ÚVOD DO VARIAČNÍHO POČTU

Klasická (reálná) analýza (real analysis, differential calculus – diferenciální počet)

- zkoumá vlastnosti (reálných) **funkcí**
- objekt studia $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\quad d \geq 1$ $\quad$ FUNKCE
  $\qquad\qquad \mathbb{C} \to \mathbb{R}$
  $\qquad\qquad \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$
- mimojiné zkoumá **extrémy funkcí** (lokální minima/max.)

Víme z 1. roč.:

(1) Je-li $f \in C(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, pak f nabývá v K minimum/maximum

(2) Je-li $f: U(x_0) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f má v x_0 extrém a $f'(x_0)$ existuje, pak $f'(x_0) = 0$

(3) Je-li $f: U(x_0) \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $d > 1$, f má v x_0 extrém, $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ existují pro $i = 1, \dots, d$, pak $\nabla f(x_0) = 0$

$\partial_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = 0 \quad \forall\, |\vec{v}| = 1$

Derivace f v $\vec{x}_0$ ve směru $\vec{v}$, $\quad \partial_{\vec{v}} f(x_0)$,
(směrové derivace f v x_0)
definovaná vztahem

$$\partial_{\vec{v}} f(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

je koncept, který bude vhodný pro derivování v prostorech ∞-dimenze, tedy ve variačním počtu.

$\boxed{\text{Variační počet}}$ Calculus of variations

- zkoumá minima/maxima neboli $\boxed{\text{extremály funkcionálů}}$ ← kritické body
- objekt studia $\boxed{\text{funkcionál}}$ zobrazení z normovaného prostoru funkcí do $\mathbb{R}$

$$\mathcal{L} : (X, \|\cdot\|_X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Příklady prostorů } X}$

- $C(\langle a,b\rangle)$, $C^k(\langle a,b\rangle)$, ..., $C(\Omega)$, $C^k(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
- $L^2((a,b))$, $L^p((a,b))$ Lebesgueovy prostory
- $W^{1,2}((a,b))$, $W^{k,p}((a,b))$ Sobolevovy prostory

Příklady funkcionálů a úloh variačního počtu

① Buď $\vec{\gamma} : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^s$ (křivka, trajektorie, pohyb, funkce)
geometr, fyzik, inženýr, matematik

(Funkcionál) $\boxed{\text{délka křivky}}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] := \int_0^T \sqrt{\sum_{i=1}^{s} [\gamma_i'(t)]^2}\, dt$$

Speciálně ($s = 2$)

- $\vec{\gamma}(\varphi) = (r(\varphi)\cos\varphi,\ r(\varphi)\sin\varphi)$, $\varphi \in \langle \alpha, \beta\rangle$ zobecněné polární souřadnice

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \mathcal{L}[r] = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi$$

- Křivka daná grafem funkce $\langle\vec{\gamma}\rangle = \{(x, y(x));\ x \in (a,b)\}$

$$\mathcal{L}[\vec{\gamma}] = \boxed{\mathcal{L}[y] = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx}$$

Uvažujme na chvíli jen tento funkcionál ↑.
Zformulujeme tři minimalizační úlohy.

Tři úlohy (variačního počtu)

(i) Nalézt $\min\limits_{y\in X^1} \mathcal{L}[y]$, kde $X^1 = \{y \in \overbrace{C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b\rangle)}^{Z};$
$y(a) = A,\ y(b) = B\}$

Úloha: nalézt nejkratší křivku spojující dva body $[a,A]$ a $[b,B]$

(ii) Nalézt $\min\limits_{y\in X^2} \mathcal{L}[y]$ $\qquad X^2 = \{y \in Z\ ;\ y(a) = A\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejmenší vzdálenost $[a,A]$ od přímky procházející body $[b,0]$ a $[b,B]$, $B \neq 0$.

(iii) Nalézt $\min\limits_{y\in X^3} \mathcal{L}[y]$ $\qquad X^3 = \{y \in Z\}$

Úloha: nalézt křivku, která realizuje nejkratší vzdálenost mezi dvěma přímkami danými body $[a,0], [a,A]$ resp. $[b,0], [b,B]$.

