Diferenciální rovnice

(1) $y' + p(x)y = f(x)$, $p, q \in C((a,b))$ lineární diferenciální rce 1.ho řádu

$y(x_0) = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

(2) $y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$, $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $f \in C((a,b))$ lineární diferenciální rovnice 2.ho řádu s konst. koeficienty

$y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$

Definice: Nechť $k \in \mathbb{N}_0$. Řekneme, že funkce f je k-krát spojitě diferencovatelná, $f \in C^k((a,b))$, jestliže $f^{(k)}$ je spojitá na (a,b)

($\Leftrightarrow f, f', f'', \dots f^{(k)}$ spoj. na (a,b), neboť $f^{(k)}$ vlastní $\Rightarrow f^{(k-1)}$ spojité)

Definice: (i) $y(x) \in C^1((a,b), \mathbb{R})$ je řešením (1) na (a,b), jestliže

$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$, $y(x_0) = y_0$.

(ii) $y(x) \in C^2((a,b), \mathbb{R})$ je řešením (2) na (a,b), jestliže

$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

Příklady: a) $y' - ay = 0$ model vývoje populace

b) $y'' + ay = 0$, $a > 0$ kyvadlo

c) $y' = f(x)$ je speciální případ (1)

$y = \int f(x)\,dx + C$

je-li f spojitá pak zřejmě $F(x) = \int f(x)\,dx$ existuje, primitivní fce není určena jednoznačně, ale máme-li danou počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$, pak $\exists!$ řešení

(stačí zvolit $C = y_0 - F(x_0)$, je-li F jedna pevně zvolená primitivní fce)

V celé kapitole použijeme:

Věta: Nechť $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a,b), pak $\exists$ primitivní fce k f na (a,b).

Řešení rovnice (1) metodou integračního faktoru

(= metoda výpočtu a zároveň důkaz existence řešení)

$y'(x) + p(x)y(x) = f(x) \quad / \cdot e^{P(x)}$, kde $P(x) = \int p(x)\,dx$

$y'(x)e^{P(x)} + p(x)e^{P(x)}y(x) = (ye^{P(x)})' = f(x)e^{P(x)}$ (primitivní fce existuje, neboť p je spojitá)

tedy $ye^{P(x)} = \int f(x)e^{P(x)}\,dx \overset{\text{ozn}}{=} Q(x)+C$ primitivní fce opět existuje

Obecné řešení $y(x) = Q(x)e^{-P(x)} + Ce^{-P(x)}$, $C\in\mathbb{R}$, $x\in(a,b)$

výběr jednoho: $e^{-P(x)}>0 \ \forall x\in(a,b) \Rightarrow \exists!\, C\in\mathbb{R}: y(x_0)=y_0$

Poznámky: (i) aditivní konstanta u $\int p(x)\,dx = P(x)+c$ nehraje roli, neboť $e^{P(x)+c} = e^{P(x)}\cdot k$, $k>0$ a pak $(kye^{P(x)})' = kf(x)e^{P(x)} \Leftrightarrow (ye^{P(x)})' = f(x)e^{P(x)}$

(ii) odvození integračního faktoru $\varphi(x)=e^{P(x)}$:

chceme $\varphi(x)y'(x) + \varphi(x)p(x)y(x) = (\varphi(x)y(x))' = \varphi'(x)y(x) + y'(x)\varphi(x)$

musí tedy platit $\varphi'(x) = \varphi(x)\cdot p(x)$

tuto rovnici zatím neumíme řešit, zřejmě splňuje $e^{\int p(x)\,dx}$

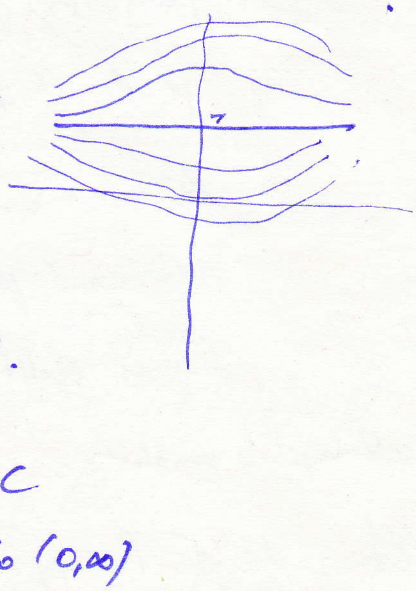
Nám stačí vědět, že lze volit $\varphi(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ ... nekonstruktivní důkaz.

