3. TEORIE DISTRIBUCÍ

Na konci 20. let minulého století Paul Dirac zavedl, při bádání v oblasti kvantové mechaniky, tzv. δ-funkci, která má tyto vlastnosti:

(D1) • $\delta(x) = 0$ pro $x \neq 0$

(D2) • $\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0)$ pro libovolnou spojitou fci φ.

Víme z teorie Lebesgueova integrálu, že δ nemůže být (lokálně) integrovatelná funkce, neboť z druhé podmínky pro $\varphi \equiv 1$ plyne

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx,$$

přičemž z první podmínky plyne

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\,dx = 0.$$

Trvalo několik let než se matematikům podařilo najít přístup, který dá δ-funkci, vnímané jako lineární spojitý funkcionál definovaný na prostoru hladkých funkcí, přesný matematický význam.

Matematická teorie, která na tyto otázky odpovídá, se nazývá teorie distribucí.

(ČI SYMBOLICKÉ)

NEBOLI

3.1. FUNKCE A ZOBECNĚNÉ FUNKCE (DISTRIBUCE)

Distribuce zobecňují pojem funkce tak, abychom mohli 'dobře' matematicky popsat pojmy jako hustota materiálového bodu, hustota bodového náboje či dipólu, intenzita bodového zdroje, velikost okamžité síly působící v bodě.

Distribuce také zachycují skutečnost, že ve skutečnosti je velice obtížné měřit např. teplotu v bodě a spíše měříme průměrné hodnoty v okolí a za hodnotu v bodě pak prohlásíme limitu průměrů.

Teorie distribucí byla vyvinuta Laurentem Schwartzem (Francie) a S.L. Sobolevem (SSSR). Pokusme se motivovat tuto teorii snahou porozumět významu distribuce náboje. Inženýři a fyzici vždy využívali různé typy distribuce náboje: bodový zdroj (náboj), čárový náboj, plošný náboj, objemový náboj, bodový dipól, plošná vrstva dipólů, atd. Pokusme se dát těmto termínům přesnější matematický význam.

Jak můžeme rozpoznat jaký (typ) druh distribuce náboje máme? Jediná možnost je provést experiment, který změří náboj. Přitom používáme zařízení, které nám zobrazí jakýsi průměr náboje v oblasti. Velikost oblasti závisí na kvalitě instrumentu (měřícího zařízení). Pokud chceme měřit bodový náboj musíme mít zařízení, které je schopné měřit náboj ve stále menší a menší oblasti obsahující bod našeho zájmu. I když zanedbáme kvantové jevy, ani teoreticky ani prakticky nemáme nástroj, který by měřil náboj přesně v bodě.

Tuto situaci lze popsat matematicky takto:
buď φ měřící zařízení a $Q(\varphi)$ hodnota náboje daná tímto zařízením φ.

Například, pokud existuje objemová hustota náboje $\rho = \rho(x)$,
$(\rho \in L^1)$ pak $Q(\varphi) := \int \rho(x)\varphi(x)\,dx$

Zřejmě $Q(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1 Q(\varphi_1) + \alpha_2 Q(\varphi_2)$
pro $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$
$\forall\, \varphi_1, \varphi_2$

neboli Q je <u>lineární funkcionál</u> na množině <u>měřících zařízení</u>

Prvky φ (doposud měřicí zařízení) budeme nazývat <u>testovací funkce</u>. Lze uvažovat spoustu variant pro prostory testovacích funkcí; níže zavedeme $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

<u>Lineární</u> <u>spojité</u> funkcionály na $\mathcal{D}(\Omega)$, viz funkcionál náboje Q výše, pak budeme nazývat <u>distribuce</u> či <u>zobecněné</u> nebo <u>symbolické</u> <u>funkce</u>.

Důvody proč budeme pracovat s $\mathcal{D}$ či $\mathcal{S}$ je několik.

<u>Matematika</u> :
- funkcionály na těchto prostorech budou mít dobré konvergenční vlastnosti
- třída distribucí bude "veliká"

<u>Fyzika</u> : měřicí zařízení (testovací funkce) je efektivní v místě měření a daleko od něj jsou hodnoty potlačeny.

$\boxed{\text{Definice}\ |\ \mathcal{D}(\Omega)}$ Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Řekneme, že $\varphi_k \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, píšeme $\boxed{\varphi_k \to \varphi \text{ v } \mathcal{D}}$, pokud $\exists K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní tak, že:

- $\operatorname{supp} \varphi_k \subset K$ pro každé $k \in \mathbb{N}$
- $\varphi_k \rightrightarrows \varphi$ v K a také $D^\alpha \varphi_k \rightrightarrows D^\alpha \varphi$ v K pro každý multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

Připomeň :
- $\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in \Omega ; \varphi(x) \neq 0\}}$ (uzávěr množiny bodů, kde je φ nenulová.)
- $D^\alpha \varphi(x) := \dfrac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$ $\quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$

$\boxed{\text{Definice}}$ (DISTRIBUCE) DISTRIBUCE nebo ZOBECNĚNÁ FUNKCE nebo SYMBOLICKÁ FUNKCE je <u>funkcionál T na $\mathcal{D}(\Omega)$</u>, <u>který je *lineární a spojitý*</u>, tzn: $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) splňuje

1) $T(\alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$ pro každé $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$), $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$
<u>LINEARITA</u>

2) $T(\varphi_k) \to 0$ pokud $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}$
<u>SPOJITOST</u>

Pozorování: Všimněme si, že z vlastností 1) a 2) plyne tvrzení:

$\boxed{\text{Pokud } \varphi_k \to \varphi \text{ v } \mathcal{D}(\Omega), \text{ pak } T(\varphi_k) \to T(\varphi).}$

Dk: Označme $\psi_k := \varphi_k - \varphi$. Pak $\psi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ dle předpokladu.

Z vlastnosti 2) plyne $T(\psi_k) \to 0$, což znamená $T(\varphi_k - \varphi) \to 0$.

Z vlastnosti 1) pak máme $T(\varphi_k) - T(\varphi) \to 0$ neboli $T(\varphi_k) \to T(\varphi)$.

POUČENÍ: U lineárních funkcionálů stačí zkoumat spojitost v 0.

Označení

- $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\Omega)$ je množina všech spojitých lineárních funkcionálů na $\mathcal{D}(\Omega)$.
  je množina všech distribucí
- Temperované distribuce = spojité lineární funkcionály na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
  $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ je množina všech temperovaných distribucí

PŘÍKLADY ① Integrovatelné funkce jsou distribuce. Buď $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tzn. $f \in L^1(K)$ pro každý kompakt $K \subset \Omega$.

Definujme $\boxed{T(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{pro libovolné } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}$

Ukážeme, že T je distribuce.

a) $T(\varphi) < \infty$ pro $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ neboť $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \overset{\varphi \text{ má nosič v nějakém } K}{=} \int_K f(x)\varphi(x)\,dx$

$\leq \max_{x\in\Omega} |\varphi(x)| \int_K |f(x)| < \infty$

b) T je lineární. $T(\alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \int_\Omega f(x)[\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x)]\,dx$

linearita integrálu $= \alpha_1 \int_\Omega f(x)\varphi_1(x)\,dx + \alpha_2 \int_\Omega f(x)\varphi_2(x)\,dx$

$= \alpha_1 T(\varphi_1) + \alpha_2 T(\varphi_2)$

c) T je spojité. Buď $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega)$ libovolná. Pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní tak, že $\varphi_k \rightrightarrows 0$ v K tzn. $\sup_{x\in\Omega} |\varphi_k(x)| \to 0$ pro $k \to \infty$.

Pak $|T(\varphi_k)| = \left|\int_\Omega f(x)\varphi_k(x)\,dx\right| = \left|\int_K f(x)\varphi_k(x)\,dx\right| \leq$

$$\underbrace{\int_K |f(x)||\varphi_k(x)|\,dx \le \underbrace{\sup_{x\in K}|\varphi_k(x)|}_{\to 0}\ \underbrace{\int_K |f(x)|\,dx}_{<+\infty}}_{0} \longrightarrow 0.$$

■

$\boxed{\text{Definice}}$ Distribuci T, kterou lze popsat ve tvaru $\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$, tzn.

$$\langle T,\varphi\rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

přičemž $f\in L^1_{loc}(\Omega)$, nazýváme <u>regulární distribuce</u>.

Př. (2) <u>Diracova distribuce</u> Buď $a\in\Omega$. Označme δ_a funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ definovaný $\delta_a(\varphi) := \varphi(a)$.

