5. Hlubší vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí

5 přednášek

V této kapitole se budeme převážně zabývat fcemi $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; bude-li to ale možné, budeme formulovat věty i pro $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – ovšem toto bude explicitně zdůrazněno. Budeme-li mluvit o vlastnostech fce v $x_0 \in D_f$, budeme předpokládat, že f je definována na nějakém (neredukovaném) okolí x_0 (nebude-li řečeno jinak).

5.1. Lokální a globální extrémy

1/1 přednášky

Definice 1 Řekneme, že f ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) má v bodě $x_0 \in D_f$ lokální extrém, jestliže $\forall x \in \mathcal{U}^*(x_0)$ platí:

$f(x) \geq f(x_0)$ ... lokální minimum

$f(x) \leq f(x_0)$ ... lokální maximum.

ostrý lokální extrém, jestliže $\forall x \in \mathcal{U}^*(x_0)$ platí:

$f(x) > f(x_0)$ ostré lokální minimum

$f(x) < f(x_0)$ ostré lokální maximum.

Věta 1 (nutná podmínka existence lokálního extrému)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ je bodem lokálního extrému fce f a nechť existuje $f'(x_0)$. Potom nutně $f'(x_0) = 0$.

Důkaz

Je třeba vyloučit situace $f'(x_0) > 0$ resp. $f'(x_0) < 0$. Nechť tedy např. $f'(x_0) > 0$. Potom dle Věty 2.6 (resp. Cvičení za ní) existuje okolí $\mathcal{U}^*_\delta(x_0)$: $\forall x \in \mathcal{U}^*_\delta(x_0)$ je $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0$. Potom ale nutně $f(x) > f(x_0)$ na $\mathcal{U}^{*+}_\delta(x_0)$ a $f(x) < f(x_0)$ na $\mathcal{U}^{*-}_\delta(x_0)$, což je spor s předpoklad. Analogicky se vyloučí druhá možnost $f'(x_0) < 0$. ■

V případě nevlastní derivace je to podobné

Příklad 1.

Obrácená implikace neplatí, tj. $f'(x_0)$ jistě nezaručuje existenci extrému v bodě x_0. Stačí vzít $f(x) = x^3$. Potom $f'(0) = 0$, ale f nemá v $x_0 = 0$ lokální extrém.

Z Věty 1 tedy plyne, že lokální extrémy f mohou nastat buď v bodech, kde $f' = 0$, nebo v bodech, kde f' neexistuje. K otázce nutné podmínky existence extrému se vrátíme později.

Definice 2

Řekneme, že f má na množině $M \subset D_f$ v bodě $x_0 \in M$ globální extrém, jestliže $\forall x \in M$ je

$f(x) \geq f(x_0)$ globální minimum

$f(x) \leq f(x_0)$ globální maximum.

Opět je možné definovat ostré globální extrémy, ~~tato~~ však tento pojem nebudeme používat.

Věta 2 (nabývání globálních extrémů na uzavřeném intervalu)

Nechť $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ je spojitá, $-\infty < a < b < +\infty$. Potom f nabývá na $[a,b]$ maxima i minima, Speciálně je na $[a,b]$ omezená.

Důkaz

Označme $S = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Budeme chtít ukázat, že $\exists x_0 \in [a,b]$ takový, že $f(x_0) = S$.
Z definice suprema plyne, že $\forall n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in [a,b]$:

a) $S - \frac{1}{n} < f(x_n) \le S$ $\quad (S \in \mathbb{R})$

b) $f(x_n) > n$ $\quad (S = +\infty)$.

Protože $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost reálných čísel, dle Weierstrassovy věty (V 4.15) existuje $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$: $x_{n_k} \to A \in [a,b]$. Protože f je spojitá na $[a,b]$, je nutně $\lim_{x_{n_k}\to A} f(x_{n_k}) = f(A)$ ~~a tedy~~ (Heine – V 4.14) a tedy $S \in \mathbb{R}$ a $f(A) = S$. Analogicky se postupuje pro $s = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$.

Příklad 2

Větu nelze rozumně zobecnit – otevřený interval např. $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0,1]$

– spojitost $f(x) = x$ na $(0,1)$, $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$ apod.

Věta 3

Nechť f je spojitá na (a,b) a nechť existují $\lim_{x\to a^+} f(x) = A$ a $\lim_{x\to b^-} f(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}^*$. Označme $K = \max\{A,B\}$ a $P = \{x \in (a,b);\ f'(x) = 0 \vee f'(x)$ neexistuje$\}$. Nechť existuje $\max_{x\in P} f(x) = H$. Potom

$\max_{x\in(a,b)} f(x)$ $\exists$ a rovná se H $\iff$ $H \ge K$.

Důkaz

$\Rightarrow$ víme tedy, že $f(x) \le H$ $\forall x \in (a,b)$ a tedy $\lim_{x\to a^+} f(x) \le H$ i $\lim_{x\to b^-} f(x) \le H$, tj. $K \le H$.

$\Leftarrow$ Nechť $H \ge K$ a současně $H \ne \max_{x\in(a,b)} f(x)$, tj. buď O.K. ~~buď $\max_{x\in(a,b)} f(x)$ neexistuje, nebo~~ je $> H$.
V obou případech musí existovat $x_0 \in (a,b)$ takové, že $f(x_0) > H$. Potom ale též $f(x_0) > K$ a tedy $\exists \delta > 0$, $x_0 \in [a+\delta, b-\delta]$ pro jisté vhodné $\delta > 0$ (díky limitám za Věty 2.6 je $f(x) \le \xi < f(x_0)$ na $(a, a+\delta)$ resp. $(b-\delta, b)$.) Ale na $[a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}]$ je f je spojitá a tedy zde dle Věty 2 nabývá svého maxima, řekněme v bodě $z \in [a+\delta, b-\delta] \subset (a,b)$. Nutně je z lokálním extrémem, $z \ne a+\frac{\delta}{2}, b-\frac{\delta}{2}$, (vždyť na $(a, a+\delta)$ a $(b-\delta, b)$ je menší $f(x_0)$) tj. buď $f'(z) = 0$ nebo $f'(z)$ ~~$\ne 0$~~ neexistuje, tj. $z \in P$. Dále $f(z) \ge f(x_0) > H$, což je spor s definicí H. ■

Tato Věta dává již návod, jak hledat globální extrémy f na $[a,b]$, je-li f spojitá. Stačí určit pouze všechny body $\tilde{x}$, kde buď $f'(\tilde{x}) = 0$, nebo $f'(\tilde{x})$ neex. nebo $\tilde{x} = a, b$. Ve většině rozumných případů je tato množina konečná a tedy je jednoduché najít největší – nejmenší hodnotu na této množině.

Příklad 3 Nalezněte extrémy fce $f(x) = x^3 - 6|x|$ na $[-2,2]$.

Zjevně $x>0$: $f'(x)=0 \iff 3x^2-6=0$ tj. $x=\sqrt{2}$

$x<0$: $f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2+6=0$ tj. neex.

$f'(x)$ neex. v $x=0$

Podezřelé body:

x	-2	0	$\sqrt{2}$	2
$f(x)$	-20	0	$-4\sqrt{2}$	-4

$\Rightarrow \max_{[-2,2]} f(x) = 0$ v $x=0$

$\min_{[-2,2]} f(x) = -20$ v $x=-2$.

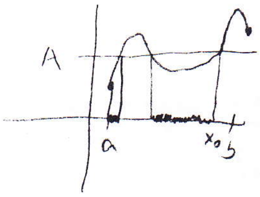
5.2 Globální vlastnosti spojitých funkcí ½ přednášky

Věta 4 (Darboux)

Nechť f je spojitá na $[a,b]$. Potom f nabývá všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Důkaz

Předpokládejme, že $f(a) < f(b)$ ($f(a)=f(b)$ není co dokazovat, $f(a)>f(b)$ se dokazuje stejně).
Nechť $A \in (f(a), f(b))$. Chceme dokázat, že $\exists x_0 \in M$ (ne nutně jediné, ale alespoň jedno) tak, že $f(x_0)=A$. (Nezajímá nás, zda je v M).
Označme $M = \{x \in [a,b];\ f(x) < A\}$ a $x_0 = \sup M$. Chceme ukázat, že $f(x_0) = A$.



Podle definice suprema existuje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$: $x_n \geq x_0 - \frac{1}{n}$, $x_n \neq x_0$ ($x_0 \notin M$). Tedy zřejmě, dle limitního přechodu, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) \leq A$. Předpokládejme, že $f(x_0) < A$. Protože $x_0 \in (a,b)$, existuje $U_\delta(x_0)$: $f(x) < A$ na $U_\delta(x_0)$, tj. speciálně $f(x) < A$ pro $x = x_0+\delta$, což je spor s definicí x_0. ■

Příklad 4

Funkce, které splňují: $[a,b] \subset D_f \Rightarrow \forall c \in (f(a), f(b))\ \exists x \in (a,b): f(x) = c$, se nazývají darbouxovské. Každá spojitá fce je dle V4 darbouxovská. Ale existují i nespojité fce, které mají tuto vlastnost:
$f(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ \sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \end{cases}$ na libovolném $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Naopak, není těžké najít příklad nespojité fce, která není darbouxovská – $f(x) = \operatorname{sign} x$ na intervalu obsahujícím 0. Dále je-li $f(a)>0$, $f(b)<0$, potom $\exists x_0 \in (a,b)$ tak, že $f(x_0)=0$. Je-li f ~~monotónní~~ ryze monotónní, je toto x_0 jediné.