Př: $y'+xy=x$, $y(0)=2$

Ř: $(ye^{\frac{x^2}{2}})' = xe^{\frac{x^2}{2}}$ tedy $Q(x) = \int xe^{\frac{x^2}{2}}\,dx = e^{\frac{x^2}{2}}+C$

obecné řešení $y(x) = 1+Ce^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$, $C\in\mathbb{R}$

poč. podmínka $y(0)=2 \Rightarrow \underline{C=1}$



Pozn: Grafu řešení (1) se říká integrální křivky rce (1).

Př: $y'+\frac{1}{x}y = \sin x$, $y(\pi)=7$

$(xy)' = x\sin x$, $Q(x) = \int x\sin x\,dx \overset{\text{per partes}}{=} -x\cos x + \sin x + C$

tedy $y(x) = -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}$, $C\in\mathbb{R}$, $x\in(-\infty,0)$ nebo $(0,\infty)$

Ale $y(\pi)=7 \Rightarrow C=6\pi \Rightarrow y(x) = -\cos x+\frac{\sin x}{x}+\frac{6\pi}{x}$, $x\in(0,\infty)$.

Obecnější pohled na rovnice (1) a (2)

Jedná se o rovnice typu

$$L(y) = f \quad \text{, kde } L \text{ je lineární diferenciální operátor}$$

$$(\text{tj } L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v))$$

u nás $L(y) = y' + p(x)y$ nebo $L(y) = y'' + a_1 y' + a_0 y$

$L: C^1(a,b) \to C(a,b)$ $\qquad$ $L: C^2(a,b) \to C(a,b)$

z linearity L plyne: y, z dvě řešení, tj $L(y) = f$, $L(z) = f$

odečteme $L(y) - L(z) = L(y - z) = 0$

Odtud plyne postup, jak najít obecné řešení rovnice (1) či (2)
stačí najít jedno řešení původní rovnice (1) či (2) a pak
přičíst obecné řešení rovnice $L(y) = 0$. (homogenní rovnice)

Zpět k (1), chybí nám ještě jednoznačnost:

Dk: y, z řeší (1), $y(x_0) = z(x_0) = y_0$. Pak zřejmě $w = y - z$ řeší homogenní rovnici;
tedy $y'(x) - z'(x) = -p(x)(y(x) - z(x))$ tj $w'(x) + p(x)w(x) = 0$ a $w(x_0) = 0$.
ale po vynásobení $e^{\int p(x)\,dx}$ dostáváme $(w(x)e^{P(x)})' = 0 \cdot e^{P(x)} = 0$
tedy $w(x)e^{P(x)} = k, k \in \mathbb{R}$, ale $w(x_0) = 0 \Rightarrow k = 0 \xRightarrow{e^{P(x)} \neq 0} w(x) \equiv 0$ □

Aplikace výše uvedeného postupu na rovnici (2):

1. krok: Napřed vyřešíme rovnici (3) $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ homogenní rovnice
2. krok: najdeme jedno řešení (2) a sečteme s obecným řešením (3)
3. krok: vybereme jedno řešení (2) splňující počáteční podmínky $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$

1. krok: **Věta.** ~~Dim~~ Množina řešení (3) je lineární podprostor prostoru spojitých funkcí dimenze 2.

