Témata 3. přednášky z ÚVODU DO VARIAČNÍHO POČTU

- Terminologie : Gateaux derivace Φ v x_0 ve směru
  Gateaux diferenciál
  Frechétův diferenciál
- (Další) nutné a postačující podmínky existence minimizéru
- Hladkost L, y v $\Phi[y] = \int_a^b L(x, y, y')\,dx$
- Dořešení úlohy ① (i)-(iii).

LITERATURA : Pokorný – přednášky formou videozáznamu
Kopáček II – MAF (2003), kap. 11
B. Dacorogna : Introduction to Calculus of Variations
Imperial College Press, 3. vydání (2015)

$\boxed{\text{Terminologie}}$ $x_0 \in X$ lineární

- $$\delta\Phi[x_0](h) = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi[x_0 + th] - \Phi[x_0]}{t}$$ pro $h \in X$

Gateaux derivace Φ v x_0 ve směru h

$\boxed{\text{Pozn}}$ $\delta\Phi[x_0](h)$ = variace (Calculus of variations)

- $\delta\Phi[x_0] : h \longmapsto \delta\Phi[x_0](h)$ tj. zobrazení $X \to \mathbb{R}$ je lineární funkcionál – Gateaux diferenciál

- Φ má v $x_0 \in X$ Frechétův diferenciál pokud existuje lineární zobrazení, označme jej $d\Phi[x_0]$, z $X \to \mathbb{R}$ takové, že

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\Phi[x_0 + h] - \Phi[x_0] - d\Phi[x_0](h)}{\|h\|_X} = 0$$

Platí (podobně jako v $\mathbb{R}^d$): existuje-li $d\Phi[x_0]$, pak existuje $\delta\Phi[x_0]$ a rovnají se.

$\boxed{\text{Pozn.}}$ Studiem matematických vlastností lin. funkcionálů vznikla část matematiky – funkcionální analýza

Nutné a postačující podmínky existence extremál

Buď $L \in C^2(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ a $\Phi[y] \overset{df}{=} \int_a^b L(x,y(x),y'(x))\,dx$

a

nalézt $y \in X$:

$$\Phi[y] = \inf_{\xi \in X} \Phi[\xi] \qquad (P)$$

Dokážeme následující variantu Věty 2.

Věta 2*

(1) Existuje-li minimizér $y \in Z \cap C^2(\langle a,b\rangle)$ úlohy (P), pak nutně

$$-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0 \qquad (E\text{-}L)$$

neboli

$$-\frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x,y,y')\,y'' - \frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\,y' - \frac{\partial L}{\partial y'\partial x}(x,y,y') + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0$$

(2) Naopak, je-li y řešením (E-L) a

$(y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ je konvexní pro $\forall x \in [a,b]$

pak y je minimizér (P)

(3) Je-li navíc $(y,z) \longmapsto L(x,y,z)$ striktně konvexní pro $\forall x \in [a,b]$,

pak je minimizér, pokud existuje, jediný.

Pozn. • Řešení (E-L) se obecně nazývají kritické (stacionární) body.

• Požadavek na hladkost minimizéru je příliš silný, nemusí být ani C^1.

Připomenutí $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je (striktně) konvexní $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^m$ $(x \neq y)$ a $\forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \underset{(<)}{\leq} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Je-li $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$, pak jsou ekvivalentní:

(i) f je konvexní

(ii) $f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)\cdot(x-y) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^m$

(iii) $(\nabla f(x) - \nabla f(y))\cdot(x-y) \geq 0 \qquad$ —"—

Je-li $f \in C^2(\mathbb{R}^m)$,

(iv) $\nabla^{(2)} f(x)\,v \cdot v \geq 0 \qquad \forall x,v \in \mathbb{R}^m$

$\boxed{\text{Dk věty } 2^*}$ $\boxed{\text{Ad (1)}}$ už dokázáno. Stručně ještě jednou:

Je-li y minimizér ϕ přes všechny body v X, pak

$$\phi[y] \leq \Phi[y+th] \qquad \forall h \in X \quad \text{a } t \in \mathbb{R}$$

