4. Limity podruhé   4 přednášky

4.1 Limity nevlastní, limity v nevlastních bodech, limity posloupností   možná 2 přednášky

Vraťme se ještě jednou k pojmu limity. Nejprve $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a nechť existuje okolí nekonečna takové, že leží celé v definičním oboru f (tj. $(-\infty,k)$ či $(k,\infty) \subset D_f$ pro nějaké $k \in \mathbb{R}$).

Definice 1

Potom f má v nevlastním bodě $+\infty$ (resp. $-\infty$) limitu $A \in \mathbb{C}$, jestliže
$\forall \varepsilon>0\ \exists k>0;\ x\in(k,\infty)$ (resp. $(-\infty,-k)$) : $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Samozřejmě, definici lze zapsat pomocí okolí:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = A \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0;\ \forall x\in U^*_\delta(\pm\infty): f(x)\in U_\varepsilon(A)$$

To nám umožní definovat i nevlastní limitu (v libovolném bodě). Tedy (opět předpokládáme, že f je definována na jistém okolí x_0)

Definice 2

a) Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Potom f má v bodě $x_0\in\mathbb{R}^*$ nevlastní limitu $\pm\infty$, pokud
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0;\ x\in U^*_\delta(x_0): f(x)\in U_\varepsilon(\pm\infty)$ (tj. $f(x)\in(\varepsilon,+\infty)$ resp. $(-\infty,-\varepsilon)$).

b) Nechť $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Potom f má v bodě $x_0\in\mathbb{R}^*$ nevlastní limitu ∞, pokud
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0;\ x\in U_\delta(x_0): f(x)\in U_\varepsilon(\infty)$ (tj. $|f(x)|>\varepsilon$).

Pozor: Ačkoliv $\mathbb{R}$ lze chápat jako podmnožinu $\mathbb{C}$, v případě nevlastních limit musíme rozlišovat, zda chápeme $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (f může dva nevlastní body $\pm\infty$) či $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (tj. máme jen jeden nevlastní bod ∞)!

Jinak definice vypadají dosti podobně a za chvíli ukážeme, že vše je možno zapsat pomocí definice jediné. Nejprve se však podívejme na to, co rozumíme pod pojmem posloupnost.

Definice 3:

Posloupnost je zobrazení $\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{C}$ (nebo $\mathbb{R}$). Hodnotu $\varphi(n)$ nazýváme n-tý člen posloupnosti. Zobrazení se zapisuje ve tvaru $\{\varphi(n)\}_{n=1}^\infty$ resp. ještě častěji $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$.

Zde má samozřejmě smysl mluvit jen o chování φ_n pro n velká, tj. $n\to\infty$. Proto

Definice 4

Nechť $\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{C}\,(\mathbb{R})$. Potom řekneme, že $A\in\mathbb{C}^*$ (resp. $\mathbb{R}^*$) je limitou φ_n pro n jdoucí do nekonečna ($\lim_{n\to\infty}\varphi_n = A$) jestliže

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0 :\ \forall n>n_0\ \ \varphi_n\in U_\varepsilon(A).$$

Cvičení. Přepište si Definici 4 pomocí absolutní hodnoty – bez okolí!

Příklad 1: a) Uvažujme $q_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

a vyšetřujme: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}$

Tvrdím $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, neboť zvolme $\varepsilon > 0$. Chci nalézt n_0: $\forall n > n_0$ je $\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0)$, tj. $|\frac{1}{n}| < \varepsilon$ tj. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Stačí tedy volit $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}]$.

b) „Slavná" posloupnost

$q_n = (1+\frac{1}{n})^n$.

Je možno ukázat (pouze elementárními prostředky, bez použití fcí), že $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ existuje a že je rovna iracionálnímu číslu, jehož hodnota je 2,718028..., tj. tzv. Eulerovo číslo. My později ukážeme, že $\lg e = 1$ resp. $e = \exp 1$.

Nyní můžeme přistoupit k vyšetřování obecně – tj. spojit definice limit – tj. Definice 2.1, 1, 2 a 4 do jedné.

Definice 5

Nechť $f \in R \to R$ (resp. $\mathbb{C}$) a nechť $A \in R^*$ (resp. $\mathbb{C}^*$) a $x_0 \in R^*$. Předpokládejme, že $\forall \eta > 0\ \exists x \in U^*_\eta(x_0) \cap D_f$. Potom řekneme, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existuje a rovná se A, jestliže
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in U^*_\delta(x_0) \cap D_f : f(x) \in U_\varepsilon(A)$.

Rozšíření: Rozmyslete si, že Definice 5 pokrývá všechny případy výše a umožňuje navíc, aby fce f nebyla definována na celém prstencovém okolí bodu x_0! Rozmyslete si též ekvivalentní přepisy v jednotlivých situacích, budete je občas potřebovat.