Dk: lineární podprostor plyne z linearity L.

dimenze ≥ 2 ukážeme pomocí konstrukce řešení (3).

dimenze ≤ 2 plyne z věty o jedn. pro soustavy lineárních diferenciálních rovnic 1-ho řádu ($y''+a_1y'+a_0y=f(x) \iff \begin{array}{l} y'=z \\ z'=-a_1z-a_0y+f \end{array}$)

zatím nejsme teoreticky dostatečně vybaveni (neumíme legálně vektorové fce) $\square$

řešme tedy (3) $\quad y''+a_1y'+a_0y=0$

zkusme $y=e^{\lambda x}$, $\lambda\in\mathbb{C}$ za hledanou funkci, pak

(3) $\iff \underbrace{(\lambda^2+a_1\lambda+a_0)}_{p(\lambda)\ \text{charakteristický polynom}} e^{\lambda x}=0$

pokud tedy λ řeší $p(\lambda)=0 \Rightarrow e^{\lambda x}$ řeší (3).

Mohou nastat 3. možnosti:

(a) dva reálné kořeny $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$. pak dostáváme $f_1(x)=e^{\lambda_1 x}$, $f_2(x)=e^{\lambda_2 x}$ řeší (3)

(b) $\lambda_1=a+bi$, $\lambda_2=a-bi$, $a,b\in\mathbb{R}$: pak $\tilde{f}_1=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)$ a $\tilde{f}_2(x)=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx)$ řeší (3).

ale z linearity $f_1(x)=\frac{\tilde{f}_1+\tilde{f}_2}{2}=e^{ax}\cos bx$ a $f_2(x)=\frac{\tilde{f}_1-\tilde{f}_2}{2i}=e^{ax}\sin bx$ rovněž řeší (3), navíc už se jedná o reálné fce.

(c) dvojnásobný kořen $\lambda\in\mathbb{R}$: zřejmě $f_1=e^{\lambda x}$ řeší (3), ta má navíc tvar $y''-2\lambda y'+\lambda^2y=0$

ukážeme, že $f_2(x)=xe^{\lambda x}$ rovněž řeší (3).

pak $f_2'(x)=(1+\lambda x)e^{\lambda x}$

$f_2''(x)=(2\lambda+\lambda^2x)e^{\lambda x}$ dosaďme do (3): $f_2''-2\lambda f_2'+\lambda^2f_2 = \left[(2\lambda+\lambda^2x)-2\lambda(1+\lambda x)+\lambda^2x\right]e^{\lambda x}=0$.

Tedy ve všech třech případech máme $f_1(x),f_2(x)$ takové, že $C_1f_1(x)+C_2f_2(x)$ řeší (3), $c_1,c_2\in\mathbb{R}$. $\{f_1(x),f_2(x)\}$ nazýváme fundamentální systém (2) resp. (3).

Lineární nezávislost budeme zkoumat ~~[illegible]~~ 3. později.

Krok 2 = hledání partikulárního řešení. Máme tři možnosti

(i) uhodnutí

(ii) Věta o speciální pravé straně

(iii) Obecný postup, variace konstant

ad (ii) **Věta**: Nechť $f(x) = e^{\mu x}(S(x)\sin\nu x + T(x)\cos\nu x)$, S, T polynomy, $m = \max(\text{st.} S(x), \text{st.} T)$.

Nechť k je násobnost čísla $\mu + i\nu$ coby kořene charakteristické rovnice (def: $k = 0$ pro $\mu + i\nu$, které není kořenem) $\Rightarrow k \in \mathbb{N}_0$.)

Pak $\exists$ polynomy $\tilde{S}(x), \tilde{T}(x)$ se ~~stupněm~~ nejvýše m takové, že

$$y_p(x) = e^{\mu x} x^k (\tilde{S}(x)\sin\nu x + \tilde{T}(x)\cos\nu x) \text{ řeší (2)}$$

poznámky: (i) Polynomy $\tilde{S}(x), \tilde{T}(x)$ dosadíme do rovnice a najdeme je metodou neurčitých koeficientů

(ii) pozor, i když $S(x) = 0$ nebo $T(x) = 0$, pak mají obecně oba $\tilde{S}(x)$ a $\tilde{T}(x)$ stupeň m, tj. i pokud se funkce $\sin\nu x$ či $\cos\nu x$ nenalézá na pravé straně (2), ještě pořád se může vyskytovat v řešení

(iii) Větu nebudeme dokazovat, postačí, když v konkrétní situaci nalezneme $\tilde{S}(x)$ a $\tilde{T}(x)$, je to důkaz, že věta šla v naší situaci použít.

