{-1}^{1} \left[x^2 \sin(\pi y) + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} + y\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2} \right] \mathrm{d}x$$

Spočtěte první a druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ.

Řešení:

Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ v bodě y ve směru h spočteme dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\right|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y+th) = \int_{-1}^{1} \left\{ x^2 \sin\left(\pi\left(y+th\right)\right) + \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y+th\right)\right]^3 + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+th\right)\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(y+th\right) + \left(y+th\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(y+th)\right)^2} \right\} \mathrm{d}x$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th) = \int_{-1}^{1} \Bigg\{ & x^2 \cos\left(\pi\left(y+th\right)\right)\pi h + 3\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y+th\right)\right]^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \\ & + \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(y+th\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+th\right)\frac{\mathrm{d}^3 h}{\mathrm{d}x^3} + h\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(y+th)\right)^2} \\ & -2\left(y+th\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(y+th)\right)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+th\right)\right]\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2} \Bigg\} \mathrm{d}x\end{aligned}$$

po dosazení $t = 0$ získáme

$$\begin{aligned}D\Phi(y)[h] = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(y+th)\right|_{t=0} = \int_{-1}^{1} \Bigg\{ & x^2 \cos\left(\pi y\right)\pi h + 3\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} \\ & + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^3 h}{\mathrm{d}x^3} + h\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2} - 2y\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2} \Bigg\} \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

což je hledaný vztah pro první Gâteaux derivaci.

Dále spočteme druhou derivaci. Opět vycházíme z definice

$$D^2\Phi(y)[h,g] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(D\Phi(y+sg)[h]\right)\bigg|_{s=0}.$$

Dosazením za $y =_{\mathrm{def}} y + sg$ do $D\Phi(y)[h]$ dostaneme

$$\begin{aligned} D\Phi(y+sg)[h] = \int_{-1}^{1} \Bigg\{ & x^2 \cos\left(\pi\left(y+sg\right)\right)\pi h + 3\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y+sg\right)\right)^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\left(y+sg\right) \\ & + \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right]\frac{\mathrm{d}^3 h}{\mathrm{d}x^3} + h\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right)^2} \\ & - 2\left(y+sg\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right]\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\Bigg\}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Derivováním dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}D\Phi(y+sg)[h] = \int_{-1}^{1} \Bigg\{ & -\pi^2 x^2 \sin\left(\pi\left(y+sg\right)\right) gh + 6\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y+sg\right)\right)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \\ & + \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^3 g}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^3 h}{\mathrm{d}x^3} \\ & - 2h\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right]\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} \\ & - 2g\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right]\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2} \\ & + 4\left(y+sg\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right)^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right]\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right]\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2} \\ & - 2\left(y+sg\right)\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(y+sg\right)\right)^2}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\Bigg\}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Po dosazení $s = 0$ a drobném přeuspořádání členů získáme hledanou druhou derivaci

$$\begin{aligned} D^2\Phi(y)[h,g] = \int_{-1}^{1} \Bigg\{ & -\pi^2 x^2 \sin\left(\pi y\right) gh + 6\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^3 g}{\mathrm{d}x^3} + \frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^3 h}{\mathrm{d}x^3} \\ & - 2\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\left[h\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2} + g\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\right] + 4y\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2} \\ & - 2y\mathrm{e}^{-\left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2}\frac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}x^2}\Bigg\}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Povšimněte si, že výraz je bilineární vzhledem k funkcím g a h. Navíc, pokud provedeme přeznačení $h =_{\mathrm{def}} g$ a $g =_{\mathrm{def}} h$, dostaneme tentýž vztah. Obě posledně jmenovaná pozorování jsou pro námi zkoumanou třídu funkcionálů obecně platná. Takto si můžete rychle zkontrolovat, jestli váš výpočet vede k něčemu rozumnému.

[10] 2. Buď dán funkcionál Φ na množině $M = \left\{ y \in \mathcal{C}^1 \left(\left[-\frac{1}{2}, 0 \right] \right) \mid y(-\frac{1}{2}) = 0,\, y(0) = 0 \right\}$ předpisem

$$\Phi(y) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(y^2 + (y')^2 - 2y\mathrm{e}^x \right) \mathrm{d}x.$$

a) Spočtěte Gâteaux derivaci funkcionálu Φ.

b) Napište Euler–Lagrange rovnice pro funkcionál Φ.

c) Najděte extremály funkcionálu Φ na množině M.

d) Spočtěte druhou Gâteaux derivaci funkcionálu Φ a poté rozhodněte, zda jsou nalezené extermály minimizéry či maximizéry daného funkcionálu.