Pozorování. Pokud aplikujeme Definici 5 na výpočet výpočtu derivace fce (zde je samozřejmě zaručeno jen nevlastní limita), pak můžeme definovat pojem nevlastní derivace (v praxi jen čerstvě ~~…~~ jednostranné derivace). Nicméně autoři tento pojem používají, my ho však používat nebudeme a tedy budeme mluvit jen o tom, že fce f má derivaci pouze v případě, že příslušná limita je vlastní.

Věta 1 (Výpočet limit* po nevlastní bod resp. výpočet nevlastních limit).

Nechť $f: R \to R$, $x_0 \in R^*$. Potom

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^+$ (tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $f(x) \geq 0$ na jistém okolí x_0)

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0^-$ (≤ 0)

Je-li $f: R \to \mathbb{C}$, pak

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Nyní, buď $f: R \to R$ (nebo $\mathbb{C}$)

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to 0^+} f(\frac{1}{y})$ pokud $\lim\limits_{y\to 0^+} f(\frac{1}{y})$ existuje

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{y\to 0^-} f(\frac{1}{y})$ pokud $\lim\limits_{y\to 0^-} f(\frac{1}{y})$ existuje.

Důkaz

(1) $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall L>0\ \exists \delta>0,\ \forall x \in U^*_\delta(x_0)\cap D_f: f(x) > L$

$\iff \forall L>0\ \exists \delta>0,\ \forall x\in U^*_\delta(x_0)\cap D_f\ \ 0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{L}$

$\iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0,\ \forall x\in U^*_\delta(x_0)\cap D_f\ \ 0<\frac{1}{f(x)}<\varepsilon\ \ (f(x)\in U^{*,+}_\varepsilon(0))$.

tj. $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)} = 0^+$.

Analogicky se dokáže (2).

(3) Dokážeme stejně, ale se dvěma s absolutní hodnotou

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \iff \forall L>0\ \exists\delta>0,\ \forall x\in U^*_\delta(x_0)\cap D_f: |f(x)|>L$

$\iff\ 0<\frac{1}{|f(x)|}<\varepsilon$

$\iff\ \left|\frac{1}{f(x)}-0\right|<\varepsilon$

$\iff \lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

(4) Nechť $\lim_{y\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = A \in \mathbb{C}^*$, tj.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0,\ y<\delta_1: f\left(\frac{1}{y}\right)\in U_\varepsilon(A)$, $y\in D_f$

$\frac{1}{y}>\frac{1}{\delta},\ \frac{1}{y}\in D_f$

$M := \frac{1}{\delta},\ x := \frac{1}{y}\quad \forall\varepsilon>0\ \exists M>0,\ x>M, x\in D_f: f(x)\in U_\varepsilon(A) \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Analogicky se ukáže (5)

Poznámka: Tvrzení (1)-(3) mají samozřejmě smysl ($x_0=\infty$) i pro posloupnosti.

Nyní se pokusíme převést tvrzení, které jsme dokázali pro vlastní limity funkcí, na případ Definice 5. V mnoha důkazech se vlastně nic nemění a dokážeme budou povedeno jako vlastní a určené.

Věta 2 (jednoznačnost limity; (V2.1))

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x)$, $x_0\in\mathbb{R}^*$ existuje. Potom je jediná.

Dk

Předpokládejme, že existují dvě limity, A_1 a A_2.

Tj.: Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. Jsou-li A_1 a $A_2\in\mathbb{C}$, tak jsme již dříve ukázali $A_1=A_2$. Proto nám zbývá případ $A_1\in\mathbb{C}$, $A_2=\infty$. Tedy víme, že

- $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0,\ x\in U^*_{\delta_1}(x_0)\cap D_f: f(x)\in U_\varepsilon(A_1)$
- $\forall L>0\ \exists\delta_2>0,\ x\in U^*_{\delta_2}(x_0)\cap D_f: |f(x)|>L$.

Zvolme $\varepsilon=1$, $L=|A_1|+2$, $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. Potom tedy současně

$x\in U^*_\delta(x_0)\cap D_f:\quad f(x)\in U_\varepsilon(A_1)$ tj. $|f(x)|\le |f(x)\pm A|\le |A|+|f(x)-A|\le |A|+1$

$|f(x)|>L=|A_1|+2$,

což dává spor.

Analogicky se ukáže pro $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ situace $A_1\in\mathbb{R}$, $A_2=\pm\infty$ resp. $A_1=+\infty$, $A_2=-\infty$.

Věta 3 (Věta 2.2)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$. Potom $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{C}^*(\mathbb{R}^*) \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$.

Dk nutno předp., že bude prstencové okolí i bod z D_f.

Cvičení.