Připomenutí na krok 2(iii) a krok 3:

Definice: Nechť $\{f_1, f_2\} = FS\ (2)$. Pak definujeme

$$W(f_1, f_2)(x) = \det\begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{pmatrix}$$

Wronského determinant (Wronskián)

<u>Tvrzení</u>: Nechť $\{f_1, f_2\} = FS$ (2). Pak $W(f_1,f_2)(x) \neq 0$ $\forall_{x \in \mathbb{R}}$.

Dk: (i) případ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, tj $FS = \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$

$$\text{Pak } W(f_1,f_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0$$

(ii) $\lambda_1 = a+bi$, $\lambda_2 = a-bi$, $a,b \in \mathbb{R}$, tj $FS = \{e^{ax}\cos bx, e^{ax}\sin bx\}$

$$\text{Pak } W(f_1,f_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{ax}\cos x & e^{ax}\sin x \\ e^{ax}(a\cos x - \sin x) & e^{ax}(a\sin x + \cos x) \end{pmatrix}$$

$$= (a\cos x\sin x + \cos^2 x - a\cos x\sin x + \sin^2 x)e^{2ax} = e^{2ax} \neq 0$$

(iii) $\lambda \in \mathbb{R}$, dvojnásobný kořen $FS = \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$

$$\text{Pak } W(f_1,f_2)(x) = \det\begin{pmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & (1+\lambda x)e^{\lambda x} \end{pmatrix} = (1+\lambda x - \lambda x)e^{2\lambda x} = e^{2\lambda x} \neq 0$$

$\square$

Zpět ke kroku 2. (iii)

Víme, že $C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$ řeší (3).

Zkusme hledat řešení (partikulární) (2) jako

$$y_p(x) = C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x)$$

pak $$y_p'(x) = C_1(x) f_1'(x) + C_2(x) f_2'(x) + \underbrace{C_1'(x) f_1(x) + C_2'(x) f_2(x)}_{\text{položme rovné } 0 \text{ (trik)}}$$

pak $$y_p''(x) = C_1(x) f_1''(x) + C_2 f_2''(x) + C_1'(x) f_1'(x) + C_2'(x) f_2'(x)$$

Dosadíme $y_p(x)$ do rovnice (2).

Zřejmě $f_1''(x) + a_1 f_1'(x) + a_0 f_1(x) = 0$ neboť f_1 je řešení (3)

tedy i $C_1(x) f_1''(x) + C_1(x) a_1 f_1'(x) + a_0 C_1(x) f_1(x) = 0$

podobně pro $f_2(x)$.

Několik členů se tedy po dosazení do rovnice vyruší, zbyde nám tedy soustava

$$C_1'(x) f_1(x) + C_2'(x) f_2(x) = 0$$
$$C_1'(x) f_1'(x) + C_2'(x) f_2'(x) = f(x)$$

dle Tvrzení je však $W(f_1,f_2) \neq 0$ tedy $\exists!$ řešení $C_1'(x), C_2'(x)$ této soustavy. Podrobněji, Cramerovo pravidlo dává

$$C_1'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ f & f_2' \end{pmatrix}}{W(f_1,f_2)} = \frac{-f(x) f_2(x)}{f_1(x) f_2'(x) - f_1'(x) f_2(x)}$$

$$C_2'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ f_1' & f \end{pmatrix}}{W(f_1,f_2)} = \frac{f(x) f_1(x)}{f_1(x) f_2'(x) - f_1'(x) f_2(x)}$$

Protože však v obou vzorcích není jmenovatel nikdy 0 a všechny funkce jsou spojité, dostáváme existenci $\int C_1'(x)\,dx$ a $\int C_2'(x)\,dx$.