Věta 5

Nechť f je neklesající (rostoucí) na (a,b)* a nechť $R_f = f((a,b))$ je interval. Potom je f na (a,b) spojitá.

Důkaz

Nechť $x_0 \in (a,b)$ a nechť f není v x_0 spojitá. Dle monotonie – V4.13 – $\exists\ \alpha = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $\beta = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ a $\alpha < \beta$. Potom ale (α,β) není podmnožinou R_f – neboť f je monotónní a tedy dostáváme spor. ■

Nyní můžeme dokázat více o existenci inverzní fce, kterou jsme již použili v sekci 2.

* tj. $x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, $x,y \in (a,b)$

Darbouxovost první derivace

Nechť $\exists f'$ na (a,b) vlastní (nebo alespoň f spoj a f' ex.). Pak $a<\alpha<\beta<b$, $f'(\alpha)<\gamma<f'(\beta) \Rightarrow \exists c \in (\alpha,\beta): f'(c)=\gamma$. Pro $f'(\alpha)>f'(\beta)$ analogicky.

Dk: Položme $\varphi(x)=f(x)-\gamma x$. Pak $\varphi(x)$ je spoj a nabývá svého minima na $[\alpha,\beta]$ v $c\in[\alpha,\beta]$. Protože $\varphi'(\alpha)=f'(\alpha)-\gamma<0$ nemůže platit $c=\alpha$. Stejně $\varphi'(\beta)=f'(\beta)-\gamma>0 \Rightarrow c\neq\beta$. $\Rightarrow$ Tedy $c\in(\alpha,\beta)$, $\varphi'(c)$ ex a je 0. Tudíž $f'(c)=\gamma$ $\square$

<u>Věta ~~4~~.6</u> (o existenci spojité inverzní funkce)

Nechť f je spojitá a rostoucí (klesající) na (a,b). Potom k f existuje inverzní fce f^{-1} která je také spojitá a rostoucí (klesající). ~~Je~~ (v případě) $A = \lim_{x\to a^+} f(x)$ a $B = \lim_{x\to b^-} f(x)$, pak $D_{f^{-1}} = (A,B)$ (resp. (B,A)) a $R_{f^{-1}} = (a,b)$.

<u>Důkaz</u>

Provedeme pro f rostoucí. Pro f klesající stačí vzít $\tilde{f} = -f$ a $\tilde{f}$ je již rostoucí; $f^{-1} = -\tilde{f}^{-1}$.
Opět, dle V 4.13 víme, že A, B existují (ale $A, B \in \mathbb{R}^*$ obecně). Jsou-li $A, B \in \mathbb{R}$, pak můžeme f dodefinovat tak, že f je spojitá na $[a,b]$ a můžeme použít V ~~4~~4. Ale i v případě, že A či B jsou $\pm\infty$, platí (Dokažte!)

$\forall C \in (A,B)\ \exists!\ x \in (a,b) : f(x) = C$ (jednoznačnost je důsledek monotonie). Tedy $D_{f^{-1}} = (A,B)$, $R_{f^{-1}} = (a,b)$ a f^{-1} je funkce. Nechť $c < d$ a $C = f(c)$, $D = f(d)$, tj. ~~Chceme ukázat, že $C<D$.~~ $c = f^{-1}(C)$, $d = f^{-1}(D)$ a $C < D$ dle monotonie $f \Rightarrow f^{-1}$ je též rostoucí. Analogicky pro $c > d$ je $C > D$. Spojitost f^{-1} plyne přímo z V 4.5, neboť $R_{f^{-1}}$ je interval. ∎

Připomeňme, že f je spojitá na I, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in I$ (resp. jednostranně v krajních bodech), tj.
$\forall x \in I$ a $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon, x) : y \in U_\delta(x) \overset{\cap I}{\Rightarrow} f(y) \in U_\varepsilon(f(x))$. Uveďme nyní silnější definici:

<u>Definice 2</u>

Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a nechť ~~$(a,b) \subset \mathbb{R}$~~. I je interval. Potom f je <u>stejnoměrně spojitá</u> na I, pokud $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in I,\ y \in U_\delta(x) \cap I \Rightarrow f(y) \in U_\varepsilon(f(x))$.

Speciálně tedy volba δ nezávisí na ~~x~~.

<u>Příklad 5</u>

a) $f(x) = x$ na $(0,1)$. Zvolme $\varepsilon > 0$ (~~ex~~ dosti malé). Potom stačí volit $\delta = \varepsilon$ $\forall x \in (0,1)$ neboť $y \in U_\varepsilon(x) \Rightarrow f(y) = y \in U_\varepsilon(f(x)) = U_\varepsilon(x)$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ na $(0,1)$ je spojitá fce, ale pokud se budeme „blížit s x k nule" potom se i příslušné „δ bude blížit k nule": Zvolím si $\varepsilon > 0$. Hledám δ: ~~$\forall \delta < \ldots$~~ $y \in (x-\delta, x+\delta) \Rightarrow f(y) \in (\frac{1}{x} - \varepsilon, \frac{1}{x} + \varepsilon)$. Řešíme $\frac{1}{x-\delta} = \frac{1}{x} + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x-\delta} = \frac{+\delta}{x(x-\delta)}$, tj. volba δ závisí na ε a x! Dořešte si pečlivě doma!
~~$\delta(1-x) = \varepsilon x$~~ $\boxed{\delta = \varepsilon \frac{x^2}{1+\varepsilon x}}$

Je-li ale I uzavřený interval, je situace jiná. ~~Obr~~ Stejně je každá stejnoměrně spojitá funkce spojitá. Obráceně

<u>Věta 7</u> (Cantor)

Je-li f spojitá na $I = [a,b]$, pak je f stejnoměrně spojitá na $[a,b]$.

<u>Důkaz</u>

Budeme to provádět sporem. Negací Definice 2 máme, že $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x, y : y \in U_\delta(x) \cap I : |f(y) - f(x)| \geq \varepsilon$.
Zvolme si speciálně $\delta_n = \frac{1}{n}$. Máme tedy posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, a $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$. Protože $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je omezená posloupnost, $\exists \{x_{n_k}\} : x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$ a nutně též $y_{n_k} \to x_0$. Ale ze spojitosti $f(x_{n_k}) \to f(x_0)$, $f(y_{n_k}) \to f(x_0)$, zatímco $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$, což je spor. ∎

5.3 Věty o střední hodnotě, důkaz l'Hospitalova pravidla   slovo 1 předmětu

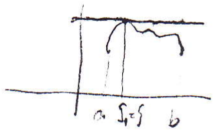
Nyní se budeme zabývat funkcemi, které jsou diferencovatelné.

Věta 8 (Rolle)

Nechť f je spojitá na $[a,b]$ a $f'(x)\ \exists\ \forall x\in(a,b)$. Nechť $f(a)=f(b)$. Potom existuje $\xi\in(a,b)$ takové, že $f'(\xi)=0$.

Důkaz

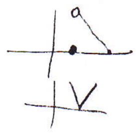
Je-li $f=\text{const}$ na $[a,b]$, je možno vzít za ξ libovolný bod z (a,b). Není-li f konstantní, potom $\exists\ \xi_1$ a ξ_2 taková, že $f(\xi_1)=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ a $f(\xi_2)=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Zřejmě alespoň jedno z čísel ξ_1 a ξ_2 se musí lišit od a a b. Nechť BÚNO je to ξ_1 (jinak přejdeme k $-f$). Potom $f(\xi_1)$ je globální, ale i lokální maximum a protože $f'(\xi_1)$ existuje, je $f'(\xi_1)=0$. Stačí tedy vzít $\xi:=\xi_1$.



($\exists\ \xi$: v ní je tečna rovnoběžná s osou x).

~~Věta 9 (Lagrange)~~ **Příklad 6**

Předpoklady nelze vynechat:
a) není-li f spojitá na $[a,b]$
b) není-li dif. na (a,b)
c) je-li $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $f(x)=\cos x+i\sin x$ na $[0,2\pi]$.

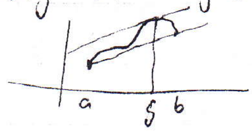


Věta 9 (Lagrangeova věta o přírůstku)

Nechť f je spojitá na $[a,b]$ a $f'(x)\ \exists\ \forall x\in(a,b)$. Potom existuje $\xi\in(a,b)$ takové, že
$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Důkaz

Idea: nalézt fci, na kterou aplikujeme Rolleovu větu. Zvolme tedy
$$F(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right].$$
Potom $F(b)=F(a)=0$ a F splňuje předpoklady Rolleovy věty. Potom tedy $\exists\ \xi\in(a,b)$ takové, že
$0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, odkud plyne tvrzení věty.



$\exists\ \xi$: směrnice tečny v ξ je rovnoběžná s sečnou, procházející body $(a,f(a))$ a $(b,f(b))$.

Příklad 7

Dokažme, že $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$. Zřejmě pro $x,y\in\mathbb{R}\ \exists\ \xi\in(x,y)$: $\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=(\sin x)'\big|_{x=\xi}=\cos\xi$ a stačí využít toho, že $|\cos\xi|\le1$.