Věta 4 (V 2.4 – limita absolutní hodnoty)

Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{C}^*(\mathbb{R}^*)$. Potom $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$. (definujeme $|\pm\infty| = \infty$ v $\mathbb{R}^*$, $|\infty| = \infty$ v $\mathbb{C}^*$)

Dk

Cvičení

Podobně jako u vlastních limit, obrácená tvrzení neplatí.

Věta 5 (V 2.5 + V 2.6) – omezenost v případě vlastní limity, odražení od nuly pro nevlastní limitu)

(i) Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ a nechť f má v $x_0 \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu, potom je na jistém red. okolí $x_0 \in \mathbb{R}^*$ omezená.

(ii) Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{C}(\mathbb{R})$ a nechť f má v $x_0 \in \mathbb{R}^*$ vlastní limitu $A \neq 0$. Potom $\exists\, \mathcal{U}^*_\delta(x_0)$ tak, že $|f(x)| \geq \frac{|A|}{2} > 0$ na $\mathcal{U}^*_\delta(x_0)$. Je-li $A = \infty$ (resp. $A = +\infty$, $A = -\infty$), potom je $f(x)$ na jistém redukovaném okolí odražená od nuly (omezená zdola resp. omezená shora).

Dk

Cvičení.

Věta 6 (V 2.7 I)

Věta o součtu, součinu a podílu limit zůstává v platnosti i pro nevlastní body $x_0 = \pm\infty$ (ale vlastní limity)

Dk

Cvičení

Nyní si připomeňme (viz 1.4.6), že jsme v $\mathbb{R}^*$ resp. $\mathbb{C}^*$ zavedli operace mezi nekonečny.
Připomeňme, že na $\mathbb{R}^*$ jsme definovali

- $x \in \mathbb{R}$: $x \pm \{\pm\infty\}$, $\frac{x}{\pm\infty}$

1)
- $x > 0$: $x \cdot \pm\infty$
- $x < 0$: $x \cdot \pm\infty$
- $+\infty + \infty$, $-\infty - \infty$, $\pm\infty \cdot \pm\infty$.

Ale nedefinovali jsme: $0 \cdot \pm\infty$, $\frac{x}{0}$, $\infty - \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Analogicky na $\mathbb{C}^*$

- $z \in \mathbb{C}$: $z \pm \infty$, $\frac{z}{\infty}$
- $z \neq (0,0)$: $z \cdot \infty$, $\frac{z}{0}$; $\frac{\infty}{0}$

ostatní operace jsme nedefinovali.

Příklad 2 Ukážeme, že nelze očekávat, že nás rozumný smysl najde $\infty - \infty$:
Uvažujme $f(x) = x^n$, $g(x) = x^m$, $n, m \in \mathbb{N}$.
Potom $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, ale

$$\lim_{x \to \infty} \big(f(x) - g(x)\big) = \begin{cases} +\infty & n > m \qquad \Big(x^n - x^m = x^n\big(1 - \underbrace{\tfrac{1}{x^{n-m}}}_{\downarrow\, 0}\big) \to +\infty\Big) \\ 0 & n = m \\ -\infty & n < m. \qquad \text{analogicky.} \end{cases}$$

Analogicky by se ukázalo, že i pro limity typu $0 \cdot \pm\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$ (ale $\frac{\infty}{0+}$ resp. $\frac{\infty}{0-}$ už je O.K.) nelze obecně nic říci.

Věta 7 (algebraické operace s limitami II – (V.2.7))
Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$) a nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, $A, B \in \mathbb{R}^*$ (resp. $\mathbb{C}^*$). Potom

- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = A \pm B$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$ $\cancel{(B \neq 0)}$,

za předpokladu, že příslušné operace jsou na $\mathbb{R}^*$ ($\mathbb{C}^*$) dobře definovány – viz (1) (resp. (2)).

Větu nebudeme dokazovat – pro $A, B \in \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$ jsme ji dokázali, pro nevlastní limity plyne z následující obecnější věty.

Věta 8 (algebraické operace s limitami III – (V.2.7)).

I) Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

(i) ~~Nechť~~ Je-li $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty \\ g \text{ omezená zdola na } U^*_\Delta(x_0) \end{cases}$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$.

(ii) Je-li $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \\ g \text{ omezená shora na } U^*_\Delta(x_0) \end{cases}$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = -\infty$.

(iii) Je-li $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \\ g \text{ je omezená zdola číslem } \alpha > 0 \text{ na } U^*_\Delta(x_0) \end{cases}$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) g(x)\big) = \pm\infty$.

(iv) Je-li $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \\ g \text{ je omezená } \cancel{\text{zdola}}\ \text{shora číslem } -\beta,\ \beta > 0, \text{ na } U^*_\Delta(x_0) \end{cases}$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) g(x) = \mp\infty$.

(v) Je-li $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ a $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$ na $U^*_\Delta(x_0)$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases}$.