Speciálně $\delta(\varphi) := \delta_0(\varphi)$.

Ukážeme, že δ_a je distribuce.

a) $\delta_a(\varphi) = \varphi(a) < \infty$ pro libovolné $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

b) linearita. $\delta_a(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2) = \left(\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)\right)\Big|_{x=a}$

$$= \alpha_1\varphi_1(a)+\alpha_2\varphi_2(a) = \alpha_1\delta_a(\varphi_1)+\alpha_2\delta_a(\varphi_2).$$

c) spojitost. Buď $\{\varphi_k\}\subset\mathcal{D}(\Omega)$ libovolná splňující $\varphi_k\to 0$ v $\mathcal{D}$, pak speciálně

$$\varphi_k(a)\to 0 \quad (k\to\infty)$$

Tedy $\delta_a(\varphi_k) = \varphi_k(a) \to 0$.

Př. (3) <u>Funkce, jež mají integrál ve smyslu hlavní hodnoty, jsou distribuce.</u>

Lze definovat $\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\,dx$ předpisem $\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R}\frac{1}{x}\,dx\right]$

Vidíme, že zatímco $\frac{1}{x}\notin L^1(\mathbb{R})$, tak $\frac{1}{x}$ má integrál ve smyslu hlavní hodnoty a platí

(*) $$\text{v.p.}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_{-R}^{-\varepsilon} + \left[\ln x\right]_{\varepsilon}^{R} = 0$$

$\boxed{\text{v.p.}}$ je zkratka francouzského „valeur principale"; někdy se používá také PV pro anglické „principal value", či $\boxed{\text{p.v.}}$ místo v.p.

Definujme funkcionál $T_{v.p.\frac{1}{x}}$ předpisem

$$T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi) := v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx. \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ukážeme, že $T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi)$ je distribuce.

1) $\boxed{|T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi)| < \infty \quad \text{pro } \forall \varphi}$

Pro libovolné, pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\exists (k>0)$ supp $\varphi \subset \langle -K, K\rangle$.

Dk

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} + \int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-K}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} + \int_{\varepsilon}^{K}\frac{\varphi(0)}{x}\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-k}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\right]$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\varepsilon}^{K} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}\,dx\right]$$

$$=: I_1 + I_2 + I_3.$$

První člen I_1 je roven 0, dle (*), viz str 3/5 dole.

Dle Taylorova rozvoje s Lagrangeovým tvarem zbytku:

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \varphi'(\xi_x) \qquad \text{kde } \xi_x \in (x, 0)$$

Tedy $|I_2| \le \max_{\xi \in [-k,0]} |\varphi'(\xi)|\, K < \infty$

Člen $I_3 < \infty$ s použitím stejného argumentu

2) $\boxed{\text{Linearita}}$ $T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi)$ plyne z linearity $\int_{\mathbb{R}} \dots dx$.

3) $\boxed{\text{Spojitost}}$ Nechť $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}$. Speciálně

$$\varphi_k \rightrightarrows 0 \text{ a } \varphi_k' \rightrightarrows 0 \text{ na jistém } [-K, K] \quad K \in (0,\infty)$$

Pak, podobně jako v 1), máme

$$T_{v.p.\frac{1}{x}}(\varphi_k) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-k}^{-\varepsilon} \frac{\varphi_k(0)}{x} + \int_{\varepsilon}^{K}\frac{\varphi_k(0)}{x}\right] + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-k}^{\varepsilon} \varphi_k'(\xi_x)\,dx$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{K} \varphi_k'(\xi_x)\,dx.$$

Opět, první člen je nulový a zbylé dva odhadneme člena

$2K \max_{s\in[-k,k]} |\varphi_k'(s)|$, který konverguje k 0, neboť

$$\varphi_k' \rightrightarrows 0 \text{ v } [-K, K].$$

$\blacksquare$

Zavedli jsme pojem distribuce a ukázali, že Diracova δ-funkce je vlastně spojitý lineární funkcionál na $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ či $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Můžeme však lépe motivovat vlastnost (D2) δ-funkce? Pokusíme se o to?

Z úvodu do variačního počtu víme, že nutná podmínka existence minimizéru nějakého obecně nelineárního funkcionálu Φ je charakterizována podmínkou $g'(0)=0$, kde $g(t):=\Phi(u+t\varphi)$.

Víme také, že v případě, kdy

(VarP) $$\Phi(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)|\nabla u(x)|^2\,dx - \int_\Omega f(x)u(x)\,dx,$$

podmínka

$$g'(0)=0$$

implikuje

$(E\text{-}L)^\bullet_{PDR}$ $$\boxed{\int_\Omega a(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx - \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \quad \text{která platí pro } \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).}$$

[Proveďte!]

Zde $a:\Omega\to\mathbb{R}^+$ je hladká daná funkce, může být hladká, ale také jen omezená a měřitelná.

Ukázali jsme si, že za předpokladu, že f, a, u jsou hladké, $(E\text{-}L)^\bullet_{PDR}$ implikuje

$(E\text{-}L)_{PDR}$ $$\boxed{-\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = f \quad v\ \Omega}$$

Soustřeďme se nyní jen na druhý člen v $(E\text{-}L)^\bullet_{PDR}$, tj.

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad , \text{kde } \varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Zkusme spočítat

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)\varphi(x)\,dx \quad \text{pro } f_k(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|} & x\in B_{\frac{1}{k}}(0)\\ 0 & \text{jinak}\end{cases}$$

míra 1-koule v $\mathbb{R}^d$

Pak $\int_\Omega f_k(x)\,dx = 1 \quad \forall k\in\mathbb{N}$. (Předpokládáme, že $B_1(0)\subset\Omega$).

Navíc, pro libovolné pevné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f_k(x)\varphi(x)\,dx = \frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)}\varphi(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)}\varphi(0)\,dx + \underbrace{\frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)}\varphi(x)-\varphi(0)\,dx}_{=I}$$

$$= \varphi(0) + I$$

a

$$|I| \leq \frac{1}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\int_{B_{\frac{1}{k}}(0)} |\nabla\varphi(\xi_x)\cdot(x-0)| \leq \max_{s\in\overline{B_1(0)}}|\nabla\varphi(s)| \int_{B_{\frac{1}{k}}(0)}\frac{|x|}{|B_{\frac{1}{k}}(0)|}\,dx$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{k}}_{\downarrow\, 0}\ \underbrace{\max_{x\in\overline{B_1(0)}}|\nabla\varphi(x)|}_{<\infty} \longrightarrow 0 \text{ pro } k\to\infty.$$

Tedy

$$\lim_{k\to\infty}\int_\Omega f_k(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0).$$

Nyní jsme nejen motivovali podmínku (D2) ze strany 3/1, ale také jsme ukázali, že f_k vnímané jako regulární distribuce T_{f_k} (tzn. $T_{f_k}(\varphi) = \int_\Omega f_k(x)\varphi(x)$) splňují

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} T_{f_k}(\varphi) = \delta(\varphi) \quad \text{pro } \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)}$$

, kde δ je δ-distribuce definovaná v příkladu ②.

Tento limitní vztah motivuje následující definici.

Definice Buď $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ otevřená, $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{D}'(\Omega)$, $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$. Říkáme, že T_k konvergují k T slabě (nebo v $\mathcal{D}'$) pokud

$$\langle T_k,\varphi\rangle \to \langle T,\varphi\rangle \quad \forall \varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$$

Říkáme, že $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} T_k = T \text{ v } \mathcal{D}'}$ $\iff$ $\sum_{k=1}^{\infty}\langle T_k,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega).$

3.2 ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI DISTRIBUCÍ (DISTRIBUTIVNÍ POČET)

V této sekci se budeme snažit pochopit operace s distribucemi: posunutí, škálování, derivování, integrování, ...

Distribuce můžeme rozdělit na regulární a ostatní (singulární). Regulární distribuce jsou takové, které jsou určeny lokálně integrovatelnými fce:

$$T_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$\Updownarrow$$

$$f \in L^1_{loc}$$

kde ztotožňuji funkce, které se liší na množině míry nula, neboť pak je každá regulární distribuce určena jednoznačně fcí z L^1_{loc} [přesněji třídou ekvivalence]. Viz níže str. 3/14

Tedy

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

Také víme

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^1(\Omega) \text{ je hustý v } L^1$$

Máme tedy

$$\boxed{\mathcal{D}(\Omega) \subset L^1_{loc} \subset \mathcal{D}'(\Omega)}$$

Platí následující věta, kterou lze z předchozích úvah ověřovat.