Obecně, je-li f taková, že splňuje předpoklady Lagrangeovy věty a $f'(x)$ je omezená na (a,b), potom
$$f(x)-f(y)=(x-y)f'(\xi),\ \xi\in(x,y)\Rightarrow |f(x)-f(y)|\le K|x-y|,\ \text{kde } K=\sup_{\xi\in(x,y)}|f'(\xi)|.$$

Obecnější

Definice 3 (Lipschitzovsky spojitá fce)

Říkáme, že f je lipschitzovsky spojitá fce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, pokud $\exists K;\ \forall x,y \in I: |f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$

Cvičení

Ukažte, že každá lipschitzovsky spojitá fce je spojitá.

Příklad 8:

f spojitá na $[a,b]$, $f'(x)$ $\exists$ na (a,b), f' omezená na (a,b) $\Rightarrow$ f je lipschitzovsky spojitá.

Ale pozor: $f(x)=\sqrt{x}$ není lipschitzovsky spojitá na $(0,1)$, neboť pro $x,y \in (0,1)$

$$\sqrt{x}-\sqrt{y} = \frac{1}{2}(x-y)\frac{1}{\sqrt{\xi}}$$

a pro $x,y \to 0^+$ je $\xi \to 0^+$ a tedy $\frac{1}{\sqrt{\xi}}$ roste nade všechny meze.

Věta 10 (Jednoznačnost primitivní funkce)

Nechť $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) je taková, že $f'(x)=0$ $\forall x \in (a,b)$. Potom je f konstantní na (a,b).

Důkaz

Nechť $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.

Zvolme $x_0 \in (a,b)$ pevně. Potom $\forall x \in (a,b), x \neq x_0$ platí z Věty 9

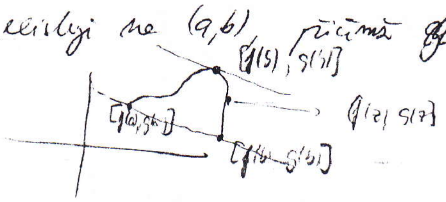
$$0 = f'(\xi) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f(x)=f(x_0)\quad \forall x \in (a,b).$$

Je-li $f:(a,b)\to\mathbb{C}$, provede se důkaz zvlášť pro $\mathrm{Re}\, f$ a $\mathrm{Im}\, f$. ■

Věta 11 (Cauchy)

Nechť f, g jsou spojité z $[a,b]$ do $\mathbb{R}$ a f', g' existují na (a,b), přičemž $g(b)\neq g(a)$. Potom existuje $\xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(\xi)$$



Důkaz

Opět se pokusíme využít Rolleovy věty. Zvolme

$$F(x) = \big(f(x)-f(a)\big) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\big(g(x)-g(a)\big).$$

Protože $g(b)\neq g(a)$, je definice F dobrá, F spojitá. Dále $F(a)=0=F(b)$ a tedy dle Věty 8 (Rolle) existuje $\xi \in (a,b)$:

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - g'(\xi)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)},$$

odkud plyne dokazované tvrzení.

Poznámka: Nemůžeme zaručit nenulovost $g'(\xi)$, proto nelze psát $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Následující věta nám umožní počítat jednostranné derivace v krajních bodech intervalu.

Věta 12 (O limitě jednostranných derivací)

Nechť f je fce do $\mathbb{C}$, spojitá v a zprava. Nechť existuje derivace $f'(x)$ pro všechna $x \in U^*_{\delta^+}(a)$ pro jisté $\delta>0$, přičemž $\lim_{x\to a^+} f'(x) = A \in \mathbb{C}$. Potom $f'_+(a)=A$.

Důkaz

Na intervalu $U_\delta^+(a)$ je f spojitá a lze tedy použít Lagrangeovu větu. Tedy $\forall x \in U_\delta^+(a)\ \exists \xi \in (a,x)$: $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Pokud provedeme limitu pro $x\to a^+$, dostaneme napravo derivaci zprava v bodě a, zatímco levá strana konverguje k A (neboť pro $x\to a^+$ jde nutně ξ k a, $\xi \neq a$ a tudíž je možno použít větu o limitě složené funkce). ■

Příklad 8

Spočtěme $f'(1)$ pro $f(x) = (x^{\frac{4}{3}}-1)_+ = \max\{x^{\frac{4}{3}}-1, 0\}$.

Zřejmě $f(x) = x^{\frac{4}{3}}-1$ na $(1,\infty)$, $f(x)$ je spojitá na $(1,\infty)$ a $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ $\exists$ na $(1,\infty)$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x)=0$, je tedy $f'_+(1)=0$. Analogicky spočteme $f'_-(1)=0$ a tudíž $f'(1)=0$.

Nyní dokážeme l'Hospitalovu větu (viz V 4.9)

Věta 4.9

Nechť $f,g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}^*$ a nechť

(i) Existuje $U_\delta^*(x_0)$ tak, že $\forall x \in U_\delta^*(x_0)$ existují $f'(x)$ a $g'(x)$

(ii) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$

(iii) (a) Buď $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$

nebo

(b) $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty$.

Potom existuje $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a rovná se A.

Důkaz

Krok 1: Ukažme, že stačí ukázat pro $x_0\in\mathbb{R}$ a jednostranné limity.

(α) Víme, že pokud bude platit pro jednostranné limity (obě stejné), pak bude platit i oboustranně

(β) Průchod od x k $-x$ převádí limitu zleva na limitu zprava a limitu pro $x\to-\infty$ na $x\to+\infty$

Zřejmě tedy

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty} f(-y)$, analogicky g

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{f'(-y)}{g'(-y)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-f'(-y)}{-g'(-y)}$; analogicky x_0^-

$\frac{F}{G}$! → vše do 0^+ !

(γ) Průchod od x k $\frac{1}{y}$ převádí vyšetřování z $+\infty$ na 0^+, neboť

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{y\to0^+} f(\frac{1}{y})$, analogicky g

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{y\to0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})}{g'(\frac{1}{y})} = \lim_{y\to0^+} \frac{f'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})}{g'(\frac{1}{y})(-\frac{1}{y^2})} = \lim_{y\to0^+} \frac{(f(\frac{1}{y}))'}{(g(\frac{1}{y}))'}$$

Krok 2: Dokažme nejprve případ (iii)(a). Položme $f(x_0)=g(x_0)=0$. Díky existenci $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ víme, že derivace f a g existují na jistém pravém okolí bodu x_0 a dále $g'(x)\neq 0$ na tomto okolí. Můžeme použít Cauchyovu větu (ve tvaru z poznámky) a máme

Před tím f, g spojité na $[x_0, x_0+\delta]$, pro jisté $\delta>0$.

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \xi \in (x_0, x) \quad \forall x \in U_\delta^{*,+}(x_0).$$

Provedeme-li nyní $\lim_{x\to x_0^+}$, zřejmě $\xi \to x_0^+$, $\xi \neq x_0$ a podle pravidla o limitě složené fce máme

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} = A.$$

Krok 3 Nyní dokažme případ (iii)(b), tj. $\lim_{x\to x_0^+} |g(\xi)| = +\infty$. Opět ∃ okolí $U_\delta^{*,+}(x_0)$:
$f'(x)$ ∃ a $g'(x)$ ∃ a je nenulová na tomto okolí. Dále můžu volit pravé okolí tak, že $g(x)\neq 0$ na tomto okolí ($g(x)\to\infty$). Zvolme x,y z tohoto okolí, $x<y$.
Použitím Cauchyovy věty máme pro jisté $\xi = \xi_{xy} \in (x,y)$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(y)-f(x)}{g(y)-g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}, \text{ tj.}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \left(1-\frac{g(y)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (f(x)-f(y))\,g'(\xi) = (g(x)-g(y))\,f'(\xi)$$

(α) Nechť $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$.
Potom ∀ $\varepsilon>0$ ∃ $U_\delta^{*,+}(x_0)$: $\left|\frac{f'(z)}{g'(z)}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$ pro $z\in U_\delta^{*,+}(x_0)$. Dále pro $y \in U_\delta^{*,+}(x_0)$ pevné existuje $U_{\delta_1}^{*,+}(x_0)$: $\forall x \in U_{\delta_1}^{*,+}(x_0)$ $\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\left|1-\frac{g(y)}{g(x)}\right| < 1$. Pro tato x potom
$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, tj. $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. z definice

(β) Je-li $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, definujme $F(x) = f(x)-Ag(x)$. Potom

$\lim_{x\to x_0^+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right) = 0$, což je případ (α) $\left(\lim_{x\to x_0^+} \frac{F(x)}{g(x)} = 0 \iff \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = A\right)$.

(γ) Zbývá případ $|A| = +\infty$. Nechť $A = +\infty$. $\forall L>0$ Potom existuje $U_\delta^{*,+}(x_0)$ tak, že
$\frac{f'(z)}{g'(z)} > 2L+2$ pro $z\in U_\delta^{*,+}(x_0)$. Dále případně toto okolí zmenšíme tak, aby pro pevné
$y\in U_\delta^{*,+}(x_0)$ a $x\in U_{\delta_1}^{*,+}(x_0)$ bylo
$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < 1$ a $1-\frac{g(y)}{g(x)} \ge \frac12$. Potom
$\frac{f(x)}{g(x)} \ge -1 + \frac12(2L+2) = L$.