$V[y] := \pi \int_a^b y^2(x)\,dx$

$P[y] := 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx$

Funkcionály plochy, objemu rotačních těles; „$f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$“

② Klasická teoretická mechanika. Jedním z důležitých principů je HAMILTONŮV PRINCIP NEJMENŠÍ AKCE:

pohyb $(\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)))$ Newtonova potenciálního systému daného rovnicemi

$$\frac{d}{dt}\left(m \frac{d\vec{x}}{dt}\right) + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = 0 \iff (m\dot{\vec{x}})^{\cdot} + \frac{\partial U}{\partial \vec{x}} = \vec{0}$$

se shoduje s kritickými body (extremálami) funkcionálu

$$\Phi[\vec{x}] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, \vec{x}, \frac{d\vec{x}}{dt}\right) dt,$$

kde

$$L(t, \vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t)) \overset{df}{=} T(t, \vec{x}, \dot{\vec{x}}) - U(\vec{x})$$

③ Problém minimální plochy $u(x,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$S[u] := \int_\Omega \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = \int_\Omega \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dxdy$$

$$\min S[u]$$
$$u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$
$$u|_{\partial\Omega} = u_0$$

u_0 je daná funkce na hranici

„bublifuk".

④

úloha: nalézt maximální plochu, kterou lze "uzavřít" provázkem dané délky, tj.

$$\boxed{\begin{array}{l} \max \mathcal{S}[y] \\ y \in X \\ \& \\ \mathcal{L}[y] = l > 0 \end{array}}$$

$l > 0$ dáno

$\boxed{\text{Úlohy ①}}$ zapadají do obecnější úlohy: nalézt $y \in X$ tak, že y je extremála (kritický bod) funkcionálu

$$\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$$

$$L : (a,b) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úlohy ②}}$ jsou úlohy typu: nalézt $\vec{y} \in X^s$ (tzn. $y_i \in X$, $i = 1,\dots,s$) tak, že $\vec{y}$ je extremála funkcionálu

$$\phi[\vec{y}] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, \vec{y}(t), \dot{\vec{y}}(t))\,dt$$

$$L : (t_1,t_2) \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Úloha ③}}$ patří mezi úlohy: nalézt $u \in X$ tak, že u je extremála

$$\Psi[u] = \int_\Omega L(x, u(x), \nabla u(x))\,dx$$

$$L : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \quad , \Omega \subset \mathbb{R}^d.$$

$\boxed{\text{Úloha ④}}$ je úloha typu ① s podmínkou, že jiný funkcionál $\Xi[y] = 0$ (omezení). vazba

$\boxed{\text{Teorie}}$

Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ <u>lineární (vektorový)</u> ~~pro~~ prostor, který je normovaný a úplný $\equiv$ <u>X je Banachův</u>

$\ulcorner$ • dim X, kde X je prostor funkcí, je nekonečno.
• $C^\infty((a,b)) \subset C^2((a,b)) \subset C((a,b))$ a C^∞ obsahují polynomy libovolného stupně $\{1, x, x^2, \dots, x^k \dots\}$ $\Rightarrow$ dimenze těchto prostorů je ∞. $\lrcorner$

<u>Def.</u> Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 <u>lokální</u> $\left\{\begin{matrix} \text{maximum} \\ \text{minimum} \end{matrix}\right\}$

$$\overset{df}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) := \{x \in X;\ \|x - x_0\|_X < \delta\} \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix}\right\} \phi(x)$$
$$\forall x \in U_\delta(x_0).$$

Řekneme, že ϕ nabývá v x_0 <u>ostré lokální</u> $\left\{\begin{matrix} \text{maximum} \\ \text{minimum} \end{matrix}\right\}$

$$\overset{df}{\equiv} \exists\, U_\delta(x_0) \text{ tak, že } \phi(x_0) \left\{\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}\right\} \phi(x) \text{ pro všechna } x \in P_\delta(x_0)$$
$$P_\delta(x_0) := \{x \in X;\ 0 < \|x - x_0\|_X < \delta\}$$

<u>Def.</u> Řekneme, že <u>$\phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 derivaci Gateaux ve směru $h \in X$</u> (neboli ϕ je v x_0 Gateauxovsky diferencovatelná v $h \in X$) pokud existuje

$$\lim_{t \to 0} \frac{\phi[x_0 + th] - \phi[x_0]}{t}.$$ Tuto limitu značíme $\delta\phi[x_0](h)$.

