

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně, ale co nejpřesněji odůvodněte. Pokud používáte nějaké tvrzení, nezapomeňte ověřit splnění předpokladů.

Jméno a příjmení: _____

Skupina: _____

Příklad	1	2	3	4	5	Celkem bodů
Bodů	40	10	10	20	20	100
Získáno						

[40] 1. Ukažte, že integrál

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$$

existuje jako Lebesgueův integrál (a je konečný). Vhodným zavedním parametru spočítejte hodnotu tohoto integrálu pomocí věty o záměně derivace a integrálu. (Případně jinak.)

Může se vám hodit:

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - x + C, \\ \int \ln(b^2 + x^2) dx &= x \ln(b^2 + x^2) - 2x + 2b \arctan\left(\frac{x}{b}\right) + C, \\ \int \sin(\ln x) dx &= \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C, \\ \int (\sin^n x) e^{ax} dx &= \frac{e^{ax} \sin^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \sin x - n \cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int (\sin^{n-2} x) e^{ax} dx, \\ \int (\cos^n x) e^{ax} dx &= \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x}{a^2 + n^2} (a \cos x + n \sin x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int (\cos^{n-2} x) e^{ax} dx, \\ \frac{24}{a(a^2 + 16)(a^2 + 4)} &= \frac{3}{8a} - \frac{2}{8} \frac{a}{a^2 + 4} + \frac{1}{8} \frac{a}{a^2 + 16}. \end{aligned}$$

Řešení:

Integrál zjevně existuje jako Lebesgueův integrál. Platí totiž

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^4 x}{x^2} = 0$$

a dále (pro $x > 1$)

$$\left| \frac{\sin^4 x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Prvně jmenovanou rovnost využijeme při analýze chování integrálu v blízkosti nuly, druhou rovnost využijeme při zkoumání chování v nekonečnu. (Pamatujeme si, že $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ existuje jako Lebesgueův integrál.)

Pokusíme se integrál spočítat zavedením vhodného parametru. Cílem je zbavit se funkce x^2 ve jmenovateli zlomku. První nápad může být zkoumat integrál

$$I(b) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-bx^2} dx.$$

Derivací podle parametru b bychom ovšem získali

$$\frac{dI}{db} = - \int_0^{+\infty} (\sin^4 x) e^{-bx^2} dx,$$

což bohužel vede na integrál, který neumíme jednoduše vyčíslit. Zkusme proto jiný postup, motivovaný kupříkladu čtvrtou nápodědou. Definujme

$$I(a) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-ax} dx.$$

Pak je

$$\frac{dI}{da} = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x} e^{-ax} dx,$$

a dále

$$\frac{d^2 I}{da^2} = \int_0^{+\infty} (\sin^4 x) e^{-ax} dx.$$

Vše bude pravděpodobně dobře fungovat pokud $a > 0$ a lze doufat, že je možné provést limitní přechod $a \rightarrow 0+$. Posledně jmenovaný integrál lze spočítat podle nápovědy. Jest

$$\int_0^{+\infty} (\sin^4 x) e^{-ax} dx = \frac{24}{a(a^2 + 16)(a^2 + 4)}.$$

Abychom získali explicitní vzorec pro funkci $I(a)$, musíme tedy vyřešit diferenciální rovnici

$$\frac{d^2 I}{da^2} = \frac{24}{a(a^2 + 16)(a^2 + 4)}.$$

Rozkladem v parciální zlomky (použijeme nápovědu) získáme

$$\int \frac{24}{a(a^2 + 16)(a^2 + 4)} da = \int \left(\frac{3}{8a} - \frac{2}{8} \frac{a}{a^2 + 4} + \frac{1}{8} \frac{a}{a^2 + 16} \right) da = \frac{3}{8} \ln a - \frac{1}{4} \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{16} \ln(a^2 + 16) + C.$$

Jest tedy

$$\frac{dI}{da} = \frac{3}{8} \ln a - \frac{1}{4} \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{16} \ln(a^2 + 16) + C,$$

a další integrace (s použitím nápovědy) okamžitě vede na

$$I(a) = \frac{3}{8} a \ln a + \frac{1}{16} a \ln(a^2 + 16) - \frac{1}{4} a \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{4} - \arctan \frac{a}{2} + Ca + D,$$

kde C a D jsou integrační konstanty.