Řešení:

Spočteme Gâteaux derivaci funkcionálu $\Phi(y)$ dle definice

$$D\Phi(y)[h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) \bigg|_{t=0}.$$

Po dosazení

$$\Phi(y + th) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left((y + th)^2 + ((y + th)')^2 - 2(y + th)\mathrm{e}^x \right) \mathrm{d}x$$

derivujeme podle t a výsledkem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(2(y + th)h + 2(y + th)'h' - 2h\mathrm{e}^x \right) \mathrm{d}x$$

po dosazení $t = 0$ (a integraci per partes) dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(y + th) \bigg|_{t=0} = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left(y - y'' - \mathrm{e}^x \right) h \mathrm{d}x.$$

Odkud lze přečíst Eulerovy–Lagrangeovy rovnice pro funkcionál $\Phi(y)$

$$y - y'' - \mathrm{e}^x = 0.$$

Eulerovy–Lagrangeovy rovnice vyřešíme metodou variace konstant. (Pokud tedy partikulární řešení nevidíme rovnou nebo pokud nehledáme řešení metodou násady pro speciální pravou stranu.) Řešení homogenní rovnice

$$y'' - y = 0$$

je zřejmě $y(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-x}$. Hledejme nyní partikulární řešení nehomogenní rovnice

$$y'' - y = -\mathrm{e}^x$$

metoda variace konstant dává pro funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ následujcí systém rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{e}^x \end{bmatrix},$$

odkud
$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -\mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{-x} \\ -\mathrm{e}^x & \mathrm{e}^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{e}^x \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -e^{2x} \end{bmatrix}.$$

Zbývá vyřešit diferenciální rovnice pro $c_1(x)$ a $c_2(x)$, což snadno provedeme pouhou integrací

$$c_1 = -\int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x,$$
$$c_2 = \frac{1}{2}\int e^{2x}\,\mathrm{d}x,$$

odkud

$$c_1 = -\frac{1}{2}x,$$
$$c_2 = \frac{1}{4}e^{2x},$$

Dosadíme za funkce $c_1(x)$ a $c_2(x)$ do vzorce pro partikulární řešení

$$y(x) = c_1(x)\mathrm{e}^x + c_2(x)\mathrm{e}^{-x} = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^x$$

Celkové řešení nehomogenní rovnice je

$$y(x) = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^x + C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x},$$

konstanty C_1 a C_2 určíme z okrajových podmínek

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$
$$y(0) = 0,$$

což vede na soustavu rovnic

$$e^{-\frac{1}{2}}C_1 + e^{\frac{1}{2}}C_2 = 0,$$
$$-\frac{1}{4} + C_1 + C_2 = 0.$$

jejímž řešením je

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 1 & e \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & -e \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2+e}{4(e-1)} \\ -\frac{3}{4(e-1)} \end{bmatrix}.$$

Extremála je tudíž

$$y(x) = -\frac{1}{2}x\mathrm{e}^x + \frac{1}{4}\mathrm{e}^x + \frac{1}{4(e-1)}\left((2+e)\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x}\right).$$

Druhou derivaci funkcionálu φ spočteme podle předpisu

$$
\begin{aligned}
&D^2\Phi(y)[h,h] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} D\Phi(y+th)[h]\Big|_{t=0} \\
&= 2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \left((y+th)h + (y+th)'h' + h\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{t=0} = 2\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(h^2 + (h')^2\right)\mathrm{d}x\right),
\end{aligned}
$$

což je kupodivu totéž co plyne z obecné věty:

Buď Φ funkcionál zadaný předpisem

$$
\Phi(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x.
$$

pak je jeho druhý diferenciál roven

$$
D^2\Phi(y)[h,h] = \int_a^b \left[P\left(h'\right)^2 + Qh^2\right]\mathrm{d}x,
$$

kde

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'}, \\
Q &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right),
\end{aligned}
$$

Ke zjištění povahy extremály použijeme některé z následujících kritérií

Je-li y klasické řešení Euler–Lagrange rovnic pro funkcionál

$$
\Phi(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x,
$$

a je-li pro každé x z intervalu $[a,b]$ funkce $f(y,z) = F(x,y,z)$ konvexní, pak je y minimizér daného funkcionálu.

nebo

Řekneme, že bod $\tilde{a}$ je konjugovaný k bodu a, pokud má rovnice (za y se dosazuje bod podezřelý z extrému)

$$
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(Ph'\right) + Qh = 0
$$

netriviální řešení s okrajovými podmínkami $h(a) = 0$, $h(\tilde{a}) = 0$.