$\ulcorner$ Pozorujeme, že pro $g(t) := \phi(x_0 + th)$ lze $\delta\phi[x_0](h)$ zapsat ekvivalentně ve tvaru

$$\delta\phi[x_0](h) = \lim \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0}$$

Tedy derivování v X ∞-dimenze je redukováno na derivování funkce jedné reálné proměnné.

Věta 1 (Nutná podmínka existence extremály)

Nechť $\phi : X \to \mathbb{R}$ má v x_0 extremálu a

nechť $\delta\phi[x_0](h)$ existuje pro každé $h \in X$.

Pak

$$\boxed{\delta\phi[x_0](h) = 0 \quad \forall h \in X}$$

Dk: Buď $h \in X$ libovolné, ale pevné. Zadefinujme fci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jako výše, tedy

$$g(t) := \phi(x_0 + th)$$

[Všimněme si, že $x_0 + th \in X$ díky linearity prostoru X]

Pak z předpokladů plyne, že

- g má v 0 extrém
- $g'(0)$ existuje.

Tedy dle věty z 1. roč. (nutná podmínka existence extrému fce reálné proměnné) je však $g'(0) = 0$, což však znamená, že

$$\delta\phi[x_0](h) = 0.$$

Protože h bylo zvoleno libovolně, tvrzení je dokázáno. ▨

Uvažujme dále

$$\Phi[y] := \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\, dx$$

a řešme úlohu variačního počtu:

$$\boxed{\text{Nalézt } y_{min} \in X^i \text{ tak, že } \Phi[y_{min}] = \min_{Y \in X^i} \Phi[Y] \qquad i = 1, 2, 3}$$

kde pro $Z = C^1((a,b)) \cap C(\langle a,b \rangle)$:

$$X^1 = \{z \in Z;\ z(a) = A,\ z(b) = B\}$$

$$X^2 = \{z \in Z;\ z(a) = A\}$$

$$X^3 = \{z \in Z\} = Z.$$

$\boxed{\text{Příklady}}$ (a) Úlohy v Příkladu (1) s funkcionálem délky křivky, kde

$$L(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$$

(b) V Příkladu (1) také

$$L(\varphi, r, r') = \sqrt{r^2 + (r')^2}$$

(c) Úloha o brachystochroně

χρονος – čas

βραχιστος – nejkratší

Natáhnout drátek mezi dvěma body (např. $[0,0]$ a $[a,b]$, $a, b > 0$) tak, aby korálek navlečený na drátek v bodě $[a,b]$ dorazil do počátku v nejkratším čase

Galileo Galilei (1637): otázka, zda lze najít natažení, po kterém se korálek dostane do počátku rychleji než po "přímce" spojující $[0,0]$ a $[a,b]$.

Johann Bernoulli (1.1.1697) předložil vědecké komunitě výzvu formou následujícího oznámení:

„Já, Johann Bernoulli, si dovoluji pozdravit nejchytřejší matematiky z celého světa. Nic nemůže být přitažlivější inteligentním lidem než čestný, vyzývavý a podnětný problém, jehož řešení přinese věhlas a slávu a zůstane navždy trvalým monumentálním dílem.

Následujíce příklady položené Pascalem, Fermatem a jinými, doufám, že získám ocenění celé vědecké komunity tím, že před ty nejlepší matematiky naší doby položím problém, který prověří jejich metody a sílu jejich intelektu. Pokud mi někdo předloží řešení navrženého problému, veřejně ho prohlásím za hodna výtečného ocenění a chvály."

Minimalizovat $T[y]$ přes $y \in C^1((0,a)) \cap C([0,a])$

$y(0)=0\,,\ y(a)=b$

kde

$$T[y] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \sqrt{\frac{1+(y'(x))^2}{b-y(x)}}\, dx \qquad \text{(DÚ, cvičení)}$$

Tedy

$$L(x,y,y') = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2g(b-y)}}$$

F Úloha o brachystochroně je podobná jiné úloze z optiky:

V dokonale průhledném prostředí s proměnným indexem lomu jsou dány dva body A a B.