Ověřme nyní platnost provedených operací. Chceme použít větu o záměně derivace a intergrálu, která říká:

Bud' $f(x, b) : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$, kde $I \subset \mathbb{R}$ a $J \subset \mathbb{R}$. Nechť platí

- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné b je diferencovatelná pro skoro všechna $x \in I$.
- Funkce $f(x, b)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky měřitelná pro všechna $b \in J$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ taková, že pro skoro všechna $b \in J$ platí $|\frac{d}{db} f(x, b)| \leq g(x)$.
- Existuje $b_0 \in J$ tak, že funkce $f(x, b_0)$ jakožto funkce proměnné x je lebesgueovsky integrovatelná na I .

Pak je pro každé $b \in J$ funkce $f(x, b)$, jakožto funkce x , lebesgueovsky integrovatelná na I , funkce

$$F(b) = \int_I f(x, b) dx$$

je diferencovatelná na I a platí

$$\frac{dF}{db} = \int_I \frac{d}{db} f(x, b) dx.$$

Připomeňme si, že se zajímáme o integrál

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-ax} dx.$$

Funkce $f(x, a) =_{\text{def}} \frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-ax}$ je pro $a \in (\varepsilon, +\infty)$, kde $\varepsilon > 0$ je libovolné ale pevné kladné reálné číslo, nepochybně diferencovatelná funkce vzhledem k proměnné a a pro jakoukoliv hodnotu parametru a je to spojitá a tudíž měřitelná funkce proměnné x na intervalu $(0, +\infty)$. V okolí nekonečna platí odhad

$$\left| \frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-ax} \right| \leq e^{-\varepsilon x},$$

a $I(a)$ tudíž existuje dokonce pro všechny hodnoty parametru $a \in (\varepsilon, +\infty)$. (Okolí nuly nepředstavuje pro existenci integrálu problém, integrand lze spojitě dodefinovat na intervalu $[0, +\infty)$, viz výše.)

Zbývá najít integrovatelnou majorantu pro derivaci $\frac{df}{da}$, což je ovšem snadné

$$\left| \frac{df}{da} \right| = \left| \frac{\sin^4 x}{x} e^{-ax} \right| = \left| \frac{\sin x}{x} (\sin^3 x) e^{-ax} \right| \leq e^{-ax} \leq e^{-\varepsilon x}.$$

Lze tudíž provést první záměnu derivace a integrálu, pro $a \in (\varepsilon, +\infty)$ tudíž skutečně platí

$$\frac{dI}{da} = - \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x} e^{-ax} dx.$$

V předchozím rutinním výpočtu jsme však potřebovali spočíst druhou derivaci $\frac{d^2I}{da^2}$, přičemž výpočet byl opět založen na záměně derivace a integrálu. Musíme proto znovu ověřit podmínky věty o záměně derivace a integrálu, tentokrát pro integrál $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x} e^{-ax} dx$. Integrovatelnou majorantu pro derivaci najdeme kupříkladu takto

$$|(\sin^4 x) e^{-ax}| \leq e^{-ax} \leq e^{-\varepsilon x}.$$

Ostatní podmínky věty o záměně derivace a integrálu jsou zjevně splněny, což lze nahlédnout drobnou úpravou argumentace z předchozího použití téže věty. Platí tedy

$$\frac{d^2I}{da^2} = \frac{24}{a(a^2 + 16)(a^2 + 4)}$$

a následně tedy

$$I(a) = \frac{3}{8} a \ln a + \frac{1}{16} a \ln(a^2 + 16) - \frac{1}{4} a \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{4} - \arctan \frac{a}{2} + Ca + D.$$