Neboli pro lib. $h \in X$

$q(t) := \phi[y+th]$ má v 0 extrém a tedy

$$q'(0) = 0 \Leftrightarrow \delta\phi[y](h) = 0.$$

Avšak

$$\delta\phi[y](h) = 0 \qquad \forall h \in X$$

$$\Updownarrow$$

tzv. slabá forma (E-L) rovnic

$$\boxed{\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x))h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x))h(x) \quad dx = 0 \quad \forall h \in X}$$

$$\text{``}\Updownarrow\text{''}$$

dostatečná hladkost funkcí

$$\int_0^a \left[-\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\right] h(x)\, dx = 0 \qquad \forall h \,;\, h(a) = h(b) = 0$$

$\Downarrow$ Fund. lemma VP

(E-L)

▨

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Z ekvivalentní charakterizace konvexity $(y,z) \to L(x,y,z)$:

$$L(x, y+h, y'+h') \geq L(x,y,y') + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')h'$$

$\int_a^b \dots dx \Rightarrow$

$$\phi[y+h] \geq \phi[y] + \underbrace{\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')h' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')h\right] dx}_{=0 \text{ slabá forma (E-L)}}$$

$$\Longrightarrow \quad \phi[y+h] \geq \phi[y] \quad \forall h \in X.$$

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Nechť y a $\bar{y}$ jsou dva minimizéry. Definujme

$$\hat{y} = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\bar{y}.$$ Zřejmě $\hat{y} \in X$.

Z konvexity L vzhledem k y, z:

$$L(x,\hat{y},\hat{y}') = L\left(x, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\bar{y}, \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}\bar{y}'\right) \leq \frac{L(x,y,y')}{2} + \frac{L(x,\bar{y},\bar{y}')}{2}$$

Tedy po integraci $\int_a^b dx$

$$\inf \leq \Phi[\hat{y}] \leq \frac{1}{2}\Phi[y] + \frac{1}{2}\Phi[\bar{y}] = \inf$$

$$\Downarrow$$

$$\int_a^b \underbrace{\left[\frac{L(x,y,y')}{2} + \frac{L(x,\bar{y},\bar{y}')}{2} - L\left(x, \frac{y+\bar{y}}{2}, \frac{y'+\bar{y}'}{2}\right)\right]}_{\geq 0 \ \& \ > 0 \text{ pokud } y \neq \bar{y}} dx = 0$$

Tedy nutně $y = \bar{y}$ ∎

$\boxed{\text{Řešení ÚLOHY ① (i) - (iii)}}$

$\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$ Tedy $L(x,y,z) = L(z) = \sqrt{1+z^2}$

(i) $X^1 = \{z \in C^1(\langle a,b\rangle);\ \boxed{z(a)=A},\ \boxed{z(b)=B}\}$ → Dvě Dirichletovy podmínky

(ii) $X^2 = \{z \in C^1(\langle a,b\rangle);\ z(a)=A\}$ → 1 Dirichletova podmínka, 1 Neumannova –"–

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(b, y(b), y'(b)) = 0$$

(iii) $X^3 = C^1(\langle a,b\rangle)$ Dvě Neumannovy podmínky

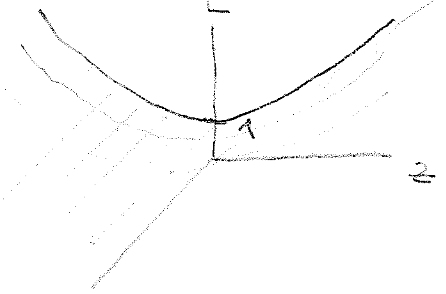
Protože L nezávisí na y, tak z (E-L) je

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y') = \text{const.} \quad \text{tedy} \quad \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = C \in (-1,1),$$

což implikuje $$y' = \frac{C}{\sqrt{1-C^2}} = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow y(x) = \alpha x + \beta$$

$\boxed{\text{(i)}}$ $y(x) = \frac{B-A}{b-a}x + \frac{Ab-Ba}{b-a}$ $\boxed{\text{(ii)}}$ $y(x) = A$

$\boxed{\text{(iii)}}$ $y(x) = \beta \in \mathbb{R}$ libovolné.



L je sice striktně konvexní vzhledem k z, ale vzhledem k proměnným y, z je "jen" konvexní.

Tedy nalezené stacionární body jsou minimizéry, ale jejich jednoznačnost v případech (i) a (ii) neplyne z Věty 2*, část (3).