Tvrzení

Buď $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Pak $\exists \{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tak, že $f_n \to T$ v $\mathcal{D}'$.

Toto tvrzení nám umožňuje vybudovat (distributivní) počet tak, že nejdříve vyšetříme možné vztahy pro regulární distribuce generované funkcemi z $\mathcal{D}(\Omega)$ a pak provedeme rozšíření těchto vztahů pro libovolné distribuce přes hustotu.

Na ZNAČENÍ ZÁLEŽÍ. Budeme psát

$\boxed{\langle T, \varphi \rangle}$ místo $\boxed{T(\varphi)}$, kde $T \in \mathcal{D}'$ a $\varphi \in \mathcal{D}$

a také

$\boxed{\langle f, \varphi \rangle}$ místo $\boxed{\langle T_f, \varphi \rangle = T_f(\varphi)}$ je $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ a T_f je korespondující regulární distribuce.

Distributivní počet pro regulární distribuce

- **POSUNUTÍ** Připomeň, že pro $a \in \mathbb{R}^d$: $\tau_a f(x) := f(x+a)$

$$\underline{\langle \tau_a f, \varphi \rangle} = \int_\Omega f(x+a)\varphi(x)\,dx \underset{z=x+a}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\varphi(z-a)\,dz = \underline{\langle f, \tau_{-a}\varphi \rangle}$$

Posunutí distribuce o a — Posunutí test. fce o $-a$

$f \equiv 0$ mimo Ω

$\varphi \equiv 0$ mimo Ω

- **ŠKÁLOVÁNÍ** (změna měřítka)

zavedíme pro $\lambda > 0$: $d_\lambda f(x) := f(\lambda x)$

$$\underline{\langle d_\lambda f, \varphi \rangle} = \int_\Omega f(\lambda x)\varphi(x)\,dx \underset{\substack{z = \lambda x \\ dx = \frac{dz}{\lambda^d}}}{=} \frac{1}{\lambda^d}\int_\Omega f(z)\varphi\left(\frac{z}{\lambda}\right)dz = \underline{\frac{1}{\lambda^d}\langle f, d_{\frac{1}{\lambda}}\varphi \rangle}$$

- **DERIVOVÁNÍ** Nechť $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ je multiindex, a $D^\alpha f$ a všechny derivace nižšího řádu jsou z $L^1_{loc}(\Omega)$.

$$\underline{\langle D^\alpha f, \varphi \rangle} = \int_\Omega D^\alpha f(x)\varphi(x) = \int_\Omega \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}\varphi(x)\,dx$$

$$\underset{\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)}{\overset{\text{per partes}}{=}} (-1)^{|\alpha|}\int f(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx = \underline{(-1)^{|\alpha|}\langle f, D^\alpha \varphi \rangle}$$

- **NÁSOBENÍ** (skalární) funkcí $m \in C^\infty(\Omega)$

$$\underline{\langle mf, \varphi \rangle} = \int_\Omega m(x) f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\, m(x)\varphi(x) = \langle f, m\varphi \rangle$$

DŮLEŽITÉ: $m\varphi \in \mathcal{D}$!! pro $\varphi \in \mathcal{D}$

Pokud m není diferencovatelné, nelze násobení zavést. Uvažme například $m(x) = \operatorname{sgn} x$, pak $m\delta$ nelze smysluplně definovat neb $\langle m\delta, \varphi \rangle = m(0)\varphi(0)$ a není konzistentní způsob jak definovat $m(0)$.

Všechny výše uvedené vztahy mají tvar:

pro $\mathcal{O}f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$: $\boxed{\langle \mathcal{O}f, \varphi \rangle = \langle f, S\varphi \rangle \quad \text{pro } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),}$

kde $\mathcal{O}$ je operátor, který chceme zavést — operátor posunutí, škálování, derivování, násobení C^∞ fcí.

a S je operátor, který dává platnost vztahu v $\boxed{}$.

Je-li $T \in \mathcal{D}'$ takové, že $\{f_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ splňují $f_n \to T$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$
tzn. $\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$ $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

pak $\langle f_n, S\varphi \rangle \to \langle T, S\varphi \rangle$ $\forall \varphi$

neboli:

(☆) $$\lim_{n\to\infty} \langle O f_n, \varphi \rangle = \langle T, S\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

a levou stranu (☆) označme $\langle OT, \varphi \rangle$. Tedy

$$\langle OT, \varphi \rangle = \langle T, S\varphi \rangle \quad \text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Máme tedy, pro lib. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

(1) $\langle \tau_a T, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-a} \varphi \rangle$ $\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $a \in \mathbb{R}$

(2) $\langle d_\lambda T, \varphi \rangle = \frac{1}{\lambda^d} \langle f, d_{\frac{1}{\lambda}} \varphi \rangle$ $\quad$ —||— , $\lambda > 0$

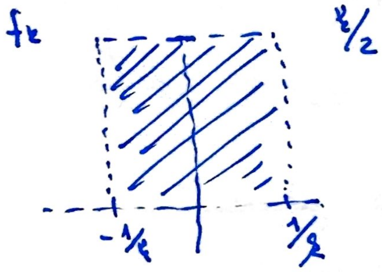
(3) $\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = \langle f, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \varphi \rangle$ $\quad$ —||— , $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$

(4) $\langle mT, \varphi \rangle = \langle T, m\varphi \rangle$ $\quad$ —||— , $m \in C^\infty$

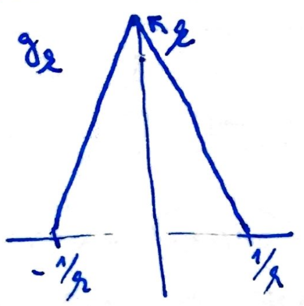
<u>Příklady</u> ① Ze vztahu (3) plyne, že $(E\text{-}L)_{PDR}$ je pro $f \in L^1_{loc}$ a pro $a \nabla u \in L^1_{loc}$ (což plyne např. z předpokladů $a \in L^\infty(\Omega)$ a $\nabla u \in L^1_{loc}$) popis PDR $(E\text{-}L)_{PDR}$ v $\mathcal{D}'(\Omega)$, přičemž oba členy představují regulární distribuce. Je-li však $f = \delta$ pak pro $a \in C^\infty(\Omega)$ $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ je distributivní řešení $(E\text{-}L)_{PDR}$ pokud

$$\langle u, -\operatorname{div}(a(x) \nabla \varphi) \rangle = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

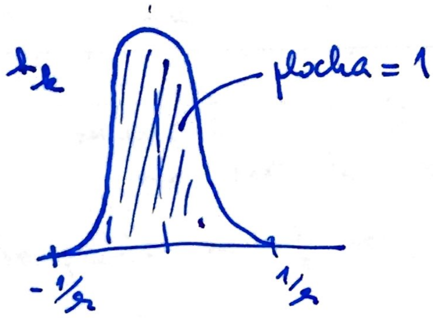
(2) Víme, že $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ definované obrázkem 1 konvergují k δ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ověřte, že také $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ definované obrázkem 2 konvergují k δ v $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Rovněž $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ z obrázku 3.



Obr. 1



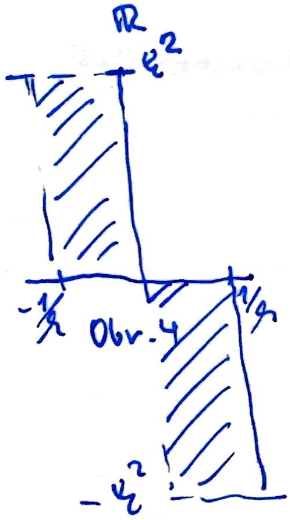
Obr. 2



Speciálně $\langle g_k,\varphi\rangle = \int_\Omega g_k(x)\varphi(x) \longrightarrow \langle\delta,\varphi\rangle = \varphi(0) \quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$

Podívejme se přímo $\lim_{k\to\infty}\int_{\Omega=\mathbb{R}} g_k'(x)\varphi(x)$. Funkce g_k' je načrtnuta v Obr. 4. Tedy

$$\int_{\mathbb{R}} g_k'(x)\varphi(x) = k^2\int_{-1/k}^{0}\varphi(x)\,dx - k^2\int_{0}^{1/k}\varphi(x)\,dx \approx \frac{\varphi\left(-\frac{1}{2k}\right)-\varphi\left(\frac{1}{2k}\right)}{\frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} -\varphi'(0)$$



Tedy platí: $\langle\delta',\varphi\rangle = -\langle\delta,\varphi'\rangle$ ve shodě s vlastností (3), a také: pokud $g_k\to\delta$ v $\mathcal{D}'$, pak $g_k'\to\delta'$ v $\mathcal{D}'$.