(vi) Je-li $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = 0$.

II) Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

(vii) Je-li $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = \infty \\ |g| \text{ omezená na } U^*_\Delta(x_0) \end{cases}$, pak $\lim\limits_{x \to x_0} \big(f(x) \pm g(x)\big) = \infty$.

(iii) Je-li $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \\ |g(x)| \text{ omezená zdola číslem } \alpha > 0 \end{array} \right\}$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \infty$.

~~(x) Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $|g(x)|$ omezená shora číslem~~

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, potom $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

Cvičení: Dokažte, že Věta 7 je speciálním případem Věty 8.

Důkaz

Udělejme pouze některé části, zbytek necháme jako užitečné cvičení.

(i) Nechť tedy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall L>0\ \exists \delta>0;\ x\in U^*_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > L$

$g(x)$ omezená zdola na $U^*_\Delta(x_0) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}:\ g(x) \geq \alpha\ \ \forall x \in U^*_\Delta(x_0)$

Zvolme $K>0$. Potom $\exists \delta_K;\ x \in U^*_{\delta_K}(x_0) \Rightarrow f(x) > K-\alpha$

a tedy pro $x\in U^*_{\delta_K}(x_0) \cap U^*_\Delta(x_0)$

$$f(x)+g(x) > K-\alpha+\alpha = K,$$

tj. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)+g(x) = +\infty$

Případ (ii) se dokončí analogicky.

(iv) Nechť např. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ tj. $\forall L>0\ \exists\delta>0,\ x\in U^*_\delta(x_0) \Rightarrow f(x) > L$

$g(x)$ je omezená zdola číslem $\alpha>0$ na $U^*_\Delta(x_0)$ tj. $x\in U^*_\Delta(x_0) \Rightarrow g(x)\geq\alpha$.

Zvolme $K>0$. Potom $\exists \delta_K;\ x\in U^*_{\delta_K}(x_0) \Rightarrow f(x) > \frac{K}{\alpha}$

a tedy pro $x\in U^*_\Delta(x_0)\cap U^*_{\delta_K}$: $f(x)g(x) > \frac{K}{\alpha}\cdot\alpha = K$

tj. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$. Podobně se udělá i druhá možnost jakož i případ (iii).

(v), (vi) Plyne z Věty 1.

(vii) Nechť $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, tj. $\forall L>0\ \exists\delta>0,\ x\in U^*_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x)| > L$

$|g|$ je omezená na $U^*_\Delta(x_0)$, tj. $\exists \alpha>0;\ x\in U^*_\Delta(x_0) \Rightarrow |g(x)| \leq \alpha$.

Potom zvolme $K>0$. Pak $\exists \delta_K:\ x\in U^*_{\delta_K}(x_0) \Rightarrow |f(x)| > K+\alpha$

a tedy $|f(x)+g(x)| \geq |f(x)| - |g(x)| > K+\alpha-\alpha = K$,

tj. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)+g(x) = \infty$.

Analogicky kombinací (iii) a (vii) se udělá (viii). Případ (ix) potom plyne z Věty 1 (3). ∎

Nyní si uvedeme (prozatím bez důkazu) slavné l'Hospitalovo pravidlo, které ale (nedokázal l'Hospital, ale Bernoulli) často se hodí již teď. Důkaz zatím vynecháme, provedeme ho až později (v kapitole V).

Věta 9 (l'Hospital)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $f,g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a nechť

(i) Existuje $U^*_\delta(x_0)$ tak, že $\forall x \in U^*_\delta(x_0)$ existují $f'(x)$ a $g'(x)$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$

(iii) Buď $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

nebo
$$\lim_{x\to x_0} |g(x)| = +\infty.$$
Potom
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$
Totéž platí i pro jednostranné limity.

Věta 10 (o dvou strážnících), (V 2.8))

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $f, g, h : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(\mathbb{N}\to\mathbb{R})$ a nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = A \in \mathbb{R}^*$

Nechť na jistém okolí $\mathcal{U}^*_\delta(x_0)$ platí
$$f(x) \le g(x) \le h(x).$$
Potom $\lim_{x\to x_0} g(x) = A$.

Důsledek 1: (o jednom strážníkovi)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}^*$, $f, g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $(\mathbb{N}\to\mathbb{R})$. Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty)$ a nechť $f(x) \le g(x)$ $(f(x) \ge g(x))$ na jistém okolí $\mathcal{U}^*_\delta(x_0)$. Potom
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty\ (-\infty).$$

Dk

V10 i Důsledku 1 – Cvičení.