V případě (iii) máme ∞ minimizérů.

Def. $\delta^{(2)}\Phi[y_0](h,h) = \frac{d^2}{dt^2}\Phi[y_0+th]\Big|_{t=0}$

Věta 3 (1) Nechť y_0 je extremála $\Phi : X \to \mathbb{R}$
Nechť $\delta^2\Phi[y_0](h,h)$ ex.

$$\Big\} \Rightarrow \delta^{2}\Phi[y_0](h,h) \begin{matrix} \overset{\text{MAX}}{\le} \\ \underset{\text{MIN}}{\ge} \end{matrix} 0$$

(2) Nechť
- $L, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial y'}, \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}, \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2} \in C(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$
- $\delta\Phi[y_0](h) = 0 \quad \forall h \in X$ [tzn. y_0 je stacionární nebo kritický bod]
- $\exists c > 0$ a $\delta_1 > 0$ $\quad \delta^2\Phi[y_0](h,h) \ge c\|h\|_X^2 \quad \forall h \in X$, $\|h\|_X \le \delta_1$

pak Φ má v y_0 ostré lok. minimum.

Dk (1) SAMI z vět o fci reálné proměnné

(2) Připomeňme definici $g(t) = \Phi[y_0+th]$ h lib.

Pak $\Phi[y_0+h] - \Phi[y_0] = g(1) - g(0) \underset{\text{Taylor}}{=} g'(0) + \frac{g''(\xi)}{2}$ pro jisté $\xi \in (0,1)$

Ale $g'(0) = 0$ z 2. předpokladu. Tedy

$$\Phi[y_0+h] - \Phi[y_0] + \frac{g''(0) - g''(\xi)}{2} = \frac{g''(0)}{2}$$

Z třetího předpokladu

$$\frac{c}{2}\|h\|_X^2 \le \frac{g''(0)}{2} \le \Phi[y_0+h] - \Phi[y_0] + \frac{c}{4}\|h\|_X^2$$

pro $\|h\|_X$ dostatečně malé.

$\Rightarrow \quad \Phi[y_0] \le \Phi[y_0+h] \quad \forall h \quad (\|h\|_X \le \delta_1)$.

$\Rightarrow$ y_0 je lokální minimizér. $\boxed{\Sigma}$

Ještě jedna postačující podmínka Platí

$$\delta^{(2)}\Phi[y_0](h,h) = \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y+th,y'+th')h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y+th,y'+th')h(x)\right]\Bigg|_{t=0} dx$$

$$= \int_a^b \Big[\underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y'}(x,y,y')}_{P(x)}[h'(x)]^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\underbrace{2h(x)h'(x)}_{=[h^2(x)]'} + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,y')h^2(x)\Big]dx$$

$$= \int_a^b P(x)(h'(x))^2 + Q(x)h^2(x)\ dx =: \Psi[h]$$

kde $Q(x) = -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y'\partial y}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y,y')$

Ψ je kvadratický funkcionál v h, jehož (E-L) má tvar

$[\ L(x,h,h') = P(x)[h']^2 + Q(x)h^2\ ]$

$$\boxed{\begin{gathered}-(P(x)h'(x))' + Q(x)h(x) = 0\\ h(a) = h(b) = 0\end{gathered}}$$

JACOBIHO ROVNICE (J)

Def. Bod $x \in (a,b]$ se nazývá konjugovaný bod (J) pokud $\exists$ netriviální řeš. (J) s $h(a)=0$ a $h(x)=0$.

Věta 4 (JACOBI)

(1) Nechť $\frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}(x,y_0(x),y_0'(x)) > 0$ na $[a,b]$ a y_0 je lokální minimizér Φ $\Big\} \Rightarrow$ neexistuje konjugovaný bod v (a,b).

(2) Nechť $y_0 \in C^2(\langle a,b\rangle)$ řeší (E-L)
Nechť $\frac{\partial L}{\partial (y')^2}(x,y_0(x),y_0'(x)) > 0$ na $[a,b]$
Nechť v $(a,b]$ neexistuje konj. bod (J)
$\Bigg\} \Rightarrow$ y_0 je lok. minimizér Φ.