(3) Spočtěme $m\delta'$ pro $m\in C^\infty$. Uvidíme, že náš naivní předpoklad: $\langle m\delta',\varphi\rangle = -m(0)\varphi'(0)$ nebude správný.

Platí:

$$\langle m\delta',\varphi\rangle \overset{(4)}{=} \langle\delta', m\varphi\rangle \overset{\text{Př. 2}}{=} -(m\varphi)'(0)$$
$$= -m'(0)\varphi(0) - m(0)\varphi'(0) = \langle -m'(0)\delta + m(0)\delta',\varphi\rangle$$

Tedy $\boxed{m\delta' = +m(0)\delta' - m'(0)\delta}$

4) Ukážeme, že pro libovolné $a>0$, je f_a definované předpisem
$$\langle f_a,\varphi\rangle := \int_{-\infty}^{-a}\frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx + \int_a^{\infty}\frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx + \int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx$$
je distribuce.

Řešení: 1) $\boxed{\langle f_a,\varphi\rangle < \infty \quad \text{pro } \forall\varphi}$ $\qquad$ $\operatorname{supp}\varphi \subset \langle -K,K\rangle$ pro nějaké $K>0$

Intervaly $\langle -K,-a\rangle$ a $\langle a,K\rangle$ jsou kompaktní a funkce $\frac{\varphi(x)}{|x|}$ je zde omezená, tedy
$$\int_{-\infty}^{-a}\frac{\varphi(x)}{|x|} + \int_a^{\infty}\frac{\varphi(x)}{|x|} < \infty$$
Člen
$$\left|\int_{-a}^{a}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx\right| = \left|\int_{-a}^{a}\frac{\varphi'(\xi_x)x}{|x|}\right| \le \underbrace{\max_{s\in[-a,a]}|\varphi'(s)|\,2a}_{<+\infty} < \infty$$

2) linearita ano, ověřte.

3) spojitost $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow \varphi_k' \rightrightarrows 0$, $\varphi_k \rightrightarrows 0$ na jistém $\langle -L,L\rangle$, $L>0$.

Pak argumenty užitými v bodě 1) výše, lze vyvodit, že
$$\langle f_a,\varphi_k\rangle \to 0 \quad \text{pro } k\to\infty.$$

$\boxed{\text{PONAUČENÍ}}$ Funkce $\frac{1}{|x|}$ není prvkem $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, ani není integrovatelná ve smyslu hlavní hodnoty. K této funkci existují ∞-distribucí (parametrizovaných parametrem $a>0$).

Ačkoliv $\frac{1}{|x|}\ge 0$, tak neplatí $\langle f_a,\varphi\rangle \ge 0$ pro $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, $\varphi\ge 0$. Tedy f_a není nezáporná distribuce; zatímco např. δ_0 je nezáporná distribuce.

<u>Definice</u> Říkáme, že $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ je <u>nezáporná</u> $\equiv \langle T,\varphi\rangle \ge 0$ $\forall\varphi\ge 0$, $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$.

Kontrolní otázky

1) Je $\langle f,\varphi\rangle := \varphi^3(0)$ distribuce? NE

2) Je $\langle f,\varphi\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$ distribuce? ANO

KONSISTENCE DERIVACÍ

Nechť f, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ jsou spojité v Ω. Ztotožníme f s $T_f \in \mathcal{D}'$ a uvažujme $\frac{\partial T_f}{\partial x_k}$. Platí pak, že $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ a $\frac{\partial T_f}{\partial x_k}$ se rovnají v distributivním smyslu? Odpověď je kladná. Důkaz:

pro $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi\, dx = -\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx$$

integrací per-partes vzhledem k proměnné x_k.

pro T_f platí

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle.$$

Protože f je regulární distribuce, tak $\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle = \int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} dx$

Tedy s předchozím platí

$$\left\langle \frac{\partial T_f}{\partial x_k}, \varphi \right\rangle = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi\, dx$$

což znamená, že $\frac{\partial T_f}{\partial x_k}$ je regulární distribuce k $T_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}$, což jsme chtěli ukázat.

Ještě jedna poznámka k regulárním distribucím.

- Pokud $f, g \in L^1_{loc}$ a $f = g$ s.v. v Ω, pak $T_f = T_g$ v $\mathcal{D}'$.
- Naopak jsou-li T, U dvě regulární distribuce takové, že $T = U$ v $\mathcal{D}'$, pak ($T = T_f$ a $U = U_g$) $f = g$ s.v.

Ověření: $T_f = U_g$ v $\mathcal{D}' \Rightarrow \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \Omega$

to ale implikuje $\int [f(x)-g(x)]\varphi(x)\,dx = 0$

tedy $f = g$ s.v. v Ω.

Derivace jsou konsistentní pro širší třídu funkcí, viz následující:

$\boxed{\text{Věta 3.1}}$ Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ a

$$g(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_k)-f(x)}{h}$$ existuje a je spojitá vyjma

bodu y a $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Potom:

je-li $d \geq 2$, pak $\frac{\partial T_f}{\partial x_k} = g$ v $\mathcal{D}'$ $T_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}$

je-li $d=1$, pak $\frac{\partial T_f}{\partial x_k} = T_{\frac{\partial f}{\partial x_k}}$ v $\mathcal{D}'$ jen pokud f je spojitá v y.

$\boxed{\text{POUČENÍ}}$ V $d=1$, jsou funkce se skokovou nespojitostí problém, neboť jejich distributivní derivace není regulární distr.
Naopak, v $d \geq 2$, nespojitost v jediném bodě není problém, avšak v $d=2$, skoková nespojitost na křivce (úsečce) by byl problém.

Dk V dvou spec. případech.

ⓐ $\boxed{d=1,\ y=0}$ $\left\langle \frac{d}{dx} T_f, \varphi \right\rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \cdots - \int_{\varepsilon}^{+\infty} \cdots\right\}$$

$$\overset{\text{per partes}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{-\varepsilon} g(x)\varphi(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\infty} g(x)\varphi(x) + \lim\left[f(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - f(-\varepsilon)\varphi(-\varepsilon)\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x) + \left[f(0+)-f(0-)\right]\varphi(0)$$

$$= \langle T_{g=f'}, \varphi\rangle + \underbrace{\left[f(0+)-f(0-)\right]\varphi(0)}_{=0}$$ pokud $f(0+)=f(0-)$.

ⓑ $\boxed{d=2,\ \frac{\partial}{\partial x_1}}$ $f(x_1,x_2)$ je spojitě diferencovatelná dle x_1 vyjma $(x_1,x_2)=(0,0)$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} T_f, \varphi\right\rangle = -\left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right\rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{g(x_1,x_2)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}\varphi(x_1,x_2)\,dx_1\right)dx_2$$

$$= \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \varphi\right\rangle$$ pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Příklady na procvičení

(Heavisidova fce) v 0 lze definovat libovolně.

① Buď $H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Ukažte, že

- $H \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
- $\langle \frac{d}{dx} T_H, \varphi \rangle \left(= \langle H', \varphi \rangle \right) = \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

neboli $\boxed{H' = \delta \quad \text{v } \mathcal{D}'}$

② $\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$

③ Buď $f \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ a $f' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ a existují $f(0+)$ a $f(0-)$. Pak

$$T_f' = \underline{\underline{f'}} = \underline{[f(0+) - f(0+)]\,\delta + T_{f'}} \quad \text{v } \mathcal{D}'$$

④ Buď $f(x) = \log|x|$. Pak ukažte, že

- $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$
- $(T_f)' = T_{\text{v.p.}\frac{1}{x}}$ v $\mathcal{D}'$
- $(T_f)'' = -T_{\text{v.p.}\frac{1}{x^2}}$ v $\mathcal{D}'$.