Analogicky se postupuje pro $A = -\infty$. Probrali jsme všechny možnosti, tedy důkaz je hotov. ∎

5.4. Souvislost první derivace a monotonie funkce (hodí více na 4. písemky)

Připomeňme, že fce $f(x)$ je v $I \subset \mathbb{R}$ rostoucí (neklesající), jestliže $\forall x,y \in I$
$x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$ ($f(x)\le f(y)$). Analogicky pro klesající/nerostoucí funkci. Fce je (ryze) monotónní v I, je-li rostoucí či klesající v I (nerostoucí či neklesající v I).

Má smysl tento pojem definovat i pro jeden bod.

Definice 7 (D7)

Funkce f je v bodě $a\in\mathbb{R}$ rostoucí (neklesající), jestliže $\exists\, U_\delta^*(a) = U_\delta^{*,+}(a) \cup U_\delta^{*,-}(a)$ tak, že $f(x) < f(a)$ ($f(x)\le f(a)$) $\forall x\in U_\delta^{*,-}(a)$ a $f(a) < f(z)$ ($f(a)\le f(z)$) $\forall z\in U_\delta^{*,+}(a)$.
Analogicky pro neklesající/nerostoucí funkci.

Cvičení

Ukažte, že fce f je rostoucí v ~~I~~ (a,b) (neklesající) $\Leftrightarrow$ f je rostoucí (neklesající) v každém bodě $x \in (a,b)$.
(To by byla těžká, potřebujeme větu!)

Věta 12 (monotonie v bodě a derivace)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť $f'(a)$ existuje. Potom je-li $f'(a) > 0$, potom je f v a rostoucí, je-li $f'(a) < 0$, je f v a klesající.

Důkaz

Nechť např. $f'(a) > 0$. Potom $\exists$ okolí $\mathcal{U}^*_\delta(a)$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$, tj. $f(x) > f(a)$ pro $x \in (a, a+\delta)$ a $f(x) < f(a)$ pro $x \in (a-\delta, a)$, což je požadované tvrzení. ■

Připomenutí

Samozřejmě, je-li $f'(a) = 0$, nelze říci nic – fce může být klidně rostoucí, klesající či mít lokální extrém.

Věta 13 (monotonie na intervalu a derivace)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na intervalu I a nechť v každém bodě existuje derivace. Potom

(i) $\forall x \in I$: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ je ~~nerostoucí~~ neklesající v I

(ii) $\forall x \in I$: $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí v I

(iii) $\forall x \in I$: $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f$ je nerostoucí v I

(iv) $\forall x \in I$: $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je klesající v I.

Důkaz

(i) $\Rightarrow$ Zvolme libovolné $x, y \in I$, $x < y$. Podle Lagrangeovy věty potom $\exists\, \xi \in (x,y)$:

$$0 \leq f'(\xi) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \quad \text{tj. } f(y) \geq f(x).$$

(i) $\Leftarrow$ Nechť f je neklesající v I. Zvolme pevně $x_0 \in I$. Potom $\forall x \in I$, $x \neq x_0$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

a limitním přechodem pro $x \to x_0$ dostáváme $f'(x_0) \geq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ analogicky jako (i), jen ostrá nerovnost.

Ostatní implikace se dokazují analogicky. ■

Příklad 9

Samozřejmě v (ii) nemůže platit obrácená implikace. Stačí uvažovat funkci $f(x) = x^3$, která je rostoucí na $\mathbb{R}$, ale $f'(0) = 0$.

Věta 14. (postačující podmínky pro existenci lokálního extrému I)

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v $a \in \mathbb{R}$. Potom

Je-li f $\left\{\begin{array}{l}\text{rostoucí}\\ \text{klesající}\\ \text{nerostoucí}\\ \text{neklesající}\end{array}\right\}$ v nějakém $\mathcal{U}^{*,-}(a)$ a $\left\{\begin{array}{l}\text{klesající}\\ \text{rostoucí}\\ \text{neklesající}\\ \text{nerostoucí}\end{array}\right\}$ v nějakém $\mathcal{U}^{*,+}(a)$, pak f nabývá v a $\left\{\begin{array}{l}\text{ostré maximum}\\ \text{ostré minimum}\\ \text{minimum}\\ \text{maximum}\end{array}\right\}$

(ii) Je-li $f' \left\{ \begin{matrix} >0 \\ <0 \\ \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix} \right\}$ v nějakém $U^{*,-}(a)$ a $f' \left\{ \begin{matrix} <0 \\ >0 \\ \leq 0 \\ \geq 0 \end{matrix} \right\}$ v nějakém $U^{*,+}(a)$, pak f nabývá v a $\left\{ \begin{matrix} \text{ostré maximum} \\ \text{ostré minimum} \\ \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{matrix} \right\}$.

Důkaz

Tvrzení (ii) je díky Větě 13 důsledkem (i). Dokažme (i). Ukažme pouze f rostoucí v $U^{*,-}(a)$ a klesající v $U^{*,+}(a)$ $\Rightarrow$ f nabývá v a ostré maximum.

Víme, že $f(a) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{x \in U^{*,-}(a)} f(x)$

$= \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \sup_{x \in U^{*,+}(a)} f(x)$

a tedy $f(a) = \sup_{x \in U^{*}(a)} f(x)$. Nechť $\exists$ jiný bod $x_0 \in U^{*}(a)$ takový, že $f(a) = f(x_0)$. Pak buď $x_0 \in U^{*,-}(a)$ nebo $x_0 \in U^{*,+}(a)$, v obou případech máme ale spor s ostrou monotonií f na daném intervalu.

Př: $h(x) = x^3 - 12x + 9$, $h'(x) = 3(x^2 - 4)$ roste na $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$, klesá na $(-2, 2)$; lok. max v -2, lok. min v 2

Věta 15 (postačující podmínky pro existenci lokálních extrémů II)

Nechť existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Potom

(i) je-li n sudé a

a) $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ f má v x_0 ostré lokální minimum

b) $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ f má v x_0 ostré lokální maximum

(ii) je-li n liché a

a) $f^{(n)}(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ f je v x_0 rostoucí

b) $f^{(n)}(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ f je v x_0 klesající.

Důkaz

Ad 1: Budeme provádět indukci. Je-li $n = 1$, plyne tvrzení z Věty 13. Je-li $n = 2$ a $f''(x_0) > 0$ (tj. případ (i) a)), potom f' je rostoucí v x_0 dle případu (ii) a). Ale $f'(x_0) = 0$, tj. na jistém $U^{*,-}(x_0)$ je $f'(x) < 0$ a $U^{*,+}(x_0)$ je $f'(x) > 0$, tj. f je klesající na $U^{*,-}(x_0)$ a rostoucí na $U^{*,+}(x_0)$ $\Rightarrow$ f má v x_0 lok. minimum. Případ (i) b) je analogický.

Ad 2: Nechť tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Dokažme ho pro $n+1 \in \mathbb{N}$. Je-li $n+1$ liché a je $f^{(n+1)}(x_0) = (f')^{(n)}(x_0) > 0$ tj. dle indukčního předpokladu má f' v bodě x_0 ostré lokální minimum tj. na jistém $U^{*}(x_0)$ je $f'(x) > f'(x_0) = 0$ a tedy f je rostoucí v x_0. Analogicky se dokáže (ii) b).

Je-li $n+1$ sudé a $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, potom $(f')^{(n)}(x_0) > 0$ a tedy $f'(x_0) = 0$ a f' je rostoucí v x_0, tj. na jistém $U^{*,-}(x_0)$ je $f'(x) < 0$ a $U^{*,+}(x_0)$ je $f'(x) > 0$, tj. f má v x_0 ostré lokální minimum. Analogicky (Proveďte podrobně sami!) se dokáže případ (i) b).

Pomineme vůbec zatím tři následující kritérium, jehož důkaz ponecháme až do části věnované Taylorově řadě

Věta 16 (postačující podmínky pro existenci globálních extrémů)

Nechť $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ má všude na (a,b) $f'' \geq 0$ (≤ 0). Potom pro jisté $\xi \in (a,b)$ je $f'(\xi) = 0$, potom funkce f nabývá v bodě ξ globálního minima (maxima) v (a,b).

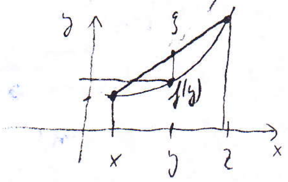
5.5. Konvexita, konkávita a inflexní body

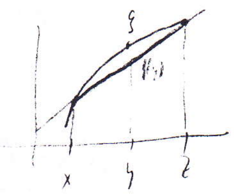
více viz lit. pro analýzu

Definice 4 (funkce konvexní a konkávní na intervalu)

Funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ $\left\{\begin{matrix}\text{konvexní}\\ \text{konkávní}\end{matrix}\right\}$ jestliže $\forall x,y,z \in I$ takové, že $x<y<z$ platí
$$f(y) \left\{\begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix}\right\} f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x).$$
Jsou-li nerovnosti ostré, mluvíme o ostré konvexitě (konkávitě).