Dk Gelfand, Fomin: (Calculus of Variations.

HLADKOST ŘEŠENÍ

Definice funkcionálu Φ má dobrý smysl pro $y \in C^1(\langle a,b\rangle)$.

Důkaz věty 2 vyžadoval, aby

$$(*) \quad -\left(\frac{\partial L}{\partial y'}(\cdot, y, y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(\cdot, y, y') \in C(\langle a,b\rangle),$$

abychom mohli použít fundamentální lemma.
Věta 2* přímo předpokládala $y \in C^2(\langle a,b\rangle)$.

OTÁZKA: Lze dokázat platnost věty 2 bez předpokladu (*)?

VIZ DŮKAZ VĚTY 2*

Ke kladné odpovědi si nejdříve všimneme, že slabá forma (E-L) má tvar

$$\int_a^b \left[E(x)h'(x) + G(x)h(x)\right] dx = 0,$$

kde $E = \frac{\partial L}{\partial y'}(\cdot, y, y')$ a $G = \frac{\partial L}{\partial y}(\cdot, y, y')$

Předpokládejme nyní, že E a G jsou pouze spojité, $E, G \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak nemůžeme „per-partesit" v 1. členu. Zadefinujeme-li však

$$P_G(x) = \int_a^x G(s)\,ds, \quad \text{pak} \quad P_G' = G \quad \text{a} \quad P_G \in C^1(\langle a,b\rangle)$$

a lze „per-partesit" v 2. členu. Dostaneme

$$0 = \int_a^b \left[E(x) - P_G(x)\right] h'(x) + \underbrace{\left[P_G(x)h(x)\right]_a^b}_{=0} \quad \forall h \in \left[C^1(\langle a,b\rangle)\right.$$

Z varianty fund. lemmatu variačního počtu (viz zpět) plyne, že

$$E(x) - P_G(x) = \text{konst.} \Leftrightarrow E = \text{konst} + P_G(x) \in C^1(\langle a,b\rangle)$$

Tedy $E \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a výraz v (*) tvaru

$-E' + G$ je vlastně spojitý. Pomocný předpoklad (*)

v důkazu věty 2 je tedy ověřen (tj. platí) a není jej třeba předpokládat.

Věta 2 tedy platí za předpokladu $y \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a $L \in C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$.

Lemma (varianta fund. lemmy variačního počtu)

Nechť $G \in C(\langle a,b\rangle)$ splňuje $\boxed{\int_a^b G(x)\, h'(x)\, dx = 0 \quad \forall h \in C^1(\langle a,b\rangle),\ h(a)=h(b)=0}$

Pak $G \equiv \text{const.}$

Dk. Označme $c^* := \frac{1}{b-a}\int_a^b G(x)\,dx = \fint_a^b G(x)$ průměr G přes (a,b).

Definujme $h(x) = \int_a^x [G(s) - c^*]\,dx$.

Ověřte, že $h \in C^1(\langle a,b\rangle)$ a $h(a) = h(b) = 0$

Tedy h je přípustná "testovací" funkce v .

Po dosazení

$$0 = \int_a^b G(x)\left(G(x) - c_*\right) = \int_a^b \left(G(x) - c_*\right)\left(G(x) - c_*\right) dx$$

neboť $\int_a^b (G(x) - c_*)\,dx = 0$

což implikuje $G(x) \equiv c_*$ ∎

DŮLEŽITÉ PŘÍKLADY A KOMENTÁŘE UKAZUJÍCÍ, JAK OBTÍŽNÁ PROBLEMATIKA „VARIAČNÍ POČET" JE I V JEDNODUCHÝCH SITUACÍCH

$\boxed{\text{Př. ①}}$ $L(z) = (z^2-1)^2$, $\Phi[y] = \int_0^1 \underbrace{[(y'(x))^2 - 1]^2}_{\geq 0}$

$$(P) \quad \min_{y\in[C^1(\langle 0,1\rangle)]_0} \Phi[y]$$

$$(P_*) \quad \min_{y\in X_*} \Phi[y] \,, \quad X_* = \{z \in \underset{\text{částech}}{C^1}(\langle 0,1\rangle) ; z(0) = z(1) = 0\}$$

$$(E\text{-}L) \Rightarrow 4((y')^2-1)\,y' = \text{const.}$$

Pokud $(y')^2-1=0$, pak splňuje (E-L)

Ve třídě $C^1(\langle 0,1\rangle)$, jen $y'=1$ a $y'=-1$ ⇒

$y_1(x) = x+\alpha$, $y_2(x) = -x+\beta$, nelze však splnit $y(0) = y(1) = 0$.