3.3 Temperované distribuce a Fourierova transformace

Nejmenší prostor, na kterém jsme doposud zavedli Fourierovu transformaci, byl Schwartzův prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ není pro Fourierovu transformaci vhodný neboť

1) Je-li $0 \neq \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\mathcal{F}[\varphi] \notin \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

2) (neboť) je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\mathcal{F}[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $\varphi \equiv 0$.

zatímco

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{na} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \quad \text{a platí} \quad f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$$

Připomeňme, že

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) := \{ \varphi \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{hladkost}}}{C^\infty}(\mathbb{R}^d);\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^d: \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty}_{\substack{\text{rychlý pokles v } \infty \\ \text{(rychlejší než polynomiální)}}} \}$$

Víme také, že $\boxed{e^{-\frac{|x|^2}{2}} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$ a $\boxed{\mathcal{F}[e^{-\frac{|x|^2}{2}}](s) = e^{-\frac{|s|^2}{2}}}$

Def. (temperované distribuce) Temperované distribuce jsou spojité lineární funkcionály na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, tzn.

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) := \{ T: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R} \text{ (nebo } \mathbb{C}); T \text{ je lineární, spojitý} \},$$

přičemž spojitost zavedeme takto:

pokud $\{\varphi_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ splňují $pD^\alpha\varphi_n \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}^d$ pro libovolný polynom,

pak $T(\varphi_n) = \langle T, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Platí

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$$

přičemž všechny inkluze jsou vlastní. Třetí inkluze není (jak si někteří všimli) úplně v pořádku neboť porovnávám funkce s funkcionály, které si sice odpovídají, ale jsou to jiné objekty. Je to však analogické situaci

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},$$ kde poslední

inkluze platí za předpokladu, že ztotožním $x \in \mathbb{R}$ s $(x, 0) = x + i0$.

Přesněji: pro separabilní Hilbertův prostor $(H, (\cdot,\cdot)_H)$ platí Rieszova věta o reprezentaci, která říká

$$(\forall\, f \in H')(\exists!\, a \in H)\left(\langle f, \varphi\rangle = (a,\varphi)_H \right)$$

množina všech spoj. lin. funkcionálů na H — skalární součin

Navíc $\|f\|_{H'} = \|a\|_H$

Speciálně: $L^2(\Omega)$ a $(L^2(\Omega))'$ lze ztotožnit

Tedy: $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \approx [L^2(\mathbb{R}^d)]' \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Poznámka: Víme, že platí Hölderova nerovnost: $(\forall f \in L^p)(\forall \varphi \in L^{p'})$

$$\int_\Omega f(x)\varphi(x) \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

což lze zapsat

$$\langle T_f, \varphi\rangle \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Platí:

$$[L^p(\Omega)]' = L^{p'}(\Omega)$$

$p \in [1,\infty]$	p'	duální exponent
$L^p(\Omega)$	$L^{p'}(\Omega)$	duální prostor

Zpět k temperovaným distribucím:

- Zatímco $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$
  tak $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \not\subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

  Př. $f(x) = e^{x^2}$, pak $\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^2}\varphi(x)\,dx \in (\mathcal{D}(\mathbb{R}^d))'$,
  a $T_f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Proč? Neboť pro speciální $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a to $e^{-\frac{x^2}{2}}$ platí

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} e^{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{x^2}{2}}\,dx = +\infty.$$

Pro distribuce $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ jsme ukázali platnost čtyř <u>duálních</u> (adjungovaných) identit (1) – (4) (viz strana 3/11), které jsou typu

$$\langle OT, \varphi \rangle = \langle T, S\varphi \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

Tyto čtyři identity platí i pro $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ s jediným dodatkem: pro násobení skalárem m potřebujeme nejen hladkost, $m \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, ale také <u>nejvýše polynomiální růst</u> v ∞:

$$\boxed{(\exists\, N \in \mathbb{N})(\exists\, C > 0): \quad m(x) \leq C|x|^N \quad \text{pro } |x| \to \infty},$$

neboť teprve pak $m\varphi \in \mathcal{S}$ pro libovolné $\varphi \in \mathcal{S}$.

Pomocí duální identity zavedeme Fourierovu transformaci pro temperované distribuce. Je-li $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pak

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}[f](s)\varphi(s) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ix\cdot s} dx\, \varphi(s)\, ds$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) e^{ix\cdot s} ds\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathcal{F}[\varphi](x)\, dx$$

neboli

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Je-li $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, pak definujeme $\mathcal{F}[T]$ dualitou

$$\langle \mathcal{F}[T], \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

Je-li $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pak $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$ a platí:

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{\varphi}(x)\, dx$$

Tedy $\hat{f}$ chápáno jako Four. transf. pro $f \in L^1$ se shoduje s distributivní Four. transf. f. (také distr. Four. transf. je reg. distribuce).

Navíc, na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ platí inverzní Fourierův vzoreček:

$$\boxed{T = \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[T]] \qquad \forall\ T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}$$

Dů: Využijeme platnost inverzního Fourierova vzorečku pro $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pro lib. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\varphi]] \rangle = \langle \mathcal{F}[T], \mathcal{F}^{-1}[\varphi] \rangle$$
$$= \langle \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]], \varphi \rangle$$

neboli

$$\underline{T = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[T]]}$$

$\boxed{\text{Příklady}}$ (1) Buď $T = \delta$. Spočtěme $\hat{T}$.

Řešení: Dle definice

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \varphi(s) e^{ix\cdot s}\, ds \Big|_{x=0}$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \langle 1, \varphi \rangle$$

Tedy $$\underline{\hat{\delta} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}}$$

Připomeňme si, že $\mathcal{F}[\chi_{[-1,1]}] = c\,\frac{\sin s}{s}$. Nyní $\mathcal{F}[\delta] = \text{konst.}$

$\mathcal{F}[e^{-\frac{|x|^2}{2}}] = e^{-|s|^2/2}$

f kompaktní nosič $\rightarrow$ $\hat{f}$ ztrácí pořádek, ale $\hat{f}$ hladké

f bodový nosič $\rightarrow$ $\hat{f}$ neklesá v ∞, $\hat{f}$ hladké.

(2) Buď $T = \delta'$. Spočtěme $\hat{T}$, kde $'$ značí $\frac{\partial}{\partial x_k}$

Platí
$$\langle \hat{\delta'}, \varphi \rangle = \langle \delta', \hat{\varphi} \rangle = -\langle \delta, (\hat{\varphi})' \rangle$$
$$= -\langle \delta, \widehat{ix_k\varphi} \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \langle ix_k, \varphi \rangle \Rightarrow$$

$$\left[\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s) e^{ix\cdot s}\, ds \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} \hat{\varphi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} is_k \varphi(s) e^{ix\cdot s}\, ds \right.$$
$$\left. = \widehat{ix_k \varphi(x)}\,(x) \right]$$

$$\boxed{\hat{\delta'} = -i \frac{x_k}{(2\pi)^{d/2}}}$$

(3) Spočtěte F. transformaci $e^{i\alpha|x|^2}$ $\quad(\alpha \neq 0,\ \alpha\in\mathbb{R})$

Řešení $\quad e^{i\alpha|x|^2}\in L^\infty(\mathbb{R}^d)\cup L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, ale $e^{is|x|^2}\notin L^1(\mathbb{R}^d)$ tedy ani $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Zbývá tedy uvažovat f jako temperovanou distribuci.

! OBECNĚ : Definice nám při výpočtu zpravidla NEPOMŮŽE.

POSTUP : Nalézt vhodného kandidáta a poté ověřit, že splňuje identitu.

Víme :
$$\boxed{\mathcal{F}\left[e^{-t|x|^2}\right](s) = \frac{1}{(2t)^{d/2}}\, e^{-\frac{|s|^2}{4t}}} \qquad (*)$$

(viz str. 1/8 a 1/14 nebo přímo z vztahu:
$$e^{-\frac{|s|^2}{2}} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{2}}\, e^{ix\cdot s}\,dx \;)$$

Do (*) chceme vložit $t=-i\alpha$, což dá

$$\mathcal{F}\left[e^{i\alpha|x|^2}\right](s) = \left(\frac{1}{-2i\alpha}\right)^{d/2} e^{\frac{|s|^2}{4i\alpha}}$$

$$-\frac{1}{2i\alpha} = \frac{i}{2\alpha} = \frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{2\alpha} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{-2i\alpha}\right)^{d/2} = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}i}}{\sqrt{2|\alpha|}}\right)^{d} & \alpha>0 \\ \left(\frac{1}{-2i\alpha}\right)^{d/2} = \left(\frac{e^{-\frac{\pi}{2}i}}{\sqrt{2|\alpha|}}\right) & \alpha<0 \end{cases}$$

Tedy
$$\boxed{\mathcal{F}\left[e^{i\alpha|x|^2}\right](s) = \left(\frac{i}{2\alpha}\right)^{d/2} e^{-\frac{i|s|^2}{4\alpha}}}$$

Zbývá ověřit, že platí pro libovolné $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\left\langle e^{i\alpha|x|^2}, \hat{\varphi}\right\rangle = \left(\frac{i}{2\alpha}\right)^{d/2}\left\langle e^{-\frac{i|s|^2}{4\alpha}}, \varphi\right\rangle$$

tj. (?)
$$\boxed{\int e^{i\alpha|x|^2}\hat{\varphi}(x)\,dx = \left(\frac{i}{2\alpha}\right)^{d/2}\int e^{-\frac{i|x|^2}{4\alpha}}\varphi(x)\,dx}$$

Pozorujme, že oba integrály jsou konečné.