Cíl: určit trajektorii světelného paprsku jdoucího z A do B.

Fermatův princip říká, že ze všech křivek spojujících A a B je trajektorie světelného paprsku ta, po které dospěje světlo z A do B v nejkratším čase.

Pro $\Phi[y] = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))\,dx$ chceme spočítat $\delta\Phi[y](h)$ a nalézt charakterizaci (tj. ekvivalentní popis) podmínky $\delta\Phi[y](h) = 0$ pro $\forall h \in X$ z Věty 1.

Protože $\delta\Phi[y](h) = g'(0) = \frac{d}{dt} g(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$,

linearita prostoru X je nutná, aby $y+th$ pro t libovolné zůstávalo v prostoru, kde hledám řešení. Zatímco prostor X^3 ze strany 7 je lineární, prostory X^1 a X^2 lineární obecně nejsou! (jen pro $A=B=0$)

Pro $i=1,2$ hledáme y ve tvaru $y_0 + \xi$, kde y_0 je nějaká (jednoduchá, hladká) funkce splňující $y_0(a) = A$ a $y_0(b) = B$ pro $i=1$ a $y_0(a) = A$ pro $i=2$.

Pro $i=1,2$ pak přepíšeme minimalizační úlohu do tvaru

nalézt $y_{min} \in X^i$ tak, že $\Phi[y_{min}] = \min_{\xi \in X_0^i} \Phi[y_0+\xi]$,

kde $X_0^1 = \{z \in Z;\ z(a) = z(b) = 0\}$

a $X_0^2 = \{z \in Z;\ z(a) = 0\}$.

Spočteme nyní pro libovolné $h \in X_0^i$ (pro $i=3$ $X_0^3 = X^3 = Z$)

$$\delta\Phi[y](h) = \delta\Phi[\overbrace{y_0+\xi}^{y}](h) = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$$

Máme

$$\delta\Phi[y](h) = \frac{d}{dt}\Phi[y+th]\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt}\int_a^b L(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x))\,dx\Big|_{t=0}$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\left\{L(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x))\right\} dx \Big|_{t=0}$$

$\frac{d}{dt}\int_a^b \dots dt \overset{?}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} \dots dt$

záměna derivace a integrace

$$= \int_a^b \Big[\frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x))\,h(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x)+th(x), y'(x)+th'(x))\,h'(x)\Big]dx\Big|_{t=0}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}(x,y(x),y'(x))\,h'(x) + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y(x),y'(x))\,h(x)\,dx$$

zde bychom mohli výpočet ukončit. My však upravíme první výraz integrací per partes na tvar $\int_a^b g(x)h(x)$

$$= \int_a^b \left\{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y(x),y'(x))\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y(x),y'(x))\right\}h(x)\,dx + \left[\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y(x),y'(x))\,h(x)\right]_a^b$$

Poslední člen
$$\begin{cases} = 0 \quad \text{pro } \boxed{i=1} \text{ neboť pro } h\in X_0^1 \text{ platí } h(a)=h(b)=0; \\ = \frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))\,h(b) \quad \text{pro } \boxed{i=2} \text{ neboť } h(a)=0; \\ = \frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))\,h(b) - \frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))\,h(a) \quad \text{pro } \boxed{i=3} \end{cases}$$

K charakterizaci podmínky $\boxed{\delta\Phi[y](h) = 0 \text{ pro } \forall h\in X_0^i}$ využijeme následující fundamentální lemma variačního počtu.

Lemma Buď $f \in C(\langle a,b\rangle)$ splňující $\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0$ pro všechna $h \in [C(\langle a,b\rangle)]_0 = \{z \in C(\langle a,b\rangle);\ z(a)=z(b)=0\}$.

Pak $f \equiv 0$.

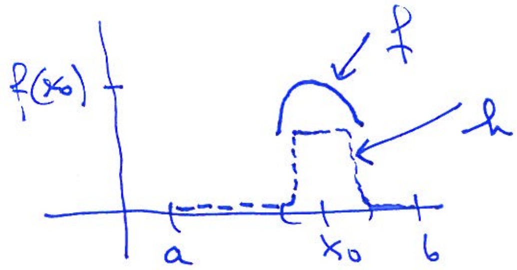
Poznámky 1) Lemma zobecňuje tvrzení: $\vec{a} \in \mathbb{R}^s$ splňující $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ pro libovolné $\vec{b} \in \mathbb{R}^s$ je nutně nulový vektor.