Zbývá určit integrační konstanty C a D . To provedeme pomocí limitního přechodu. Platí

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{dI}{da} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{8} \ln a - \frac{1}{4} \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{16} \ln(a^2 + 16) + C \right] = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(\frac{(a^2 + 16)^{\frac{1}{16}}}{(a^2 + 4)^{\frac{1}{4}}} a^{\frac{3}{8}} \right) + C \right] = C,$$

na druhou stranu ovšem platí (pokud lze zaměnit limitu a integrál, což se nám snad podaří ověřit později)

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{dI}{da} = - \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x} e^{-ax} dx = - \int_0^{+\infty} \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\sin^4 x}{x} e^{-ax} dx = 0.$$

Zjevně tedy musí být $C = 0$.

Dále platí

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow +\infty} I &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{8} a \ln a - \frac{1}{4} a \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{16} a \ln(a^2 + 16) + \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{4} - \arctan \frac{a}{2} + D \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[a \ln \left(\frac{(a^2 + 16)^{\frac{1}{16}}}{(a^2 + 4)^{\frac{1}{4}}} a^{\frac{3}{8}} \right) + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + D \right] \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\ln \left\{ \frac{(1 + \frac{16}{a^2})^{\frac{a^2}{16} \frac{1}{a}}}{(1 + \frac{4}{a^2})^{\frac{a^2}{4} \frac{1}{a}}} \right\} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + D \right] = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} + D, \end{aligned}$$

na druhou stranu ovšem platí (pokud lze zaměnit limitu a integrál, což se nám snad podaří ověřit později)

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} I = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-ax} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-ax} dx = 0,$$

a je tedy nutné, aby $D = \frac{\pi}{4}$. Celkem tedy

$$I(a) = \frac{3}{8} a \ln a + \frac{1}{16} a \ln(a^2 + 16) - \frac{1}{4} a \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{4} - \arctan \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Zbývá odůvodnit platnost záměny limity a integrálu. To provedeme kupříkladu pomocí Leviho věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost lebesgueovskými integrovatelnými funkcemi na množině M .

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ zdola k funkci f , aneb pro skoro všechna $x \in M$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g , taková, že pro skoro všechna $x \in M$ platí $g \leq f_1$ a $\int_M g \, dx > -\infty$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M .
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M f_n(x) \, dx = \int_M \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \, dx = \int_M f(x) \, dx.$$

Poznámka: Obdobně lze zformulovat větu pro posloupnost, která konverguje shora. Lebesgueovskou integrovatelností funkce h se v tomto případě rozumí, že je konečný alespoň jeden z Lebesgueových integrálů z h^+ a h^- . Aneb jako lebesgueovsky integrovatelné funkce zde chápeme i funkce, které mají nekonečný Lebesgueův integrál.

Zjevně platí, že pro $a \rightarrow +\infty$ máme

$$\frac{\sin^4 x}{x} e^{-ax} \searrow 0,$$

$$\frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-ax} \searrow 0,$$

a ověření ostatní podmínky Leviho věty je snadné. (Použili jsme Leviho větu pro posloupnosti, což je ale vzhledem k Heineho větě totéž jako kdybychom zkoumali limitu funkce.) Kromě Leviho věty by nám samozřejmě stejně dobře posloužila, pro $a \in (\varepsilon, +\infty)$, i Lebesgueova věta.

Nyní je na čase učinit poslední krok a sice použít rovnost

$$I(a) = \frac{3}{8} a \ln a + \frac{1}{16} a \ln(a^2 + 16) - \frac{1}{4} a \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{4} - \arctan \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4},$$

která platí pro každé $a > 0$, k výpočtu hodnoty integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} \, dx.$$

To provedeme záměnou limity a integrálu, jest

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-ax} \, dx = \int_0^\infty \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-ax} \, dx = \int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} \, dx,$$

přičemž z explicitního vzorce pro I plyne, že

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} I = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{8} a \ln a + \frac{1}{16} a \ln(a^2 + 16) - \frac{1}{4} a \ln(a^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan \frac{a}{4} - \arctan \frac{a}{2} + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{4}.$$

Je tudíž

$$\int_0^\infty \frac{\sin^4 x}{x^2} \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

Záměnu limity a integrálu odůvodníme například podle Lebesgueovy věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M .
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ k funkci f , aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g , taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro skoro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M .

- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M f_n(x) dx = \int_M \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_M f(x) dx.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f .

Integrovatelnou majorantou je kupříkladu funkce $\frac{\sin^4 x}{x^2}$, neboť pro $a \in (0, +\infty)$ a $x \in (0, +\infty)$ platí

$$\frac{\sin^4 x}{x^2} e^{-ax} \leq \frac{\sin^4 x}{x^2}.$$

(Použili jsme Lebesgueovu větu pro posloupnosti, což je ale vzhledem k Heineho větě totéž jako kdybychom zkoumali limitu funkce.)

[10] 2. Spočítejte limitu

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx} e^{-x^2} dx.$$

Použijete-li při výpočtu nějakou větu, pečlivě odůvodněte, že jsou splněny příslušné předpoklady.

Řešení:

Povšimneme si, že integrál je dobře definován (existuje a je konečný) pro libovolné n . Chování v nekonečnu je jasné, v okolí nuly využijeme znalosti limity

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+nx)}{nx} = 1.$$

Zjevně platí, že

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx} e^{-x^2} = 0.$$

Pokud tedy ukážeme, že je možné zaměnit limitu a integrál, můžeme snadno spočítat původní limitu,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+nx)}{nx} e^{-x^2} \right) dx = 0.$$

Záměnu limity a integrálu lze odůvodnit například podle Lebesgueovy věty, která říká:

Nechť platí:

- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ je posloupnost měřitelných funkcí na množině M .
- Posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konverguje pro skoro všechna $x \in M$ k funkci f , aneb pro skoro všechna $x \in M$ platí $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$.
- Existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce g , taková, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ pro skoro všechna $x \in M$ platí $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Pak platí:

- Funkce f lebesgueovsky integrovatelná funkce na množině M .
- Lze zaměnit limitu a integrál,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_M f_n(x) dx = \int_M \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_M f(x) dx.$$

Funkce g se nazývá integrovatelná majoranta funkce f .

Posloupnost f_n je v našem případě tvořena funkcemi

$$f_n(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln(1+nx)}{nx} e^{-x^2}.$$

Tyto funkce jsou na intervalu $M = (0, +\infty)$ spojitě a tudíž měřitelné. První předpoklad Lebesgueovy věty je tedy splněn.

Druhý předpoklad je rovněž splněn, limitu jsme spočetli pro libovolné $x \in M$.

Zbývá najít integrovatelnou majorantu. (Třetí předpoklad Lebesgueovy věty.) Pro libovolné n platí

$$\frac{\ln(1+nx)}{nx} e^{-x^2} \leq e^{-x^2},$$

kde funkce e^{-x^2} je lebesgueovsky integrovatelná na M . (Pro $x > 1$ je $e^{-x^2} < e^{-x}$ a funkce e^{-x} je lebesgueovsky integrovatelná.) Nerovnost $\frac{\ln(1+y)}{y} \leq 1$ odůvodníme například z konkávnosti funkce $\ln(1+y)$. V Lebesgueově větě stačí tedy volit

$$g(x) =_{\text{def}} e^{-x^2}.$$

Všechny předpoklady Lebesgueovy věty jsou splněny a lze proto provést záměnu limity a integrálu.

[10] 3. Spočítejte objem tělesa M v \mathbb{R}^3 vymezeného plochami

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ x &= a, \\ y &= 0, \\ y &= b, \\ z &= 0, \\ z &= \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}, \end{aligned}$$

kde $a, b, p, q \in \mathbb{R}^+$ jsou parametry.