K důkazu (?) vyjdeme ze vztahu

$$\underline{\int e^{-t|x|^2}\hat{\varphi}(x)\,dx = \frac{1}{(2t)^{d/2}}\int e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\varphi(x)}$$

a uvažujme dvě funkce $F, G : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$:

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z|x|^2} \hat{\varphi}(x)\,dx$$

$$G(z) = \frac{1}{(2z)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x|^2}{4z}} \varphi(x)\,dx$$

Platí: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Tedy pro $\operatorname{Re} z > 0$: $F(z) < \infty$, $G(z) < \infty$.

Z Cauchy-Riemannových podmínek: F, G jsou holomorfní pro $z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re} z > 0$.

F, G jsou spojité i na hranici $\operatorname{Re} z = 0$, $z \neq 0$.

$$F(is) = \lim_{\epsilon \to 0} F(\epsilon + is)$$

$$G(is) = \lim_{\epsilon \to 0} G(\epsilon + is)$$

$G(z) = F(z)$ pro $z = (t, 0) = t + i0$, $t > 0$.

Z věty o jednoznačnosti: $\underline{F(is) = G(is)}$. Q.E.D.

(4) Spočtěte Fourierovu transformaci $f(x) = e^{-t|x|}$, $t > 0$

Řešení: $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, ale $f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sice klesá dostatečně rychle v ∞, ale není diferencovatelná v 0.
$\in C(\mathbb{R}^d)$

(i) Spočítejme $\mathcal{F}[f]$ nejdříve v $\boxed{d=1}$

$$\boxed{\hat{f}(s)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t|x|} e^{ixs}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(t+is)x}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{(-t+is)x}\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[\frac{e^{(t+is)x}}{t+is} \right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(-t+is)x}}{-t+is} \right]_{0}^{\infty} \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{t+is} + \frac{1}{t-is} \right\} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2t}{t^2+s^2}}$$

Vidíme, že $\hat{f}(s) \in L^1(\mathbb{R})$ a za takovéto situace platí inverzní Fourierův vzorec

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x)$$

což v našem případě dává

$$(*) \qquad \boxed{e^{-t|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+s^2} e^{-isx}\,ds}$$

(ii) Ve vyšších dimenzích $\boxed{d>1}$ použijeme jiný (obecný) postup:

ⓐ Napišme $e^{-t|x|}$ (nebo obecně danou f) jako "průměr" Gaussiánů s jistou váhou g, tj.

$$\boxed{(\mathrm{I}) \qquad e^{-t|x|} = \int_0^\infty g_t(s)\, e^{-s|x|^2}\, ds}$$

ⓑ Pak na (I) aplikujme Fourierovu transformaci, což "formálně" vede k:

$$\mathcal{F}\left[e^{-t|x|}\right](z) = \int_0^\infty g_t(s)\, \mathcal{F}\left[e^{-s|x|^2}\right](z)\, ds$$

$$= \int_0^\infty g_t(s) \frac{1}{(2s)^{d/2}} e^{-\frac{|z|^2}{4s}}\, ds$$

ⓒ Zkusme spočítat poslední integrál

Zkusme schéma ⓐ–ⓒ použít pro $f(x) = e^{-t|x|}$. Hledejme g tak, že (I) platí. Označme $\lambda = |x| > 0$. Tedy hledáme g tak, že

$$(\mathrm{I}') \qquad e^{-t\lambda} = \int_0^\infty g_t(s)\, e^{-s\lambda^2}\, ds$$

Použijeme si vztahu (*) ze str. 3/21 a pomocný výpočet

$$\int_0^\infty e^{-\beta t^2} e^{-\beta s^2}\, d\beta = \int_0^\infty e^{-\beta(t^2+s^2)}\, d\beta = \left[\frac{e^{-\beta(t^2+s^2)}}{t^2+s^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{t^2+s^2}.$$

Tedy z (*):

$$e^{-t|x|} = \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\infty e^{-\beta t^2} e^{-\beta s^2}\, d\beta\, e^{-isx}\, ds$$

$$= \frac{t\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\beta t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta s^2} e^{-isx}\, ds\, d\beta$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, t \int_0^\infty e^{-\beta t^2} \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4\beta}}}{\sqrt{2\beta}}\, d\beta$$

$$= \frac{t}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}}\, e^{-\frac{1}{4\beta}|x|^2}\, d\beta$$

neboli:

$$e^{-t\lambda} = \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta t^2} e^{-\frac{\lambda^2}{4\beta}}\, d\beta$$

a (I') je nalezena.

Vezmeme $\lambda = |x|^2$ $x \in \mathbb{R}^d$ a aplikujme na (I') Four. transf.,
viz bod (b) schématu.

$$\underline{\underline{\mathcal{F}[e^{-t|x|}](s)}} = \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\beta t^2}}{\sqrt{\beta}} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{|x|^2}{4\beta}}\right](s)\, d\beta$$

$$= \int_0^\infty \frac{t}{\sqrt{\pi\beta}} e^{-\beta t^2} \left(\sqrt{2\beta}\right)^d e^{-\beta|s|^2}\, d\beta$$

$$y = \beta(t^2+|s|^2) \qquad \beta^{\frac{d-1}{2}} = \frac{y^{\frac{d-1}{2}}}{(t^2+|s|^2)^{\frac{d-1}{2}}}$$

$$d\beta = \frac{dy}{t^2+|s|^2}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Gamma-fce}\\ \Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x}\, dx\end{array}}$$

$$= \frac{t}{(t^2+|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \frac{2^{d/2}}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int_0^\infty y^{\frac{d-1}{2}} e^{-y}\, dy}_{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2^{d/2}}{(\pi)^{1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) t}{(t^2+|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}}}$$

což souhlasí s naším výpočtem pro $d=1$ $(\Gamma(1)=1)$.

Pozoruj:

f klesá rychle v ∞ $\longrightarrow$ $\hat{f}$ hladká

f není hladká v 0 $\longrightarrow$ $\hat{f}$ klesá jen polynomiálně.

Pozorujme také, že

$$\underline{\underline{\mathcal{F}^{-1}[e^{-t|x|}](s)}} = \mathcal{F}[e^{-t|x|}](-s) = \underline{\underline{\frac{2^{d/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) t}{(t^2+|s|^2)^{\frac{d+1}{2}}}}}$$

⑤ Spočtěme Fourierovu transformaci $f(x) = |x|^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{C}$,
$0 > \underline{\operatorname{Re} \alpha > -d}$

$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $f \notin L^1(\mathbb{R}^d)$, f však neroste příliš rychle v $\infty \Rightarrow T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

K výpočtu Four. transf. $\hat{T}_f$ použijeme schéma z příkladu 4.

(I') Získáme z následujícího výpočtu

$$\int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{-s|x|^2} ds \underset{\uparrow}{=} \int_0^\infty \frac{|x|^{\alpha+2}}{|x|^2} y^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{-y} = |x|^{\alpha} \Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$s = \frac{1}{|x|^2} \leftarrow y = s|x|^2$$
$$ds = \frac{dy}{|x|^2}$$

přičemž integrál vlevo je konečný jen pro $\alpha < 0$.
Uvažujeme tedy $\boxed{-d < \operatorname{Re}\alpha < 0}$ a máme

$$|x|^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1} e^{-s|x|^2} ds$$ což je (I').

Tedy

$$\mathcal{F}[|x|^{\alpha}](z) = \frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1} \mathcal{F}\left[e^{-s|x|^2}\right](z) ds$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-1} \cdot \frac{1}{(2s)^{d/2}} e^{-\frac{|z|^2}{4s}} ds$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^d \frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty s^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{d}{2}-1} e^{-\frac{|z|^2}{4s}} ds$$

$$y = \frac{|z|^2}{4s}, \quad s = \frac{|z|^2}{4y}, \quad ds = -\frac{|z|^2}{4y^2} dy$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^d \frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \int_0^\infty \left(\frac{|z|^2}{4}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{d}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}+\frac{d}{2}+1} e^{-y} dy$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^d \frac{1}{\Gamma(-\frac{\alpha}{2})} \frac{2^{\alpha+d}}{|z|^{\alpha+d}} \int_0^\infty y^{\frac{\alpha}{2}+\frac{d}{2}-1} e^{-y} dy$$

$$= \underline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^d \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \frac{2^{\alpha+d}}{|z|^{\alpha+d}}}$$

Pozorujme, že $\alpha+d$ splňuje $\underline{0<\alpha+d<d}$.