Věta 11 (o limitě složené funkce, (V 2.10), (V 2.13))

Nechť $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a $g : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Nechť

(a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = b$

(b) $\lim_{y\to b} g(y) = A$

(c) $\forall\, \mathcal{U}^*(x_0)\ \exists\, x \in \mathcal{U}^*(x_0) : x \in D_f$ a $f(x) \in D_g$ (tj. $x \in D_{g\circ f}$)

(d) Buď $\exists\, \delta > 0$, $\forall x \in P_\delta(x_0)$ je $f(x) \ne b$

nebo

g je spojitá v b.

Pak
$$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = A.$$

Dk

Cvičení.

Příklad 3 (některé nevlastní limity / limity v nevlastních bodech)

① $\lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$

② $\lim_{x\to\infty} e^x = +\infty$ (plyne monotonie e^x a zobrazení na $(0,\infty)$, popř. i z $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$)

③ $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ $\left(e^{-x} = \frac{1}{e^x}\right)$

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = +\infty$, $n\in\mathbb{N}$ ($x \le x^n$ pro $x\ge 1$)

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n\in\mathbb{N} \text{ sudé} \\ -\infty & n\in\mathbb{N}, \text{ liché}\end{cases}$ $\quad ((-|x|)^n = (-1)^n |x|^n)$

(8) $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = \lim\limits_{x\to\infty} \exp(\alpha \ln x) = \begin{cases} +\infty & \alpha>0 \\ 1 & \alpha=0 \\ 0 & \alpha<0\end{cases}$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) = \lim\limits_{x\to\infty} x^n\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_0}{x^n}\right) = \lim\limits_{x\to\infty} x^n \cdot \lim\limits_{x\to\infty}\left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x}+\dots+\frac{a_0}{x^n}\right) = \begin{cases}+\infty & a_n>0\\ -\infty & a_n<0\end{cases}$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$:
- $\alpha<0$ zřejmé $\infty\cdot\infty$
- $\alpha>0$ Použij l'Hospitala k-krát, $k-1<\alpha\le k$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\,x^{\alpha-k}} = +\infty \Rightarrow$ důkaz části věty o exponenciále!

(11) $\alpha>0$: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} \underset{\text{l'Hospital}}{=} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\frac{1}{x}} = +\infty$ $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$

$\to$	konvergentní k $+\infty$	konvergence k 0	
$x\to+\infty$	e^x	e^{-x}	$\to$ nejrychlejší konvergence
	x^α	$\frac{1}{x^\alpha}$	
	x^β, $0<\beta<\alpha$	$\frac{1}{x^\beta}$	
	$\ln x$	$\frac{1}{\ln x}$	$\to$ nejpomalejší konvergence

4.2 Klasifikace nekonečně malých a nekonečně velkých veličin, symboly o a O (nedělal jsem v přednášce)

Je-li $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, pak se někdy říká, že f je v x_0 nekonečně malá. Analogicky, pro $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, se říká, že f je v x_0 nekonečně velká.

Tento termín se přenáší i na porovnávání dvou funkcí, viz předchozí tabulka. Tyto nám umožňují určit předpoklady chování některých komplikovanějších fcí porovnáním s funkcemi elementárními.

Definice 6

Nechť $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$.

1. Říkáme, že f je malé o od g pro $x\to a$ ($f=o(g)$ pro $x\to a$), pokud $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
2. Říkáme, že f je velké O od g pro $x\to a$ ($f=O(g)$ pro $x\to a$), pokud $\exists K\in\mathbb{R}$ a $U^*(x_0)$ tak, že $|f(x)| \le K|g(x)|$ pro $\forall x\in U^*(x_0)$.
3. Říkáme, že f je slabě ekvivalentní s g pro $x\to a$, neboli f je řádově stejná jako g v $x\to a$ ($f \sim g$ pro $x\to a$), pokud $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
4. Říkáme, že f je silně ekvivalentní s g pro $x\to a$, neboli f se chová stejně jako g pro $x\to a$ ($f \simeq g$ pro $x\to a$) pokud $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Poznámka:

- Uvědomme si následující. Nechť $\lim_{x\to a} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ existuje. Potom $f=O(g)$ pro $x\to a$, jestliže $\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|$ je vlastní, tj. může být i nula.
- Je-li $f\sim g$ pro $x\to a$, potom $f=O(g)$ a $g=O(f)$ pro $x\to a$. Obrácená implikace neplatí – např. $f(x)=x\cdot\tilde{D}(x)$

$g(x)=x$,

kde $\tilde{D}(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$.

Cvičení (i) Ukažte, že relace $f\sim g$ je relací ekvivalence (tj. je reflexivní, symetrická a tranzitivní).