Řešení:

Těleso, jehož objem zkoumáme je zjevně “kvádr” jehož dolní podstava je tvořena obdélníkem $[0, a] \times [0, b]$ v rovině $z = 0$ a horní “křivá podstava” je popsána rovnicí $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$. Přímočaré použití Fubiniho věty dává

$$\begin{aligned} \int_M d\lambda &= \int_{x=0}^a \left[\int_{y=0}^b \left(\int_{z=0}^{\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}} dz \right) dy \right] dx = \int_{x=0}^a \left[\int_{y=0}^b \left(\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \right) dy \right] dx \\ &= \int_{x=0}^a \left[\left[\frac{x^2 y}{2p} + \frac{y^3}{6q} \right]_{y=0}^b \right] dx = \int_{x=0}^a \left[\frac{x^2 b}{2p} + \frac{b^3}{6q} \right] dx = \left[\frac{x^3 b}{6p} + \frac{x b^3}{6q} \right]_{x=0}^a = \frac{a^3 b}{6p} + \frac{a b^3}{6q} = \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{p} + \frac{b^2}{q} \right). \end{aligned}$$

[20] 4. Spočítejte integrál

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}} d\lambda,$$

kde $M \subset \mathbb{R}^2$ je množina definovaná vztahem

$$M =_{\text{def}} \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right)^2 \leq x^2 y \right\}.$$

(Zápis $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}} d\lambda$ je jen jiné značení pro $\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}} dx dy$.)

Řešení:

Implicitně zadaná křivka

$$\left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right)^2 = x^2 y,$$

která tvoří hranici množiny M zjevně leží v horní polorovině ($y \geq 0$) a prochází bodem $\mathbf{x} = [0, 0]$. Tato křivka je dále symetrická vůči svislé ose $x = 0$, aneb leží-li bod $[x, y]$ na křivce, pak na křivce leží i bod $[-x, y]$. Křivka protíná

osu $x = 0$ pouze v bodě $\mathbf{x} = [0, 0]$. Zavedeme-li “polární” souřadnice vztahem

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r\sqrt{3} \sin \varphi,\end{aligned}$$

vidíme, že implicitní rovnice pro křivku přejde na rovnici

$$r^4 = r^3\sqrt{3} \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

Pro daný úhel φ má tato rovnice jediné řešení, a sice

$$r = \sqrt{3} \cos^2 \varphi \sin \varphi.$$

Z dosud provedených úvah je zřejmé, že křivka musí kvalitativně odpovídat křivce načrtnuté na Obrázku 1.

Použijeme-li “polární” souřadnice navržené výše, je jasné, že determinant Jacobiho matice je

$$\det \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sqrt{3} \sin \varphi & r\sqrt{3} \cos \varphi \end{bmatrix} = r\sqrt{3}.$$

Vzhledem k symetrii množiny M a integrandu $\frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}}$ můžeme výpočet provést pouze v prvním kvadrantu a výsledek pak vynásobit dvěma. Celkem

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{y^2}{3}}} d\lambda = 2 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{r=0}^{\sqrt{3} \cos^2 \varphi \sin \varphi} \frac{1}{r} r\sqrt{3} dr \right) d\varphi = 6 \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi = -6 \left[\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

[20] 5. Spočítejte plošný obsah množiny M v \mathbb{R}^2 vymezené křivkami

$$\begin{aligned}x^2 &= py, \\x^2 &= qy, \\y &= ax, \\y &= bx,\end{aligned}$$

kde $a, b, p, q \in \mathbb{R}^+$ jsou parametry takové, že $a > b$, $p > q$.