Speciální případ: $\boxed{\alpha=-1 \quad a \quad d=3}$

$$\mathcal{F}\left[|x|^{-1}\right](z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\frac{2^2}{\underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}_{=\sqrt{\pi}}}\,\frac{1}{|z|^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{|z|^2}$$

a tedy

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{|z|^2}\right](x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{|x|}.$$

■

Konvoluce temperovaných distribucí

Mnoho aplikací potřebuje konvoluci, kde jeden faktor je temperovaná distribuce. Víme

$$(f*g)(x) = \int f(x-y)\,g(y)\,dy$$

a jsou-li $\varphi,\psi\in\mathcal{S}$ pak $\boxed{\widehat{\varphi*\psi} = (2\pi)^{d/2}\,\hat{\varphi}\cdot\hat{\psi}}$ (viz strana 1/10)

Tento vztah nemůže platit pro temper. distribuce, neboť součin distribucí nemáme zaveden, neboť nedává dobrý smysl. Víme však, že má smysl součin $m\in\mathcal{S}$ a temperované distribuce.

$\boxed{\text{Nechť } \psi\in\mathcal{S} \text{ a } T\in\mathcal{S}'}$ K zavedení Fourierovy transformace $\psi*T$ potřebujeme adjungovanou (duální) identitu:

Buď $\psi\in\mathcal{S}$, $\varphi_1,\varphi_2\in\mathcal{S}$. Pak

$$\langle\psi*\varphi_1,\varphi_2\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}(\psi*\varphi_1)(x)\,\varphi_2(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x-y)\,\varphi_1(y)\,\varphi_2(x)\,dy\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}\psi(x-y)\,\varphi_2(x)\,dx\right)\varphi_1(y)\,dy$$

$$= \langle\varphi_1,\tilde{\psi}*\varphi_2\rangle \qquad \text{kde } \tilde{\psi}(y)=\psi(-y)$$

neboli

$$\boxed{\langle\psi*T,\varphi\rangle = \langle T,\tilde{\psi}*\varphi\rangle \qquad \forall\,\varphi\in\mathcal{S}}$$

Toto je duální identita (6)

(Definice #1)

Odsud plyne: $\boxed{\mathcal{F}[\psi * T] = (2\pi)^{d/2}\hat{\psi}\,\hat{T}}$ pro $\psi \in \mathcal{S}$ a $T \in \mathcal{S}'$

Dk: Počítejme

$\varphi \in \mathcal{S}$: $\underline{\underline{\langle \mathcal{F}[\psi * T], \varphi \rangle}} \overset{(5)}{=} \langle \psi * T, \hat{\varphi} \rangle \overset{(6)}{=} \langle T, \tilde{\psi} * \hat{\varphi} \rangle$

$= \langle T, \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]] \rangle$

protože $\tilde{\psi} * \hat{\varphi} \in \mathcal{S}$, tak platí pro tuto fci Fourierův inverzní vzoreček $\mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}]] = \tilde{\psi} * \hat{\varphi}$

$\overset{(5)}{=} \langle \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi} * \hat{\varphi}] \rangle$

$= \langle \hat{T}, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}]\, \mathcal{F}^{-1}[\hat{\varphi}] \rangle (2\pi)^{d/2}$

F. transf. konvoluce (viz str. 1/10)

$= \langle \hat{T}, (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}]\, \varphi \rangle$

$= \langle \hat{T}, (2\pi)^{d/2} \hat{\psi} \cdot \varphi \rangle$

$= \underline{\underline{(2\pi)^{d/2} \langle \hat{\psi}\hat{T}, \varphi \rangle}}$, což dává tvrzení

neb platí $\mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\psi}(s) e^{-ix\cdot s}\, ds = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(-s) e^{-ix\cdot s}\, ds$

$\underset{\substack{s' := -s \\ ds' = -ds}}{=} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int \psi(s') e^{ix\cdot s'}\, ds' = \hat{\psi}(x)$

(Pozor: Otočím integraci $(-\infty, +\infty) \longrightarrow (+\infty, -\infty)$)

■

Konvoluce $f \in \mathcal{S}'$ s $\psi \in \mathcal{S}$ lze zavést jiným přímočařejším způsobem. Protože pro $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$(\psi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x-y)\, f(y)\, dy,$$

můžeme psát

$$(\psi * f)(x) = \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi} \rangle \quad \text{kde } (\tau_{-x}\tilde{\psi})(y) = \tilde{\psi}(y-x) = \psi(x-y)$$

Vyjádření vpravo má však smysl nejen pro $f \in \mathcal{S}$, ale i pro temperované distr. $f \in \mathcal{S}'$.

Navíc zobrazení $x \longmapsto \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi} \rangle$ definuje funkci, která je C^∞, neb $\tilde{\psi} \in C^\infty$ a platí:

$$D_x^\alpha(\psi * f)(x) = D_x^\alpha \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle = \langle f, D_x^\alpha \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle = \langle f, D_x^\alpha \psi(x-\cdot)\rangle .$$

Vidíme, že konvoluci $\psi \in \mathcal{S}$ a $f \in \mathcal{S}'$ lze definovat předpisem

$$\boxed{(\text{Definice \#2}) \quad (\psi * f)(x) := \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle}$$

a takto definovaná konvoluce je C^∞-fce (i pro $f \in \mathcal{S}'$)!

Máme dvě definice konvoluce temperované distribuce a hladké funkce. Je vhodné ukázat, že se shodují.

Dk $\quad \int_\Omega (\psi * f)(x)\varphi(x) \underset{\text{def.\#2}}{=} \int_\Omega \langle f, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle \varphi(x)\,dx$

$\langle \psi * f, \varphi\rangle =$ (hladká fce dle Def. 2)

$$= \langle f, \int_\Omega (\tau_{-x}\tilde{\psi})\varphi(x)\,dx\rangle$$

$$= \langle f, \int_\Omega \psi(x-y)\varphi(x)\,dx\rangle$$

$$= \langle f, \tilde{\psi} * \varphi\rangle \underset{\text{def \#1}}{=} \langle \psi * f, \varphi\rangle .$$

∎

Shrnutí: ① Zavedli jsme 2 definice pro konvoluci $\psi \in \mathcal{S}$ a $f \in \mathcal{S}'$. Tyto definice se shodují. Ta druhá ukazuje průzračně, že KONVOLUCE JE ZHLAZUJÍCÍ PROCES. Vezměme speciálně Diracovu distribuci. Pak

$$(\psi * \delta)(x) = \langle \delta, \tau_{-x}\tilde{\psi}\rangle = \psi(x-y)\big|_{y=0} = \psi(x)$$

Tedy $\boxed{\psi * \delta = \psi}$ (což koresponduje mj. s výpočtem: $\widehat{\psi * \delta} = \hat{\psi}\cdot\hat{\delta} = \hat{\psi}\cdot 1 = \hat{\psi}$)

② KONVOLUCE JE ČASTÁ OPERACE. NAPŘ.

(i) Derivování je speciální případ distribuce, neboť

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(\psi * \delta) = \frac{\partial \psi}{\partial x_k} * \delta$$

(ii) Fourierův inverzní vzoreček lze interpretovat jako spec. případ konvoluce.

$\boxed{f \in \mathcal{S}}$

Platí: $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]](x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot x}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{is\cdot y}\,dy\,ds$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot(x-y)}\,ds\,dy = (f * g)(x) \quad \text{kde } g(x) := \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot x}\,ds$$

Avšak $g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\mathcal{F}^{-1}[1](x) = \delta$ (g tedy není fce, ale distribuce)

Př. ①, str. 3/20

a tedy platí

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f * \delta = f$$

což je "jiný" důkaz Fourierova inverzního vzorečku.

Také jsme ukázali: $\delta = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-is\cdot x}\,ds$.

