NMAF061, ZS 2017-2018 Teoretická část zkouškové písemné práce 25. ledna 2018

Jméno a příjmení: ______________________________

Jméno cvičícího: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Body	5	5	5	5	20
Získáno					

[5] 1. Zadefinujte tyto objekty:

- diferenciální 2-forma ω na prostoru $\mathbb{R}^3$
- vnější diferenciál $d\omega$, kde ω je diferenciální 2-forma na prostoru $\mathbb{R}^3$.

Uvažujte formu $\omega = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy \wedge dz$ a spočtěte $d\omega$. Na základě provedeného výpočtu uveďte matematické vlastnosti formy ω.

[5] 2. Buď funkcionál Φ definován na $X = \{y \in C^1([a,b]); y(a) = A \text{ a } y(B) = B\}$ předpisem

$$\Phi[y] = \int_a^b G(y', y)\, dx = \int_a^b G(y'(x), y(x))\, dx\,, \tag{1}$$

kde G je hladká funkce.

Uveďte, co znamená y^* *je lokální maximizér* Φ.

Zformulujte a dokažte nutnou podmínku existence lokálního maximizéru Φ.

Pomocí fundamentální lemmy variačního počtu odvoďte z nutné podmínky Euler-Lagrangeovy rovnice, a poté odvoďte také její speciální tvar daný speciálním tvarem (1).

[5] 3. Nechť posloupnost reálných funkcí f_n konverguje bodově k funkci f na intervalu I. Ukažte, že tato podmínka není dostatečná pro záměnu integrálu a limity:

$$\lim_{n\to\infty} \int_I f_n(x)\,dx = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \left(= \int_I f(x)\,dx \right). \tag{2}$$

Uveďte tři základní tvrzení, kde jsou přidány další podmínky k bodové konvergenci, které garantují platnost vztahu (2). Jedno tvrzení dokažte.

(Alternativně, pokud uvedete jen dvě tvrzení, získáte maximální počet bodů za důkazy obou tvrzení).

[5] 4. Zadefinujte stejnoměrnou konveregnci pro řadu funkcí. Zformulujte a dokažte Weierstrassovo a Leibnitzovo kritérium stejnoměrné konvergence řad funkcí.