NMAF061, ZS 2017-2018 Teoretická část zkouškové písemné práce 9. února 2018

Jméno a příjmení: ______________________________

Jméno cvičícího: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Body	5	5	5	5	20
Získáno					

[5] 1. Jaké vztahy platí mezi těmito množinami:

(i) $M((0,1))$ množina všech měřitelných funkcí,

(ii) $C([0,1])$ množina všech spojitých funkcí na $[0,1]$,

(iii) $L((0,1))$ množina všech (lebesgueovsky) integrovatelných funkcí.

Rozhodněte, zda platí (pokud tvrzení neplatí, uveďte protipříklad; pokud tvrzení platí, stručně uveďte proč)

- Je-li f spojitá na $(0,1)$, pak je f (lebesgueovsky) měřitelná na $(0,1)$.
- Je-li f nezáporná a spojitá na $(0,1)$, pak je f (lebesgueovsky) integrovatelná na $(0,1)$.
- Jsou-li f^+ a f^- měřitelné na $(0,1)$, pak je f (lebesgueovsky) integrovatelná na $(0,1)$.
- Je-li f na $(0,1)$ měřitelná a omezená, pak je f (lebesgueovsky) integrovatelná na $(0,1)$.

[5] 2. Buď $\Phi[y] = \int_a^b L(y')\,dx$, kde $L \in C^1(\mathbb{R})$. Dokažte následující tvrzení (ve tvaru ekvivalence):

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial y'}(y'(x))h'(x)\,dx = 0 \quad \forall h \in C^1([a,b]), h(a) = h(b) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\partial L(y')}{\partial y'} = C \qquad C \in \mathbb{R}$$

[5] 3. Uvažujte posloupnost funkcí $\varphi_n(x) = n^2 x \mathrm{e}^{-n^2 x}$ na intervalu $[0,1]$.

(a) Ukažte, že $\varphi_n(x)$ nekonverguje stejnoměrně na intervalu $[0,1]$ ke své bodové limitě.

(b) Výpočtem ověřte, že

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Ukažte, jak tato rovnost plyne z teorie Lebesgueova integrálu. Příslušné tvrzení zformulujte a ověřte jeho předpoklady; tvrzení nemusíte dokazovat.

[5] 4. Zadefinujte

- Zadefinujte diferenciální 2-formu ω na prostoru $\mathbb{R}^3$.
- Spočtěte vnější diferenciál $d\omega$ této diferenciální 2-formy ω.
- Zformulujte obecnou Stokesovu větu pro diferenciální formy (s popisem co jednotlivé symboly znamenají).
- Aplikujte tuto větu na diferenciální 2-formu na prostoru $\mathbb{R}^3$. Jak se tomuto speciálnímu tvaru Stokesovy věty říká?