Buď Φ funkcionál zadaný předpisem

$$
\Phi(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x
$$

a nechť y splňuje následující podmínky:

- Funkce y je extremálou funkcionálu Φ, to jest řeší příslušnou Eulerovu–Lagrangeovu rovnici.
- Koeficient P je (v bodě extremály) kladný (resp. záporný). Přesněji $P(x, y, y') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} > 0$ (resp. $P(x, y, y') = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y'} < 0$).
- Interval $(a, b]$ neobsahuje žádné body konjugované k bodu a.

Pak je y (slabým) minimem (resp. maximem) funkcionálu Φ.

První z kritérií je splněno, funkce $f(y, z)$ je definována jako

$$f(y, z) = y^2 + z^2 - 2y\mathrm{e}^x,$$

kde x je libovolný bod z intervalu $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$. Spočteme druhý diferenciál funkce f a vidíme, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ platí

$$D^2 f[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \mathbf{v} \bullet \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} \geq 0,$$

a funkce f je tedy konvexní jak je v příslušném kritériu požadováno.

Druhé z kritérií je také zjevně splněno, neboť v našem případě je $P = 1$, $Q = 1$ a příslušná rovnice pro existenci konjugovaného bodu je tedy ($a = -\frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} -h'' + h &= 0, \\ h(a) &= 0, \\ h(\tilde{a}) &= 0, \end{aligned}$$

ale tato rovnice má pouze triviální řešení (řešením rovnice je $h(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$, z okrajových podmínek pak plyne, že obě integrační konstanty jsou nulové), v intervalu $\left(-\frac{1}{2}, 0\right]$ proto neexistují konjugované body. Kromě toho jsou zřejmě splněny i ostatní podmínky.

[10] 3. Buď dána posloupnost funkcí

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}.$$

Najděte bodovou limitu f této posloupnosti v intervalu $I = [0, 1]$. Rozhodněte, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na intervalu J, kde

a) $J = [0, 1]$,

b) $K = [\alpha, 1]$, kde $\alpha \in (0, 1)$.

Řešení:

Volme x libovolně, ale pevně z intervalu $I \setminus \{0\}$, pak zjevně platí, že

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{nx}{1 + n^2x^2} = 0.$$

Pokud je $x = 0$ pak je posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupností samých nul a limita je opět rovná nule. Bodová limita posloupnosti $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ na intervalu I je tedy nulová funkce $f = 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = 0.$$

Stejnoměrnou konvergenci vyšetříme s použitím ekvivalentní charakterizace. Platí věta

> Buď $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}$ posloupnost funkcí. Posloupnost funkcí $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro $n \to +\infty$ stejnoměrně k funkci f na intervalu M, aneb
>
> $$f_n \overset{M}{\rightrightarrows} f,$$
>
> právě když pro $n \to +\infty$ platí
>
> $$\sigma_n \to 0,$$
>
> kde
>
> $$\sigma_n =_{\mathrm{def}} \sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|.$$

Najděme tedy supremum funkce $|f_n(x) - f(x)|$ na příslušných intervalech. (Funkce f_n a f jsou spojité a oba intervaly jsou uzavřené, je proto možné namísto $\sup_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$ psát rovnou $\max_{x \in M} |f_n(x) - f(x)|$.) Výraz $f_n(x) - f(x)$ je v našem případě zjevně kladný, a proto můžeme bez problémů odstranit absolutní hodnotu.

Hledejme nyní maximum funkce $f_n(x) - f(x)$. První derivace je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f_n(x) - f(x)) = \frac{n\left(1 + n^2x^2\right) - nx\left(2n^2x\right)}{\left(1 + n^2x^2\right)^2} = \frac{n\left(1 - n^2x^2\right)}{\left(1 + n^2x^2\right)^2}.$$

Derivace je tedy rovná nule v bodě $x_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{n}$.