Geometrický význam: rovnice $g = f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x)$ popisuje přímku procházející body $(x, f(x))$ a $(z, f(z))$. Tedy je-li funkce ~~konkávní~~ konvexní, znamená to, že funkční hodnoty leží nad sečnou, konkávní pod sečnou.





Konvexitu lze definovat různými ekvivalentními způsoby. Když volíme $y = \lambda x + (1-\lambda) z$, $\lambda \in (0,1)$, potom
$$f(\lambda x + (1-\lambda) z) \le f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(\lambda x + (1-\lambda) z - x) = f(x) + (f(z)-f(x))(1-\lambda) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$$

$$\left(\begin{matrix} 1-\lambda = \frac{y-x}{z-x} \\ \lambda = \frac{z-y}{z-x}\end{matrix}\right)$$

tj. konvexita: $f(\lambda x + (1-\lambda) z) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$

konkávita: $f(\lambda x + (1-\lambda) z) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$ $\quad \lambda \in (0,1)$, $x,z \in I$

nebo $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \le \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ $\quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ atd.

Zobecnění je

Věta 17 (Jensenova nerovnost)

Je-li f $\left\{\begin{matrix}\text{konvexní}\\ \text{konkávní}\end{matrix}\right\}$ v I, potom pro všechna $x_1, \dots, x_n \in I$, $\lambda_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ platí
$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \left\{\begin{matrix}\le\\ \ge\end{matrix}\right\} \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Pozn.: Obecná aplikace triviální, $\sum \lambda_i x_i$ se říká konvexní kombinace prvků $x_1 \dots x_n$

Důkaz

Důkaz provedeme pro konvexní funkci indukcí. Případ $n=2$ jsme ukázali výše. Nechť tedy $n \ge 2$ a nechť nerovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$. Dokažme ji pro $n+1$.
$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) =$$
$$= \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) + (\lambda_n + \lambda_{n+1})\left[\frac{\lambda_n}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_n) + \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}} f(x_{n+1})\right] \overset{\text{konvexita } n=2}{\ge} \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_{n-1} f(x_{n-1}) +$$
$$(\lambda_n + \lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}}{\lambda_n + \lambda_{n+1}}\right) \overset{\text{konvexita, ind. př.}}{\ge} f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) = f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right). \blacksquare$$

Příklad 10

Pomocí Jensenovy nerovnosti dokažme AG nerovnost, tj. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a_k \ge 0$ $k = 1, \dots, n$. Potom
$$\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \le \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

Důkaz: $\ln : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ je rostoucí, stačí dokázat, že
$$\frac{1}{n}(\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n) \le \ln\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n}\right)$$
tj. Jensenova nerovnost pro konkávní fci. Stačí ukázat, že $\ln x$ je na $\mathbb{R}_0^+$ konkávní, což později ověříme z následující věty.

Věta 18 (Charakterizace konvexity I)

Následující výroky jsou ekvivalentní

(i) f je konvexní

(ii) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$

(iii) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$

(iv) $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$

$\Big\}$ $x,y,z \in J,\ x<y<z.$

Důkaz

Definice konvexity říká

$$f(y) \le f(x) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-x) \ (*) \iff (ii)$$

$$\ f(z) + \frac{f(z)-f(x)}{z-x}(y-z) \ (\square) \iff (iv)$$

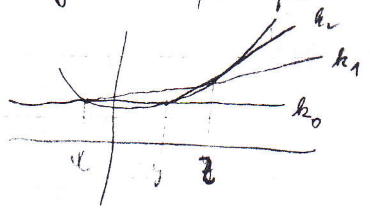
$$(*) = f(x)\left(\frac{z-x}{z-x} + \frac{x-y}{z-x}\right) + f(z)\left(\frac{y-x}{z-x}\right) = f(x)\left(\frac{z-y}{z-x}\right) + f(z)\left(\frac{z-x}{z-x} + \frac{y-z}{z-x}\right) = (\square)$$

V rámci (iii) pak plyne z definice (ekvivalentní) algebraickou úpravou. $(iv) \iff (f(z)-f(x))(z-y) \le (f(z)-f(y))(z-x) \iff f(y) \le f(z) + \frac{f(x)-f(z)}{z-x}(z-y) \iff (\square)$

((ii),(iv) $\Rightarrow$ (iii)) | obdobnou implikaci však (co je dané nezpůsobí a je těžší ji slepit dohromady) Je-li $f(x)$ konvexní, pak $-f$ je konkávní a tedy analogická kritéria si každý odvodí sám.

Vše lze vynásobit jmenovatelem, osamostatnit $f(z)$ a vytknout $f(y)$ na druhé straně.

Geometricky V18 říká, že pro konvexní funkci je směrnice sečny rostoucí fce. Díky souvislosti mezi sečnou, resp. tečnou a derivací je následující věta tak přirozená, přičemž dává nápovědu na dotaz, zda je $\ln x$ konkávní na $\mathbb{R}^+_0$.



$k_0 < k_1 < k_2.$

Věta 19 (Charakterizace konvexity/konkávity II).

Nechť f je spojitá na $[a,b]$ a f'' existuje vlastní na (a,b). Potom

(i) f je na $[a,b]$ $\left\{\begin{matrix}\text{konvexní}\\ \text{konkávní}\end{matrix}\right\} \iff f''(x) \left\{\begin{matrix}\ge\\ \le\end{matrix}\right\} 0$ pro $x \in (a,b)$.

(ii) Je-li $f''(x) \left\{\begin{matrix}>\\ <\end{matrix}\right\} 0$ na (a,b), pak je f ryze $\left\{\begin{matrix}\text{konvexní}\\ \text{konkávní}\end{matrix}\right\}$ na (a,b). (Pro $f(x)=x^4$ ryze konvexní, ale $f''(0)=0$)

Důkaz

Nechť (i) $\Rightarrow$ Z Věty 18 plyne pro $a \le \alpha < x < y < \beta \le b$

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \overset{(iii)}{\le} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(\beta)-f(y)}{\beta-y} = \frac{f(y)-f(\beta)}{y-\beta}$$

tj. $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \le \frac{f(y)-f(\beta)}{y-\beta}$

Provedeme $\lim_{x\to\alpha^+}$, $\lim_{y\to\beta^-}$:

tj. $f'(\alpha) = f'_+(\alpha_+) \le f'_-(\beta_-) = f'(\beta)$ (α,β vnitřní body) ~~jinak pro krajní body bez poznámek~~ (nekonečno nevadí)

a tedy derivace je ~~rostoucí~~ neklesající funkce v (a,b), proto $f''(x) \ge 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

(i) $\Leftarrow$ resp. (ii)

Je-li $f''(x) \left\{\begin{matrix}>0\\ \ge 0\end{matrix}\right\}$ v (a,b), potom je $f'(x)$ v (a,b) $\left\{\begin{matrix}\text{rostoucí}\\ \text{neklesající}\end{matrix}\right\}$. Tedy $\forall \xi_1,\xi_2 \in (a,b),\ \xi_1<\xi_2$ platí $\left\{\begin{matrix}f'(\xi_1) < f'(\xi_2)\\ f'(\xi_1) \le f'(\xi_2)\end{matrix}\right\}$.

Tedy z Lagrangeovy věty odtud Věta V9 charakteristika V18(iii)

$$f'(\xi_1) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \left\{\begin{matrix}<\\ \le\end{matrix}\right\} \frac{f(z)-f(y)}{z-y} = f'(\xi_2) \quad \forall\, x,y,z \in [a,b],\ x<y<z,$$ což jsme chtěli dokázat. ■

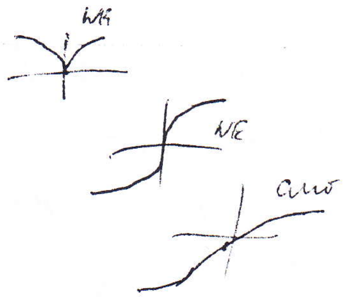
Definice 5 (inflexní bod)

Nechť $x_0 \in D_f$ a nechť $f'(x_0)$ existuje (tj. vlastní). Řekneme, že $x_0 \in D_f$ je inflexní bod, jestliže funkce f v tomto bodě přechází z konkávity na konvexitu a naopak, tj. $\exists \delta > 0$ tak, že f je $\begin{Bmatrix}\text{konkávní}\\ \text{konvexní}\end{Bmatrix}$ v $U^{*,-}_\delta(x_0)$ a $\begin{Bmatrix}\text{konvexní}\\ \text{konkávní}\end{Bmatrix}$ v $U^{*,+}_\delta(x_0)$.

Věta 20 (~~postačující~~ nutná podmínka pro inflexní bod; ~~...~~)

(i) Nechť x_0 je inflexní bod a $f''(x_0)$ existuje. Potom $f''(x_0)=0$.

~~(ii) Nechť $n \geq 2$, $f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$~~
~~(α) Je-li n liché, pak má f v x_0 inflexní bod~~
~~(β) Je-li n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak~~



Důkaz

Nemohu srovnávat jen s $f'(x_0)$!?