Pozn: Aditivní konstanta při integraci $C_1'(x)$ a $C_2'(x)$ nic neovlivní.

Řešení je tedy: $y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_1(x) f_1(x) + C_2(x) f_2(x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $x \in (a,b)$

Krok 3: Máme tedy řešení (2) ve tvaru $y(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + y_p(x)$

chceme ukázat že existují jzn. $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, takové že $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$

tj: $\cancel{y(x_0) =}\ C_1 f_1(x_0) + C_2 f_2(x_0) = y_0 - y_p(x_0)$

a

$$C_1 f_1'(x_0) + C_2 f_2'(x_0) = y_1 - y_p'(x_0),$$

ale $W(f_1,f_2)(x) \neq 0\ \forall x$.

$\Downarrow$

$\exists$ jzn. řešení

Pozn: I rovnice (1) se dá řešit podobnou metodou:

1. krok: homog $y' + p(x) y = 0$ ... řešení $C h(x)$, $C \in \mathbb{R}$, 2. krok: $y_p(x) := C(x) h(x)$ jednodušší.

Př: $y'' + 3y' + 2y = e^{x} + e^{-x}$

Ř: $FS = e^{-x}, e^{-2x}$ tj $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

budeme řešit zvlášť (i) $y'' + 3y' + 2y = e^{x}$ a (ii) $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$ a pak linearita

ad(i) 1 není kořen tj spec pravá strana: $y_{p_1} = Ae^{x}$

tedy $(A + 3A + 2A)e^{x} = e^{x} \Rightarrow A = 1/6$

ad(ii) -1 je jednonásobný kořen tj $y_{p_2} = Bxe^{-x}$

tedy $(-2B + Bx + 3B - 3Bx + 2Bx)e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow B = 1$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + \frac{e^{x}}{6} + xe^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Př: $y'' - 4y' + 4y = \dfrac{2e^{2x}}{1+x^2}$

Ř: $FS = \{e^{2x}, xe^{2x}\}$

soustava
$$C_1' e^{2x} + C_2' x e^{2x} = 0 \qquad\qquad C_1' + C_2' x = 0$$
$$2C_1' e^{2x} + 2C_2' x e^{2x} + C_2' e^{2x} = \frac{2e^{2x}}{1+x^2} \Leftrightarrow 2C_1' + 2C_2' x + C_2' = \frac{2}{1+x^2}$$

$$C_1'(x) = -\frac{2x}{1+x^2} \Rightarrow C_1(x) = -\ln(1+x^2)$$

$$C_2'(x) = \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow C_2(x) = 2\,\mathrm{arctg}\,x$$

(žádné aditivní konstanty)

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 2x\,\mathrm{arctg}\,x \cdot e^{2x} - \ln(1+x^2)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Poznámka: Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu (žádné důkazy)

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

totéž s $e^{\lambda x}$ zase funguje, komplexní kořeny stačí umět vyjádřit,

k-násobný kořen .... $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots x^{k-1} e^{\lambda x}$, tj k-násobný a zároveň komplex - vede např. na $x^6 e^{2x} \cos 9x, \dots$

Věta o speciální pravé straně platí stále, Wronskián z matice $n \times n$

Variace konstant je složitější:
$$C_1' f_1 + C_2' f_2 \dots + C_n' f_n = 0$$
$$C_1' f_1' + C_2' f_2' + \dots + C_n' f_n' = 0$$
$$\vdots$$
$$C_1' f_1^{(n-2)} + C_2' f_2^{(n-2)} + \dots + C_n' f_n^{(n-2)} = 0$$
$$C_1' f_1^{(n-1)} + \dots \dots C_n' f_n^{(n-1)} = f(x).$$