(ii) $f\cong g \Rightarrow f\sim g$ $\quad x\to a$

(iii) $f=o(g) \Rightarrow f=O(g)$. $\quad x\to a$

(iv) $f_1=O(g)$, $f_2=O(g) \Rightarrow f_1+f_2=O(g)$ $\quad x\to a$

(v) $f=O(g)$, $g=O(h) \Rightarrow f=O(h)$ $\quad x\to a$

(vi) $f_i\sim g_i$, $i=1,2$ $\Rightarrow$ $f_1f_2\sim g_1g_2$ $\quad x\to a$

$\frac{f_1}{f_2}\sim\frac{g_1}{g_2}$ (platí-li $f_2\neq 0$ na nějakém okolí $x\to a$)

Pozor: Vztah, že $f_1+f_2\sim g_1+g_2$, nemusí platit: $f_1=\sin x$, $f_2=-\sin x$, $g_1=g_2=x$!

(vii) Ukažte, že $f=O(1)$ znamená, že f je na nějakém ~~posun~~ redukovaném okolí $U^*(x_0)$ omezená.

Příklady:

1. V minulé kapitole jsme ukázali, že
$x^\alpha = o(e^x)$ pro $x\to\infty$
$\ln x = o(x^\alpha)$ pro $x\to\infty$ $\Big\}\ \alpha>0$

2. Pro $x\to0$ platí: $\sin x \cong x \cong \operatorname{tg} x$
$\cos x\cong 1$, $\arcsin x \cong x\cong \operatorname{arctg} x$
$\cos x-1\sim x^2$, $\cos x-1\cong \frac{x^2}{2}$

3. $x\sin x = O(x)$ pro $x\in\mathbb{R}$

4. Najděte $\alpha\in\mathbb{R}$ tak, že $\sin x-x=o(x^\alpha)$: musí být $\alpha>0$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^\alpha}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}} \quad (\text{pro } \alpha>2)$$

tj. $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^\alpha}=0 \iff \alpha-3<0$

$\Rightarrow \sin x-x=o(x^\alpha)$ pro $\alpha<3$

$\sin x-x\sim x^3$

$\sin x-x\cong -\frac{1}{6}x^3$.

4.3 Další věty o limitách – limity monotónních funkcí a posloupností   1/2 přednášky

Nyní si ukážeme speciální případy, kdy existují limity funkcí (a také limity posloupností)

Věta 12 (limitní přechod v nerovnostech)

Nechť $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{N} \to \mathbb{R}$), definované obě alespoň v jednom bodě každého okolí $x_0 \in \mathbb{R}^*$; $D_f = D_g$.

Jestliže
- $\lim_{x \to x_0} f(x)$ $\exists$ a rovná se A
- $\lim_{x \to x_0} g(x)$ $\exists$ a rovná se B
- $\exists\, U^*(x_0): \ \forall x \in U^*(x_0) \cap D_f (\cap D_g): f(x) \leq g(x)$.

Potom $A \leq B$.

Příklad 5

I když $\forall x \in U^*(x_0)$ $f(x) < g(x)$, nemusí se stát, že $A < B$. Stačí vzít třeba $g(x) = x^2$, $f(x) = 0$, ale $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0} g(x)$.

Analogicky např. ~~u monotónních po~~ pro posloupnosti $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 0$, ale
$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0.$$

Dk (V12)

Nechť $A \in \mathbb{R}$. Předpokládejme opak, tj. $A > B$. Zvolme $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$. Potom existuje $U_\delta^*(x_0)$ tak, že $\forall x \in U_\delta^*(x_0) \cap D_f \cap D_g$:
$$\tfrac{1}{2}(A+B) = A - \tfrac{1}{2}(A-B) < f(x) < A + \tfrac{1}{2}(A-B)$$
$$B - \tfrac{1}{2}(A-B) < g(x) < B + \tfrac{1}{2}(A-B) = \tfrac{1}{2}(A+B)$$
a tedy $g(x) < \frac{1}{2}(A+B) < f(x)$

což je spor s předpokladem $f(x) \leq g(x)$ na jistém okolí bodu x_0.

~~Analogicky se provede důkaz~~ pro $A = +\infty$, potom z Důsledku 1 plyne, že $B = +\infty$. ■

Hlavním výsledkem této kapitoly je věta o existenci limit pro monotónní fce (posloupnosti). Předpokládejme, že f je definována na jistém intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Připomeňme, že
$$\sup_{x \in (a,b)} f(x) = \sup\{f(x);\ x \in (a,b)\},$$
analogicky pro infimum.

Věta 13 (Pro $D_f = (a,b)$; nejobecnější případ)

Nechť f je neklesající na $J = (a,b)$ (tj. $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$), pak $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{x \in J} f(x)$,
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{x \in J} f(x)$.

Nechť f je nerostoucí na $J = (a,b)$ (tj. $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$), pak $\lim_{x \to b^-} f(x) = \inf_{x \in J} f(x)$,
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup_{x \in J} f(x)$.

Důkaz

Věta obsahuje více alternativ. Ukážeme několik z nich.

(i) Nechť f je neklesající na J a α) nechť $\sup_{x\in J} f(x) = +\infty$.