Nechť např. $f''(x_0) > 0$. Potom je na jistém okolí bodu x_0 první derivace $f'(x)$ rostoucí funkce a tudíž je (analogicky jako ve větě 19 (ii)) funkce f na tomto okolí vypuklá konvexní, což je spor. Analogicky pro případ $f''(x_0) < 0$. Nutně tedy $f''(x_0) = 0$.

z def. $f''(x_0)$ $\exists \delta$: $f'(x)$ ex. na $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. (Lagrange + V18 (i) $\Leftrightarrow$ (iii)) $\Rightarrow$ neboť x_0 je inflexní bod, v obou případech vede ~~...~~ f' neklesá na $(x_0-\delta, x_0)$, f' nerostoucí na $(x_0, x_0+\delta)$ nebo f' roste na $(x_0-\delta, x_0)$ a f' klesá na $(x_0, x_0+\delta)$ (celkově V16 aplikovaná na f') $\Rightarrow$ v x_0 má f' lok. extrém. Tedy $0 = (f')'(x_0) = f''(x_0)$.

5.6 Asymptoty křivky

Definice 6 Nechť $f(x)$ je definována na (a,b), $b \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ $(-\infty)$. Potom říkáme, že funkce f má v bodě b vertikální asymptotu. Analogicky pro druhý krajní bod a.

Definice 7

Nechť $f(x)$ je definována na $(a,+\infty)$. Řekneme, že přímka $y = kx+q$, $k,q \in \mathbb{R}$, je asymptota fce $f(x)$ pro $x \to +\infty$, jestliže $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (kx+q)] = 0$. Analogicky pro $x \to -\infty$ ($f(x)$ def. na $(-\infty, b)$).

Věta 21

Přímka $y = kx+q$ je asymptotou fce $f(x)$ pro $x \to \pm\infty$ $\Leftrightarrow$ (i) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$

(ii) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx = q$.

Důkaz

$\Rightarrow$ Je-li $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx - q) = 0$, je též $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)-kx-q}{x} = 0$ tj. $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ a tedy také $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = q$.

$\Leftarrow$ Obráceně, nechť k, q splňují (ii). Pak $\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx - q) = 0$. ■

Př: $f(x) = x^2$ (přičemž nejde vlastně), $g(x) = \sqrt{x}$ („nesplňuje" ...) nemá asymptotu v $+\infty$

5.7 Průběh funkce místo nej. 4 příklady

Cílem této části je ukázat, jak ze znalostí předpisu $y = f(x)$ (a případně derivací f) získat relativně slušnou informaci o grafu f tak, abychom ho mohli načrtnout.

Postup budeme ilustrovat přímo na příkladech.

Příklad 11 Vyšetřete průběh fce: $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ (na maximálních množinách definice)

(1) $D_f = \{x \in \mathbb{R};\ -1 \leq \frac{2x}{x^2+1} \leq 1\}$ ale $|2x| \leq x^2+1 \Rightarrow \left|\frac{2x}{x^2+1}\right| \leq 1$ tj. $D_f = \mathbb{R}$

(2) Fce je spojitá na $\mathbb{R}$

(3) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \arcsin \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \arcsin 0 = 0$. + body nespojitosti

$R_f: [-1,1]$ - (musíme se ujistit později)

(4) Průsečíky s osami

$f(0) = 0$ a dále $\frac{2x}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow$ jen $(0,0)$.

Obecné : Speciální vlastnosti

(5) Sudost/lichost $f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{1+(-x)^2}\right) = -\arcsin \frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow$ fce je lichá, tak stačí vyšetřit v $[0,\infty)$

(6) Periodicita - fce není periodická

(7) Počítáme $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 2x\cdot(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1-x^2)^2}} = \frac{2\,\mathrm{sign}(1-x^2)}{1+x^2} \qquad x \neq \pm 1$$

$\Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = +1 \qquad f'(0) = 2$ (Věta o limitě derivace!)

(8) Počítáme $f''(x)$

$$f''(x) = -\frac{2\cdot 2x\ \mathrm{sign}(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x\ \mathrm{sign}(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \qquad x \neq 1$$

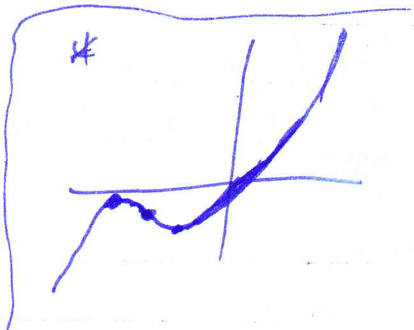
f'' neex. v $x = 1$, $f''(x) = 0$ v $x = 0$

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

(9) Tabulka

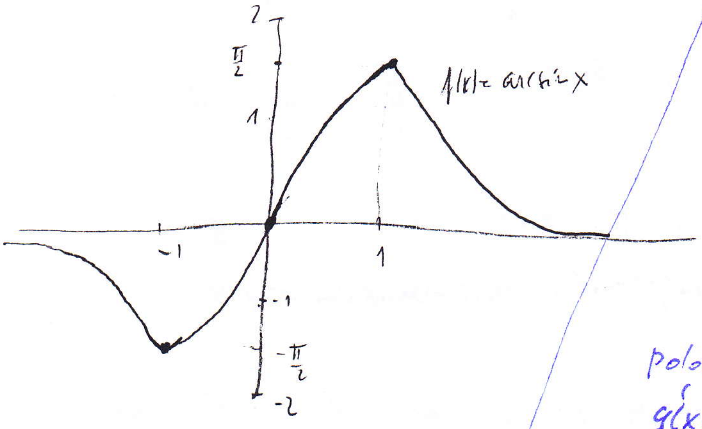
		$\boxed{0}$	$(0,1)$	$\boxed{1}$	$(1,\infty)$	$\boxed{\infty}$
liché	f	0	+	$\frac{\pi}{2}$	+	0
sudé	f'	2	+	1 neex. -1	-	0
liché	f''	0	-	neex	+	
		inf. bod	rostoucí konk.	lok. max. (i glob.)	klesá konvex.	

$f'(1) > 0$



(10) Asymptoty: vertikální nejsou

v $+\infty$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ asymptota je $y = 0$



Př: $f(x) = (x-1)e^{(x-1)^2}$ lichá vzhledem k $x=1$, nebo substituce $\ell(y) = y e^{y^2}$

Př: (pod-průšečík) $f(x) = e^{x^2+4x+1} \cdot x$

$f'(x) = e^{x^2+4x+1}(2x^2+x+2) = 2 \cdot e^{x^2+4x+1}\left(x-\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)\cdot\left(x-\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$

tedy $f(x)$ roste na $\left(-\infty, -1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a na $\left(-1+\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$, klesá na $\left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f''(x) = e^{x^2+4x+1} \cdot 2 \cdot (2x^3+8x^2+11x+4)$

Položme $g(x) = 2x^3+8x^2+11x+4$, spoj., $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \pm\infty$

$g'(x) = 6x^2+16x+11 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ $(6\cdot 11\cdot 4 = 264 > 256 = 16\cdot 16)$

Tedy $\exists!\, x_0 \in \mathbb{R}: g(x) = 0$, $g(-1) = -1$, $g\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{4}$

Celkově $f(x)$ konkávní na $(-\infty, x_0)$ a $x_0 \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \subset \left(-1-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *

konvex na (x_0, ∞)

Definice 8 (Prostor spojitých, spojitě diferencovatelných funkcí)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Označme

$$C(M) = \{ f: M \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C}) : f \text{ je spojitá v } M \}$$

$$k \geq 1 \quad C^k(M) = \{ f: M \to \mathbb{R}\ (\mathbb{C}) \mid f^{(i)} \in C(M),\ i = 1, \dots, k \}$$

$$C^\infty(M) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(M).$$

Cvičení: Ukažte, že prostory $C^k(M)$, $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ jsou vektorové prostory vzhledem k operaci sčítání $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ a násobení konstantou $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Příklad 12

$\sin, \cos, \exp \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\ln \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$

? Existuje fce, která je nenulová ona omezeném intervalu a jinak je nulová, a z $C^\infty(\mathbb{R})$?

Odpověď ano: $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$

Ukažte si to dokázat sami, jinak viz Cvičení. (i příště).

5.8 Taylorův polynom

minut 1h přednášky

Cílem této kapitoly je ukázat, že za jistých předpokladů můžeme chování fce na okolí bodu x_0 popsat pomocí polynomů, s nimiž se dobře pracuje. Připomeňme, že jsme zjistili, že $f = o(g)$, $x \to x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Začněme

Lemma 1

Nechť f je spojitá v x_0. Potom existuje polynom $P_1(x)$ nejvýše stupně 1 takový, že $f(x) - P_1(x) = o(x-x_0)$, $x \to x_0 \iff \exists f'(x_0)$.

Důkaz

$\Rightarrow$ Nejprve platí $\lim_{x \to x_0} (f(x) - P_1(x)) = 0$ tj. $f(x_0) = P_1(x_0)$. Dále

$$P_1'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x) - P_1(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - P_1(x)}{x - x_0} + \frac{P_1(x) - P_1(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x) - P_1(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Tedy $\underline{P_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$

$\Leftarrow$ Zřejmě je $P_1(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ a přímým výpočtem máme, že $f(x) - P_1(x) = o(x - x_0)$, $x \to x_0$. ∎

Nyní se pokusíme ukázat „lepší" aproximaci – tj. takovou, aby $f(x) - P(x) = o(x - x_0)^n$, $x \to x_0$.