V případě intervalu $J = [0, 1]$ je tento bod vždy uvnitř tohoto intervalu a platí

$$(f_n(x) - f(x))|_{x = x_{\mathrm{ext}}} = \frac{1}{2}.$$

Dále je zjevné, že funkce $f_n(x) - f(x)$ v stacionárním bodě x_{ext} nabývá maxima. (Funkce $f_n(x) - f(x)$ je kladná, spojitě diferencovatelná a je rovná nule pro $x = 0$ a $x \to +\infty$.) Pro $n \to +\infty$ tedy platí

$$\sup_{x \in J} |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{2} \not\to 0,$$

a posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tedy *nekonverguje stejnoměrně na intervalu* J.

V případě intervalu $K = [\alpha, 1]$ bod $x_{\mathrm{ext}} = \frac{1}{n}$ od nějakého (velkého) n leží mimo interval K. Funkce $f_n(x) - f(x)$ tedy nabývá maxima v jednom z krajních bodů intervalu K. Pro dostatečně velké n je $f_n(x) - f(x)$ na příslušném intervalu klesající, a proto nabývá maxima v levém krajním bodě. Platí tedy

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\alpha) = \frac{n\alpha}{1 + n^2\alpha^2},$$

z čehož plyne, že pro $n \to +\infty$ platí

$$\sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| = \frac{n\alpha}{1 + n^2\alpha^2} \to 0,$$

a posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ tedy *konverguje stejnoměrně na intervalu* K.

[10] 4. Rozhodněte, zda je řada

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \frac{2}{\pi} \arctan x}$$

stejnoměrně konvergentní na množině

a) $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$,
b) $\mathbb{R}$.

Dále rozhodněte, zda je tato řada na uvedených intervalech absolutně stejnoměrně konvergentní.

Řešení:

Využijeme Dirichlet kritérium, které říká:

Buďte $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ a $\{g_n\}_{n=1}^{+\infty}$ posloupnosti funkcí. Nechť platí:

a) Posloupnost částečných součtů $\sum_{n=1}^{N} f_n(x)$ je stejnoměrně omezená na množině I.
b) Pro každé $x \in I$ je posloupnost $\{g_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ monotónní a $g_n \overset{I}{\rightrightarrows} 0$.

Potom řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n g_n$$

je stejnoměrně konvergentní na množině I.

Posloupnost, která má být stejnoměrně omezená budiž posloupnost

$$f_n =_{\text{def}} (-1)^n \,.$$

Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je číselnou posloupností a tato posloupnost je zjevně omezená. Skutečně tedy máce co do činění s stejnměrně omezenou posloupností funkcí.
Posloupnost $\{g_n(x)\}_{n=2}^{+\infty}$ volme jako

$$g_n =_{\text{def}} \frac{1}{n + \frac{2}{\pi} \arctan x}.$$

(Posun v indexu n je nedůležitý.) Bodová limita této posloupnosti je zjevně nulová funkce. Dále pro $x \in \mathbb{R}$ platí, že

$$\left| \frac{1}{n + \frac{2}{\pi} \arctan x} \right| \leq \frac{1}{n-1},$$

a poslopnost tedy konverguje stejnoměrně na celém $\mathbb{R}$. Navíc platí, že

$$g_{n+1} - g_n = \frac{1}{(n+1) + \frac{2}{\pi}\arctan x} - \frac{1}{n + \frac{2}{\pi}\arctan x} = -\frac{1}{\left[(n+1) + \frac{2}{\pi}\arctan x\right]\left[n + \frac{2}{\pi}\arctan x\right]} < 0,$$

a uvažovaná posloupnost je tudíž monotónní. Všechny podmínky požadované Dirichlet kritériem jsou splněny a daná řada proto konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$. Pokud konverguje stejnoměrně na $\mathbb{R}$, tak navíc automaticky konverguje i na podintervalu $[-\alpha, \alpha]$.

Zkoumaná řada není absolutně konvergentní, o čemž se lze snadno přesvědčit zvolíme-li $x = 0$. V tomto případě je

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n + \frac{2}{\pi}\arctan x} \right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n},$$

přičemž o řadě $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je známo, že diverguje.