3.5. Regularizace (zhlazování) a jeho vlastnosti

Buď
$$w(x) = \begin{cases} C\, e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{pro } |x|<1 \\ 0 & \text{pro } |x|\geq 1 \end{cases}$$
kde $C>0$ je takové, že $\int_{\mathbb{R}^d} w(x) = 1$

Pak

- $w \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\operatorname{supp} w = \overline{B_1(0)}$

Tedy

- $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a navíc $w(x) = w(-x)$ a $w \geq 0$.

Nyní sestrojíme ∞-mnoho funkcí v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ škálováním a posunutím. Definujme

$$\boxed{w_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d}\, w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)} \qquad \varepsilon \in (0,\infty)$$

Pak

- $w_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$; $\operatorname{supp} w_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(0)}$; $\int_{\mathbb{R}^d} w_\varepsilon(x)\,dx = 1$,
  $w_\varepsilon(-x) = w_\varepsilon(x)$

Také

- $\tau_{-y} w_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x-y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} \tau_{-y} w_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon(y)}$,
  a také $w_\varepsilon(x-y) = w_\varepsilon(y-x)$

Platí následující tvrzení

Věta 3.1 Buď $p \in [1,\infty)$.

(i) Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f_\varepsilon := w_\varepsilon * f \in L^p(\mathbb{R}^d) \cap C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a platí

(i1) $\|f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ a $f_\varepsilon \to f$ a.e. in $\mathbb{R}^d$ pro $\varepsilon \to 0+$

(i2) $\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ pro $\varepsilon \to 0+$

(ii) Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená. Pak $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustý v $L^p(\Omega)$.

(iii) Je-li $f \in C(\Omega)$ a $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ je kompaktní, pak

$$f_\varepsilon \rightrightarrows f \text{ v } \Omega.$$

Dk $\boxed{\text{Ad (i1)}}$ Z důkazu Věty 1.1. plyne

$$\|f_\varepsilon\|_{L^p} = \|\omega_\varepsilon * f\|_{L^p} \leq \|\omega_\varepsilon\|_{L^1} \|f\|_{L^p}$$

avšak $\|\omega_\varepsilon\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\omega_\varepsilon(x)}_{\geq 0} dx = 1$, což dává část tvrzení (i1).

Skutečnost, že $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je jasná resp. ponechána čtenáři.

Dále, dle věty o Lebesgueových bodech (viz níže) platí

$$(\clubsuit) \qquad \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy = 0 \quad \text{pro s.v. } x \in \mathbb{R}^d.$$

Pro tato x platí

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \omega_\varepsilon(x-y)[f(y)-f(x)]\, dy \right|$$

neboť

- $\operatorname{supp} \omega_\varepsilon(x-\cdot) = \overline{B_\varepsilon(x)}$

a

- $\int_{\mathbb{R}^d} \omega_\varepsilon(x-y)\, dy = 1$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{B_\varepsilon(x)} \omega\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) |f(y) - f(x)|\, dy$$

$$\leq c \frac{1}{B_\varepsilon(x)} \int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)-f(x)|\, dy \to 0$$

dle $(\clubsuit)$.

Tedy (i1) je dokázáno.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ Je-li $f \in C(\Omega)$ a $\operatorname{supp} f$ je kompaktní v Ω, pak f je stejnoměrně spojitá: k danému $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tak, že $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ kdykoliv $|x-y| < \delta$. Pak z předchozího výpočtu plyne, že

$$\sup_{x \in \operatorname{supp} f} |f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq c\varepsilon.$$

Tedy $f_\varepsilon \rightrightarrows f$ v Ω.

$\boxed{\text{Ad (i2)}}$ Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $\exists g \in C(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} g$ je kompaktní tak, že $\|f-g\|_{L^p} < \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je dáno libovolně. Pak $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L^p} \leq \|f-g\|_{L^p} < \varepsilon$ dle (i1), a $g_\varepsilon \rightrightarrows g$ v $\mathbb{R}^d$. Tudíž

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g-g_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + \|g_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

$$\le 2\|f-g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} + c\|g-g_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

! supp g, g_ε je kompaktní

$$\le (2+c)\,\varepsilon.$$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ plyne z předchozího, neboť

Je-li $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, pak $f\chi_{[-N,N]} \xrightarrow[N\to\infty]{} f$ v $L^p(\mathbb{R}^d)$

a $f\chi_{[-N,N]}$ má kompaktní nosič. Tedy

$(f\chi_{[-N,N]})_\varepsilon \to f\chi_{[-N,N]}$ pro $\varepsilon \to 0$.

Tyto dvě konvergence dávají hustotu. ∎

V teorii míry platí následující důležitá věta, která říká, že každá integrovatelná funkce je "přibližně spojitá" ve skoro všech bodech.

$\boxed{\text{Věta}}$ (O Lebesgueových bodech) Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Pak

(i) Pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$: $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} f(y)\,dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f(x)$

(ii) —"— $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int_{B_\varepsilon(x)} |f(y)-f(x)|\,dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

Navíc, je-li $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, pak:

Pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$: $\frac{1}{|B_\varepsilon(x)|}\int |f(y)-f(x)|^p\,dy \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

Často je výhodné studium chování globálně definovaného objektu lokalizovat. S lokalizací je spojen pojem: „rozdělení jednotky" (partition of unity). Platí

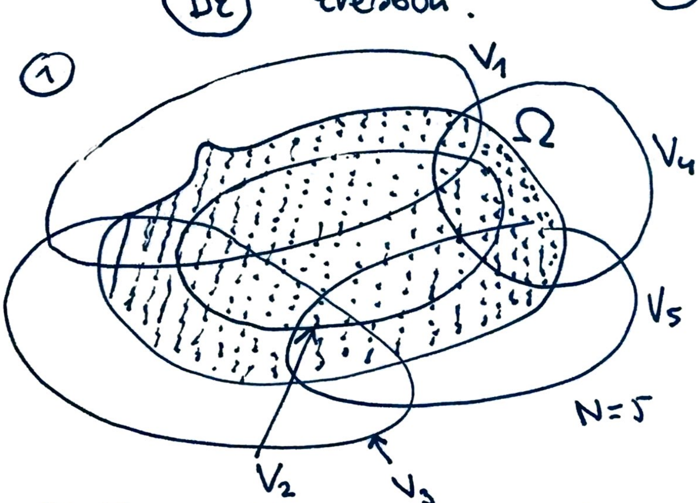
Tvrzení (o rozdělení jednotky) Buď Ω omezená a $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{N} V_i$ (otevřené pokrytí $\overline{\Omega}$ konečné), V_i otevřené.

Pak $\exists\, \psi_i \in \mathcal{D}(V_i) \dots C^\infty$-fce s nosičem v V_i takové, že

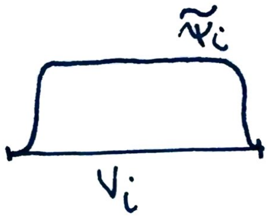
$$\sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) = 1 \qquad \forall x \in \Omega.$$

Dk: kresbou.

(1)



(2)



Na $\forall V_i$ sestrojím $\tilde{\psi}_i \in \mathcal{D}(V_i)$

(3) $$\psi_i := \frac{\tilde{\psi}_i}{\sum_{i=1}^{N} \tilde{\psi}_i}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) = 1. \quad \blacksquare$$

Platí $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=1}^{5} V_i$, V_i otevřené

LOKALIZACE: $\underbrace{f \in L^p(\Omega)}_{\text{globální}} \Rightarrow f = f \cdot 1 = f \sum_{i=1}^{N} \psi_i = \sum_{i=1}^{N} f\psi_i$ a $f\psi_i \in \underbrace{L^p(V_i)}_{\text{lokální}}$

Věta 3.2 (Schwartzova věta o nemožnosti zavést násobení distribucí)
Nelze na $\mathcal{D}'$ zavést násobení tak, aby bylo komutativní, asociativní a platilo $x\delta = 0$ a $x T_{v.p.\frac{1}{x}} = 1$.

Připomeň:
- $\langle x\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, x\varphi\rangle = 0\varphi(0) = 0$
- $\langle x T_{v.p.\frac{1}{x}}, \varphi\rangle = \langle T_{v.p.\frac{1}{x}}, x\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{x\varphi(x)}{x} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) = \langle 1, \varphi\rangle$

Dk: Sporem. Nechť takové násobení lze zavést. Pak

$$0 = 0\,T_{v.p.\frac{1}{x}} = (x\delta)\,T_{v.p.\frac{1}{x}} = \delta\,(x T_{v.p.\frac{1}{x}}) = \delta\, 1 = \delta,$$

což je spor. $\blacksquare$