Chceme ukázat, že $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$, tj.:

$$\forall L>0\ \exists \delta>0,\ \forall x \in U_\delta^{*-}(b) : f(x) > L .$$

Vzhledem k monotónii f stačí ukázat, že $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) > L$.

Nechť to není pravda, tj.: $f(x) \le L\ \forall x \in (a,b)$; pak ale $\sup_{x\in J(a,b)} f(x) < +\infty$.

β) nechť $\sup f(x) = A \in \mathbb{R}$. Chceme ukázat, že

$\lim_{x\to b^-} f(x) = A$, tj. $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0;\ x \in U_\delta^{*-}(b) \Rightarrow f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.

Opět, díky monotónii, stačí ukázat, že

Zvolme $\varepsilon>0$ a $\forall \varepsilon>0\ \exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) > A-\varepsilon$ (Víme z definice suprema $f(x) \le A\ \forall x \in (a,b)$).

Předpokládejme, že takový bod x_0 neexistuje. Potom ale $\exists \varepsilon>0$:

$$f(x) \le A-\varepsilon \quad \forall x \in (a,b),$$

tj. $A-\varepsilon$ je horní závora a to je spor s předpokladem, že $A = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$. ∎

Ostatní možnosti jsou analogické – proveďte si sami doma!

Naprosto analogicky je možno ukázat, že

Věta 13'

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní posloupnost (tj. $a_n \le a_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}$ nebo $a_n \ge a_{n+1}\ \forall n\in\mathbb{N}$).

Potom $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \sup\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\} & \text{(neklesající posloupnost)} \\ \inf\{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\} & \text{(nerostoucí posloupnost)} \end{cases}$.

Limita je vlastní, pokud posloupnost je omezená.

Dk

Cvičení – analogicky jako Věta 13. ∎

Příklad 6 Nalezněte

$\lim_{n\to\infty} a_n$, kde

$$a_0 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$$

Všimneme si, že pro $a_n > 1$ je $\frac{1}{a_n} < 1$ a naopak a dále, že pro $a_0 \in \mathbb{R}^+$ je $\frac{1}{2}\left(a_0 + \frac{1}{a_0}\right) > 1$.

Potom, je-li $a_n > 1$, je $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \le \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \Rightarrow$ posloupnost je monotónní, zdola omezená $\Rightarrow \exists$ limita. Ta musí splňovat

$A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right)$, tj.

$A = \frac{1}{A} \Rightarrow A^2 = 1 \quad \begin{cases} A = 1 \\ A = -1 \rightarrow a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{nelze} \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Pozn.:

Věta 13 hraje důležitou roli v důkazu, že $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ existuje.

4.4. Heineho věta

1/2 přednášky

Cílem této sekce je ukázat vztah mezi limitou posloupnosti a limitou funkce.
Plyne to z následujícího

Věta 14

Nechť $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}(\mathbb{C})$, $x_0\in\mathbb{R}^*$, $A\in\mathbb{R}^*(\mathbb{C}^*)$. Potom (pro ~~...~~ v red. okolí x_0)

$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \iff \forall (x_n)\subset D_f\setminus\{x_0\},\ \lim_{n\to\infty} x_n=x_0 : \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$

Důkaz

$\Rightarrow$ Víme, že $\forall U(A)\ \exists U^*(x_0),\ x\in U^*(x_0)\Rightarrow f(x)\in U(A)$. Tedy pro zvolené $U(A)$ pevné. (ε,δ)

Protože $x_n\to x$, $x_n\neq x$, víme, že $\exists n_0;\ \forall n>n_0: x_n\in U^*(x_0)$, tedy $f(x_n)\in U(A)$, což jsme chtěli dokázat.

$\Leftarrow$ (těžší část)

Chceme ukázat, že $\forall U(A)\ \exists U^*(x_0),\ x\in U^*(x_0)\Rightarrow f(x)\in U(A)$. Předpokládejme, že toto není pravda (ε,δ) tj. platí pravá část ekvivalence ale současně negace levé části, tj.

$$\exists U(A),\ \forall U^*(x_0)\ \exists x\in U^*(x_0): f(x)\notin U(A)$$

Předpokládejme nejdřív, že $x_0\in\mathbb{R}$, ~~$A\in\mathbb{R}(\mathbb{C})$~~. Potom tedy

$$\exists\varepsilon>0,\ \forall\delta>0\ \exists x\in U^*_\delta(x_0): \cancel{|f(x)-A|>\varepsilon}\ f(x)\notin U_\varepsilon(A)$$

Zvolme speciálně $\delta=\frac{1}{n}$ a máme tedy posloupnost

$$x_n\in U^*_{\frac{1}{n}}(x_0): \cancel{|f(x_n)-A|>\varepsilon}\ f(x_n)\notin U_\varepsilon(A)$$

Ale ~~...~~ $x_n\xrightarrow{n\to\infty} x$ a současně $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq A \Rightarrow$ spor.