Dk Vol $\vec{b} = \vec{a}$, pak $|\vec{a}|^2 = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$. □

2) Kdyby ve znění lemmatu bylo „$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = 0$ pro $h \in C(\langle a,b\rangle)$", pak by opět stačilo vzít $h = f$ a z $\int_a^b f^2(x)\,dx$ plyne $f \equiv 0$.

Dk Lemmy Sporem. Nechť $\exists x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0) \neq 0$. BÚNO $f(x_0) > 0$. Ze spojitosti f plyne existence $U_\delta(x_0)$ tak, že $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ na $U_\delta(x_0)$, viz obrázek. Volme h jako na obrázku, pak

$$\int_a^b f(x)h(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)h(x)\,dx > 0,$$ což je ↯ □



Věta 2 (Charakterizace podmínky „$\delta\Phi[y](h) = 0$ pro $\forall h \in X_0^i$"; vztah variačního počtu a řešení ODR)

$y \in X^i$ splňuje $\delta\Phi[y](h)=0$ pro $\forall h \in X_0^i$ $\iff$ $y \in X^i$ řeší

$$\boxed{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0}$$

a navíc pro $i=2$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b)) = 0$

a pro $i=3$ $\quad \frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a)) = \frac{\partial L}{\partial y}(b,y(b),y'(b)) = 0$

Tato rovnice se nazývá $\boxed{\text{Euler-Lagrangeova rovnice}}$ (E-L) funkcionálu Φ

Dk „$\Leftarrow$" plyne z výpočtu na straně 9 a 10 použitím dosazením.

„$\Rightarrow$" z výpočtu na str. 9 a 10 plyne, že

$$0 = \delta\Phi[y](h) = 0 \text{ pro } h \in X_0^i \text{ implikuje}$$

$$(*) \quad \begin{cases} 0 = \int_a^b \left\{\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y')\right\} h(x) \\ \quad + \frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))h(b) - \frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))h(a) \end{cases}$$

pro $h \in X_0^i$

ZA PŘEDPOKLADU

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') \in C([a,b])$$

a volbou $h \in X_0^1 \subsetneq X_0^2 \subseteq X_0^3 = X^3$, plyne z (*) a fundamentálního lemmatu Euler-Lagr. rovnice, tj.:

$$\left(-\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y,y')\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') = 0.$$

Pro $i=1$ je tvrzení dokázáno. Pro $i=2$ nebo 3, dosadíme (E-L) do (*) a dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))\,h(b)=0 \qquad \forall h\in X_0^2\subset X^3$$

což implikuje

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(b,y(b),y'(b))=0.$$

Dosadíme-li pro $i=3$ výše uvedenou podmínku a (E-L) do (*) dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))\,h(a)=0 \qquad \text{pro } \forall h\in X_3,$$

což implikuje

$$\frac{\partial L}{\partial y'}(a,y(a),y'(a))=0.$$

Věta 2 je tak dokázána. ∎

POZOROVÁNÍ (důležitá)

(1) Pokud L nezávisí explicitně na y, pak plyne z (E-L):

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y'(x)) = \text{const.}}$$

(2) Pokud L nezávisí explicitně na x, pak

$$(***) \qquad \boxed{L(y,y') - \frac{\partial L}{\partial y}(y,y')\,y' = \text{const.}}$$

Dk: Derivuj (***) vzhledem k x. Pak

$$\left(L(\dots)-\frac{\partial L}{\partial y}(\dots)\,y'\right)' = \frac{\partial L}{\partial y}(\dots)\,y' + \frac{\partial L}{\partial y'}(\dots)\,y'' - \frac{\partial L}{\partial y}(\dots)\,y'' + \left(-\frac{\partial L}{\partial y}(\dots)\right)' y'$$

$$= \left\{\left(-\frac{\partial L}{\partial y}(\dots)\right)' + \frac{\partial L}{\partial y}(\dots)\right\} y' \underset{\text{(E-L)}}{=} 0 \qquad ∎$$