Řešení:

Povšimneme si, že výraz $\frac{x^2}{y}$ je pro všechna $[x, y] \in M$ v rozmezí $[q, p]$, zatímco výraz $\frac{y}{x}$ je pro všechna $[x, y] \in M$ v rozmezí $[b, a]$. To poskytuje návod pro nalezení transformace, která množinu M převede na “obdélník”, viz Obrázek 2. Volme tedy

$$\begin{aligned}u &= \frac{x^2}{y}, \\v &= \frac{y}{x},\end{aligned}$$

kde $u \in (q, p)$, $v \in (b, a)$. Obrácená transformace je

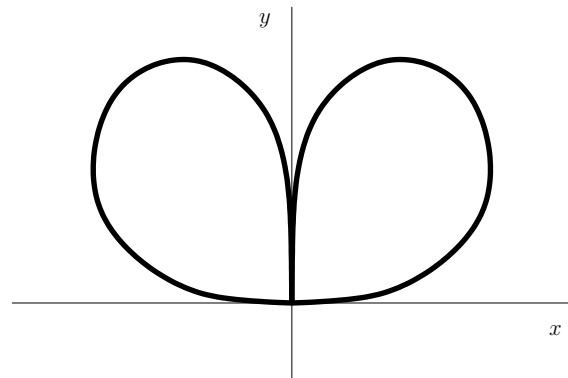
$$\begin{aligned}x &= uv, \\y &= uv^2.\end{aligned}$$

Volíme-li $[u, v] \in (q, p) \times (b, a)$, pak tato transformace skutečně převádí obdélník $(q, p) \times (b, a) \subset \mathbb{R}^2$ na množinu M . K výpočtu plošného obsahu množiny M proto využijeme větu o substituci a Fubiniho větu. Determinant Jacobiho matice je

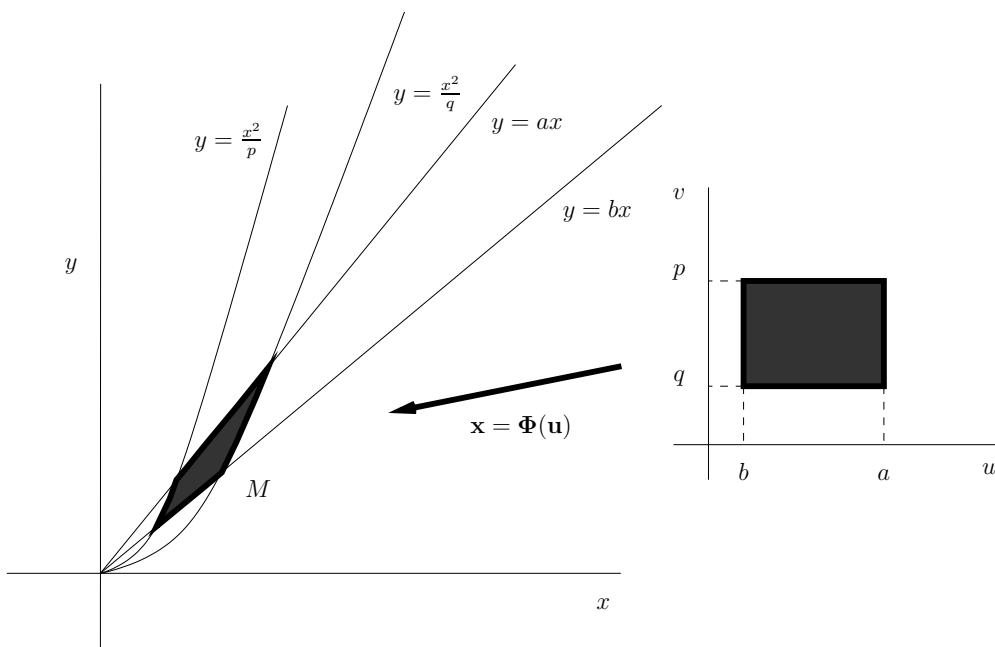
$$\det \begin{bmatrix} v & u \\ v^2 & 2uv \end{bmatrix} = uv^2.$$

Platí tedy

$$\int_M d\lambda = \int_{u=q}^p \left(\int_{v=b}^a uv^2 dv \right) du = \int_{u=q}^p u \frac{a^3 - b^3}{3} du = \frac{1}{6} (p^2 - q^2) (a^3 - b^3).$$



Obrázek 1: Kvalitativní náčrtek křivky zadané implicitní rovnicí $\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2y$.



Obrázek 2: Množina M a její transformace na obdélník.