Přitom $\Phi[y_i] = 0$ (dá se ukázat, že 0 je inf. $\Phi[y]$)

Tedy (P) nemá řeš.

Avšak (P_*) řešení má; $y(x) = \begin{cases} x & x\in[0,\frac{1}{2}] \\ 1-x & x\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$.

$\boxed{\text{Př. ②}}$ Úloha o brachystochroně.

$$L(x,y,y') = \frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{B-y}} \quad \text{na } [a,b] \qquad \begin{matrix} y(b) = B \\ y(a) = 0 \end{matrix}$$

$L \notin C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$ vzhledem k y má sing. v 0.

(nelze aplikovat žádnou z vět.)

$\boxed{\text{Př. ③}}$ Lavrentievův jev Funkce $\bar{y}(x) = x^{1/3} \in Y = \{z\in C(\langle 0,1\rangle)\cap C^1((0,1\rangle) ; z(0)=0, z(1)=1\}$ ale $\bar{y} \notin X := \{z\in C^1(\langle 0,1\rangle) ; z(0)=0, z(1)=1\}$. Navíc

$$0 = I[\bar{y}] = \inf_{y\in Y} \underbrace{\int_0^1 (x-y^3(x))^2 (y'(x))^6\,dx}_{\Phi[y]} < \inf_{y\in X} \Phi[y] \qquad \boxed{5}$$

VÁZANÉ EXTRÉMY

Věta 5 Pro $f, g \in C^2(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$ označme $\Phi[y] = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx$ a $\Gamma[y] = \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\,dx$. Uvažujme

$$M = \{ z \in C^1(\langle a,b\rangle) ;\ z(a) = A,\ z(b) = B,\ \Gamma(y) = \ell \},$$ kde A, B, ℓ jsou daná čísla.

Nechť y_0 je extremálou (minimizérem nebo maximizérem) úlohy

$$(P) \qquad \min_{y \in M} \Phi[y] \qquad \text{nebo} \qquad \max_{y \in M} \Phi[y]$$

a nechť $\delta\Phi[y_0](h)$ a $\delta\Gamma[y_0](h) \neq 0$ existují pro $\forall h \in [C^1(\langle a,b\rangle)]_0$.

Pak $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tak, že y_0 ; $\delta[\Phi - \lambda\Gamma][y_0](h) = 0 \quad \forall h \in [C^1(\langle a,b\rangle)]_0$,

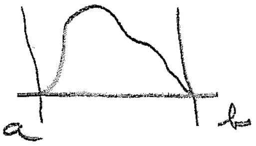
což znamená že y_0 řeší

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial y'} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y'}\right)' + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y}\right) = 0$$

(Př.) $\Phi[y] = \int_a^b y(x)\,dx$ funkcionál plochy $y \geq 0$

$\Gamma[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}$ funkcionál délky křivky

$$\ell \geq (b - a)$$



$$\boxed{(P) \qquad \max_{y \in M} \Phi[y]}$$

Věta 6 Buď $f \in C^2(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^4)$, $g \in C^1(\langle a,b\rangle \times \mathbb{R}^2)$,

$$\Phi[y] := \int_a^b f(x, y_1(x), y_2(x), y_1'(x), y_2'(x))\,dx,$$

$$M := \{ z \in [C^1(\langle a,b\rangle)]^2 ;\ z_i(a) = A_i,\ z_i(b) = B_i,\ i = 1,2,\ g(x, y_1, y_2) = 0 \}.$$

Nechť $\left|\frac{\partial g}{\partial y_1}\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial y_2}\right| \neq 0$ a y_0 je extremálou $\Phi[y]$ vzhledem k M.

Pak $\exists \lambda \in C(\langle a,b\rangle)$ tak, že y_0 řeší

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right)' + \frac{\partial f}{\partial y_i} - \lambda\frac{\partial g}{\partial y_i} = 0 \qquad i = 1,2.$$