Věta 22 (Peanova) Stačí existence $f^{(n)}(x_0)$. (Pak $\exists U_\delta(x_0)$: $f^{(n-1)}(x)$ ex. a dl. spojitá) – vždyť tam nutně

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a nechť existuje $f^{(n)}$ na nějakém $U^*(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom $\exists!$ polynom $P_n(x)$ stupně nejvýše n takový, že $f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$, $x \to x_0$. Tento polynom má tvar

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

a nazývá se Taylorův polynom n-tého stupně funkce f v bodě x_0.

Pozn: V Kopáčkovi: stačí existence $f^{n}(x_0)$. Jiný dk.

Důkaz

Krok 1: Existence

Stačí ověřit, že skutečně platí, že $f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$ pro Peanovu definici výše, tj. ověřujeme

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}{(x-x_0)^n} = 0$$

Stačí použít n-krát l'Hospitalovo pravidlo. Zřejmě je vždy splněno, že $\lim_{x\to x_0}$ (čitatele) $= \lim_{x\to x_0}$ (jmenovatele) $= 0$ a po $n-1$ derivacích máme

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{n!\,(x-x_0)} = \frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)\right) = 0$$

(Pozor: Pokud je použito n-krát, museli bychom vědět, že $f^{(n)}(x)$ je spojitá v x_0 a to jsme nepředpokládali!!)

Krok 2 Jednoznačnost

Předpokládejme, že existují dva takové polynomy, $P_1(x)$ a $P_2(x)$. Nutně musí splňovat

$$\lim_{x\to x_0} \frac{P_1(x)-P_2(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0}\left(\frac{P_1(x)-f(x)}{(x-x_0)^n} + \frac{f(x)-P_2(x)}{(x-x_0)^n}\right) = 0+0=0.$$

Navíc, $P_i(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše n a tudíž $P_1(x)-P_2(x)$ je též polynom stupně nejvýše n. Označme $P(x)=P_1(x)-P_2(x)$.

Analogicky jako výše musíme použít l'Hospitalovo pravidlo. Nutně musí být $P(x_0)=0$ a tudíž

$0 = \lim_{x\to x_0} \frac{P'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \Rightarrow P'(x_0)=0$ atd. až konečně $P^{(n)}(x_0)=0$.

Ale tedy $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k \Rightarrow a_k = 0,\ k=0,1,\dots,n \Rightarrow P(x) = 0 \Rightarrow P_1(x)=P_2(x)$. ∎

(což jde i bez l'H. pr.: $P'(x_0) = \lim \frac{P(x)-0}{x-x_0} = 0$, $P''(x_0) = \lim \frac{P'(x)-P'(x_0)}{(x-x_0)^2} = 0$ atd..)

Dokázali jsme sice, že $f(x) - P_n(x) = o((x-x_0)^n)$, ale tento výsledek nám nic neříká o velikosti „chyby", tj. rozdílu $f(x) - P_n(x)$ na okolí x_0. Označme

$$R_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x).$$

Budeme se snažit $R_{n+1}(x)$ odhadovat. BÚNO: $x > x_0$

Idea: $R_2(x) = f(x) - P_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \overset{\text{Lagrange}}{=} f'(\xi)(x-x_0) - f'(x_0)(x-x_0) \overset{\text{Lagrange}}{=} f''(\xi_1)(x-x_0)^2$, $\xi \in (x_0,x)$, $\xi_1 \in (x_0,\xi) \subset (x_0,x)$.

My se pokusíme obdržet podobný obecnější výsledek (což je obtížný krok...)

Věta 23. (Odhad chyby Taylorova polynomu)

Nechť f je reálná fce definovaná na $[x_0,x]$ a nechť na (x_0,x) $\exists$ derivace až do řádu $n+1$. Nechť Φ je libovolná reálná fce na $[x_0,x]$ spojitá, která má derivaci Φ' na (x_0,x) a je nenulová. Potom $\exists\ \xi \in (x_0,x)$ tak, že

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!}\,\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{\Phi'(\xi)}\,f^{(n+1)}(\xi).$$

NE ↙ buď derivace vlastní do $n+1$ na $[x_0,x]$ nebo alespoň vlastní do n-té na $[x_0,x]$ + spojitá a $(n+1)$ derivace na (x_0,x)

Speciálně pro $\Phi(t) = (x-t)^{n+1}$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \qquad \text{(Lagrangeův tvar)}$$

$\Phi(t) = t$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(1-\theta)^n}{n!}(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)), \quad \theta \in (0,1). \qquad \text{(Cauchyův tvar)}.$$

Důkaz

Vezmeme fci $F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$. Zřejmě $F(x) = f(x) - f(x) = 0$
$F(x_0) = f(x_0) - P_n(x) = R_{n+1}(x)$.

Dále

$$F'(t) = \frac{d}{dt}\left[f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n\right] =$$

$$= 0 - f'(t) + f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) - \frac{f'''}{2!}(x-t)^2 + \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n =$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Nyní stačí použít Cauchyovu větu o střední hodnotě (V 11) pro funkce $F(t)$ a $\Phi(t)$, [illegible]. Podle ní existuje $\xi \in (x_0, x)$ tak, že

$$F(x_0) - F(x) = \frac{F'(\xi)}{\Phi'(\xi)}(\Phi(x_0) - \Phi(x))$$

Neboli $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{\Phi'(\xi)}$.

Volíme $\Phi(t) = (x-t)^{n+1}$ je $\frac{\Phi(x)-\Phi(x_0)}{\Phi'(\xi)} = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n}$ tj. Lagrangeův tvar zbytku, zvolíme $\Phi(t) = t$, $\xi = \theta(x-x_0) + x_0$ a dostáváme Cauchyův tvar. ∎

Viz. V/6 V/20

Příklad 13

Spočtěte pomocí Taylorova rozvoje e^2 s přesností $x = 0{,}01$. $\frac{1}{1000}$

Rozvoj v $x=0$

$P_n(x) = 1 + \frac{1}{1!}2 + \frac{1}{2!}2^2 + \frac{1}{3!}2^3 + \dots$ $f(x) = e^x$ $f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow e^2 = 1+2+2+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}+\frac{32}{120}+\frac{64}{720}+\frac{128}{720\cdot 7}+\frac{256}{8\cdot 7\cdot 720}+\frac{512}{9\cdot 8\cdot 7\cdot 720} \doteq 7.3887$

$e^2 \doteq 7.3891 \Rightarrow$ chyba $< 0{,}0004$

Chyba: (Lagrange)

$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^n$ Odhad: $f\ e^x \le 10$ $x \in (0,2)$

tj. $R_{n+1}(x) \le \frac{2^n \cdot 10}{(n+1)!} \downarrow 0$

Protože $R_{n+1}(x) \to 0$ stačí najít n tak, aby $\frac{2^n}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}$. Lze spočítat metodou pokusů, že je toto splněno pro $n = 9$ $(10! > 2^9 \cdot 1000)$.

$13! \geq 10^4 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$
$\geq 10^4\, 2^{3+3+2+2+2+2+1+1}$
$\geq 10^4 \cdot 2^{13}$

Navíc f má všechny derivace na nějakém okolí x_0.

Zřejmě platí: $\forall x \in U(x_0): \lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0$.

Cvičení: Dokažte si výše uvedenou ekvivalenci.

Budeme nyní dokazovat tvary Taylorových polynomů pro některé funkce, většinou hledáme intervaly na kterých platí konvergence.

(Tady – použití předchozí, ale někdy je jiný)

Věta 24 (Taylorovy rozvoje některých fcí pro $x_0 = 0$)

$e^x = \cancel{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $x \in R$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in R$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in R$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \qquad \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \forall x \in R$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \forall x \in R$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \qquad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad |x|<1,\ x=1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \qquad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad |x|<1,\ x=-1$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \qquad (1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad |x|<1, \quad \alpha \in R$$

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, \ \alpha \in R$$

Dk

Výpočet derivací – DÚ. Budeme dokazovat jen konvergenci (+ odhad $o(\dots)$ je z Peanovy věty)

(1): $|R_{n+1}(x)| \le \frac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \le C \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \Rightarrow$ pro pevné $x \in R$ jistě $R_{n+1}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \to$ viz níže

Dk: Tvrzení Je-li $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Dk $|a_n| \le a_0 \cdot q^n$, $|q|<1$

a tedy $\frac{R_{n+2}}{R_{n+1}} = \frac{1}{n+2} \cdot x \to 0$ Ne, rozumné ξ!

(pozn: skoro vše Lagrange
Cauchy jen: $\ln(1+x)$ $x \in (-1,0)$
$(1+x)^\alpha$ $x \in (-1,1)$)

(2) $f(x) = \cos x$ $f'(x) = -\sin x$ $f''(x) = \cos x$ atd.

$\Rightarrow |R_{n+1}(x)| \le \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0$ viz výše

(3) $\sin x$ – analogicky jako $\cos x$

(4) (5) $\cosh x$, $\sinh x \to$ důsledek definice pro

(6) $(\ln(1+x))^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \Rightarrow$ (Cauchyův tvar)

$|R_{n+1}(x)| \le \frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} |x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{|1+\theta x|} \frac{|1-\theta|^n}{|1+\theta x|^n}$ $(1+\theta x > 1-\theta) \le \frac{|x|^{n+1}}{1+\theta x} \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0$ pro $|x|<1$

Je-li $x=1 \Rightarrow R_{n+1}(1) =$ Lagrange ~~$\frac{(1-\theta)^n}{(1+\theta)^{n+1}} \to 0$ $n\to\infty$~~ $\left|\frac{1^{n+1}}{(n+1)!} \frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^n}\right| \le \frac{1}{n+1} \to 0$ $\xi \in (0,1)$

(7) plyne z (6)

(8) ~~Cauchyův tvar zbytku důkaz:~~

~~$|R_{n+1}(x)| = \frac{(1-\theta)^n}{n!} x^{n+1} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$~~ $\le K \cdot \frac{|x|^{n+1}}{|1+\theta x|} \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \to 0$ ~~$|x|<1$~~

nezávislé na n

~~$R_{n+1}(1) \dots \to 0 \dots$~~

~~$\frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(\frac{1}{2}-n)}{n(n-1)\dots 2\cdot 1}$ $\frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\dots(\frac{1}{2})}{n(n-1)\dots 1}$~~

(9) bez důkazu (viz Jarník)

Tvrzení: $\alpha \in \mathbb{R}$, $q \in (-1,1)$. Pak $\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} q^n = 0$.

Dk (i) $\alpha \geq 0$: pak $\exists k \in \mathbb{N}_0: k \leq \alpha \leq k+1$

a $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)(\alpha-k-1)\dots(\alpha-n)}{1.2.\dots.n}$, ale $|\alpha-k-1| \leq 1$, $|\alpha-k-2| \leq 2 \dots$

tedy $\left|\binom{\alpha}{n}\right| \leq \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{(n-k)(n-k+1)\dots n} \leq \alpha.(\alpha-1)\dots(\alpha-k) = C(\alpha)$ a $C(\alpha).q^n \to 0$

(ii) $\alpha < 0$: pak $\exists k \in \mathbb{N}_0: k \leq |\alpha| \leq k+1$

a $\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \frac{\alpha(|\alpha|+1)(|\alpha|+2)\dots(|\alpha|+n)}{1.2.3\dots k.(k+1)\dots n}$, ale $(k+1) \geq \alpha$, $k+2 \geq \alpha+1, \dots$

tedy $\left|\binom{\alpha}{n}\right| \leq \frac{(|\alpha|+n-k+1).(|\alpha|+n-k)\dots(|\alpha|+n)}{1.2\dots k} \leq (|\alpha|+n)^k \leq (2n)^k$ pro $n \geq |\alpha|$.

Pak $0 \leq \lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} q^n \leq \lim_{n\to\infty} 2^k n^k q^n = 0$ □

To se využije spolu s Cauchyovým tvarem zbytku v důkazu $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $x \in (-1,1)$.

Tvrzení: (i) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

(ii) $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

Dk (i) $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$

$\operatorname{arctg} 0 = 0 \Rightarrow \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + h(x)$, kde $h(0) = 0$ a $h'(t) = \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2}$

Tedy $|h(x)| = |h(x) - h(0)| = |h'(\xi)|.|x-0| = \left|\frac{\xi^{2n+2}}{1+\xi^2}\right| |x| \leq |x^{2n+3}| = o(x^{2n+2})$ a $h \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(ii) $\arcsin' x = (1-x^2)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{2!}(-x^2)^2 + \dots + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\dots(-\frac{2n-1}{2})}{n!}(-x^2)^n + o((x^2)^n)$

$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \dots + \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n} x^{2n} + g(x)$, kde $g(x) = x^{2n} \cdot \psi(x)$

$g \in C^\infty((-1,1))$, $\psi(0) = 0$

$\arcsin 0 = 0 \Rightarrow \arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \dots + \frac{1.3.5\dots 2n-1}{2.4.6\dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + h(x)$, kde $h(0) = 0$

$h'(t) = g(t)$

Tedy $|h(x)| = |h(x) - h(0)| = |h'(\xi)||x| = |\xi^{2n+2}||\psi(\xi)|.x \leq K.|x|^{2n+3} = o(x^{2n+3})$.

Příklad 14 Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{[1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)] - [1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)]}{x^2} = \boxed{1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cosh x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\cancel{1}+\cancel{x}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)) - (\cancel{1}+\frac{x^2}{2}+o(x^3)) - (\cancel{x}-\frac{x^3}{6}+o(x^4))}{x^3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

Metody hledání Taylorových polynomů pro komplikovanější fce

~~Připomínka~~

Cvičení: f, g, h fce, $\lambda \neq 0$ konstanta:

(i) $o(f) \pm o(f) = o(f)$

(ii) $o(f)\, o(g) = o(fg)$

(iii) $h = o(g),\ g = o(f) \Rightarrow h = o(f),\ h+g = o(f)$

(iv) $o(\lambda f) = o(f)$.

Mějme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

(1) $$f(x)+g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k)x^k + o(x^n)$$ – plyne z (i)

(2) $$f(x)g(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_n x^n + o(x^n))(b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + o(x^n)) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + \dots + o(x^n) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} x^k + o(x^n)$$

(3) $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(0) = b_0 \neq 0$ máme dvě možnosti (či dělení polynomů)

a) metoda neurčitých koeficientů tj. hledáme polynom stupně n tak, aby

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + o(x^n) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)},$$ vynásobím fcí g a řeším soustavu rovnic.

b) Napíšeme si $$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{b_0} \frac{1}{1-\underbrace{(-\frac{b_1}{b_0}x - \frac{b_2}{b_0}x^2 \dots)}_{G}} = \frac{1}{b_0}\frac{1}{1-G} = \frac{1}{b_0}(1+G+G^2+\dots)$$

a podle vynásobíme f dle pravidla pro součin

(4) $(f\circ g)(x)$ – zde musí být $b_0 = 0$ (aby $g(0)=0$) a pak

$$(f\circ g)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \Big(\sum_{l=1}^{n} b_l x^l\Big)^k + o(x^n)$$

zde budou členy s vyšší mocninou

Př. k cvičení: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

Komplikace: Taylor pro $e^{-\frac{x^2}{2}}$ je lehčí než pro e^x

L'Hospital naopak obtížnější

Ještě lepší: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^5} - 1 - x^5}{x^{10}}$

Př: $e^{\sin x}$, polynom třetího stupně:

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6} + o(x^3),$$ neboť $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} = 1$ a když $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\sin^3 x}$ tedy $f = o(\sin^3 x) \Leftrightarrow f = o(x^3)$

$$= 1 + (x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)) + \frac{(x+o(x^2))^2}{2} + \frac{(x+o(x^2))^3}{6} + o(x^3)$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Příklad 15

Najdi Taylorův polynom (3. stupně) funkce $\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}}$

Víme: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \binom{\frac12}{1}x + \binom{\frac12}{2}x^2 + \binom{\frac12}{3}x^3 + o(x^3) = 1 + \frac12 x - \frac18 x^2 + \frac1{16}x^3 + o(x^3)$$

Řešení:

(a) dělení polynomů: $\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{1 + \frac12 x - \frac18 x^2 + \frac1{16}x^3 + o(x^3)} =$

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) : \left(1 + \frac12 x - \frac18 x^2 + \frac1{16}x^3 + o(x^3)\right) = x - x^2 + \frac{23}{24}x^3 + o(x^3)$$

$$-\left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right)$$

$$-x^2 + \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$$

$$-\left(-x^2 - \frac12 x^3 + o(x^3)\right)$$

$$\frac{23}{24}x^3 + o(x^3)$$

(b) metoda neurčitých koeficientů

$$\left(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + o(x^3)\right) \cdot \left(1 + \frac12 x - \frac18 x^2 + \frac1{16}x^3 + o(x^3)\right) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\alpha_0 = 0$$

$$\alpha_1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = +1$$

$$\alpha_2 + \frac12 \alpha_1 = -\frac12 \Rightarrow \alpha_2 = -1$$

$$\alpha_3 \cdot 1 + \frac12(-1) - \frac18 \cdot 1 = \frac13 \Rightarrow \alpha_3 = \frac{23}{24}$$

(c) „geometrické řady"

$$\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{1 + \frac12 x - \frac18 x^2 + \frac1{16}x^3 + o(x^3)} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{1 - \left(-\frac12 x + \frac18 x^2 - \frac1{16}x^3 + o(x^3)\right)} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\right) \cdot \left(1 + \left(-\frac12 x + \frac18 x^2 - \frac1{16}x^3 + o(x^3)\right) + (\ )^2\right)$$

dál nemá cenu

atd.

$$= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac12 x - \frac18 x^2 + \frac14 x^2 + o(x^2)\right) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + x^3\left(\frac13 + \frac14 + \frac18\right) + o(x^3)$$

(d) $\ln(1+x) \cdot (1+x)^{-\frac12}$

DÚ

(e) přímý výpočet derivací

---

*V16: (Postačující podmínka pro ∃ globálního extrému)

Nechť $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ má vlastní na (a,b) $f''(x) \geq 0$ (≤ 0). Pokud pro jisté $z \in (a,b)$ je $f'(z) = 0$, pak je f má v bodě z globální max. ≥ 0 (min.) v (a,b).

Dk $f(x) = f(z) + \underbrace{f'(z)}_{0}(x-z) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-z)^2 \geq f(z)$ (resp. $\leq f(z)$). ∎