Podobně se postupuje ~~...~~ i v limitách v nevlastních bodech. Vezmeme např. $x_0=+\infty$ ~~...~~.

Potom $\underset{\text{vezmeme pevné}}{\exists\varepsilon>0}$, $\forall n>0\ \exists x_n\in U^*_n(+\infty): \cancel{f(x)<L}\ f(x_n)\notin U_\varepsilon(A)$

Opět ~~volme~~ $x_n\in U^*_n(+\infty)$ a máme $x_n\to+\infty$, ale $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq A$

Analogicky se postupuje ~~v ostatních případech~~ pro $x_0=-\infty$. ∎

~~Poznámka: Nestačí jen ukázat $\lim f(x_n)=A$ pro nějakou posloupnost $x_n\to x_0$, $x_n\neq x_0$. Třeba na funkci $f(x)=\sin x$~~ můžeme mít

Použití: a) místo posloupností můžeme použít fci a pak např. pomocí l'Hospitala derivací

b) důkaz neexistence limit posloupností pomocí zkonstruování $x_n^1\to x_0$ a $x_n^2\to x_0$ s různými $\lim_{n\to\infty} f(x_n^i)$, $i=1,2$.

Příklady 7

(1) Ukažme, že $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ neexistuje

Zřejmě, volíme-li $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $n\in\mathbb{N}$, potom

$\sin \frac{1}{x_n} = \sin n\pi = 0$ a tedy $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = 0$

$x_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}$, $n\in\mathbb{N}$

$\sin \frac{1}{x_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = 1$ a tedy $\lim_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x_n} = 1$.

(2) Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n} - \operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}.$$

Zřejmě platí ⇒

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}$, pak se rovná hledané limitě. Na limitu pak můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo a tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \frac{1}{\cos^2 x}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^3 x - 1}{3x^2\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos^2 x+\cos x+1)}{3x^2\cos^2 x} = \boxed{-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n} - \operatorname{tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}}.$$

(3) Ukažme, že $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp 1$.

Platí totiž $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

spojitost exp

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \cancel{\exp\left(\lg \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(\lg\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)} =$$

$$= \cancel{\lim_{n\to\infty}\exp} = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\lg(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{\lg(1+x)}{x}\right) = \boxed{\exp(1)}.$$

Heineho větu lze zesílit. Platí totiž

Věta 14' Za stejných předpokladů jako V 14

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ existuje $\iff \forall \{x_n\}\subset D_f\setminus\{x_0\}$, $\lim x_n = x_0$: $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existuje.

Důkaz

⇒) stejné jako výše

⇐ je třeba si uvědomit, že všechny limity posloupností mají stejnou limitu. Pak lze postupovat jako výše.

Nechť tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ a $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} y_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = B$,

kde $A\neq B$. Označme

$$z_n = \begin{cases} z_{2n} = x_n \\ z_{2n+1} = y_n \end{cases} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Určitě $\lim_{n\to\infty} z_n = x_0$, ale dle předchozího $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ neexistuje a tedy dostáváme spor.

Zbytek důkazu se pak vede stejně jako ve V 14. ∎

Důsledek 2 (Heineho „definice spojitosti")

Platí: f je v x_0 spojitá $\iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_f$, $x_n\to x_0$: $f(x_n)\to f(x_0)$.

Důkaz

Plyne z definice spojitosti a předchozí věty. ∎

4.5. Vybrané posloupnosti, Bolzano-Cauchyho podmínka $\quad \frac{3}{4}$ př.

Již dříve jsme ukázali, že každá monotónní (omezená) posloupnost má limitu (vlastní). Někdy se též místo vlastní limity mluví o tom, že posloupnost konverguje, v případě nevlastní limity, že posloupnost diverguje k $\pm\infty$.

Naším cílem bude ukázat, že když máme libovolnou (reálnou) posloupnost, tak mohou nastat tři možnosti: a) posloupnost je omezená
b) posloupnost je shora neomezená
c) posloupnost je zdola neomezená.

V každém případě pak z ní můžeme tzv. podposloupnost (tj. vynecháme jen některé členy) tak, že tato podposloupnost má svoji limitu a to v a) vlastní, b) $+\infty$, c) $-\infty$.

Definice 7

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost čísel (reálných, kpx.). Nechť n_k je rostoucí posloupnost přirozených čísel (např. $n_k = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, $n_1 = 2$, $n_2 = 7$, $n_3 = 1023$ atd.). Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ nazveme podposloupností vybranou z $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Věta 15 (Weierstrass) (Neplatí kpx.!!)

Z každé omezené reálné posloupnosti lze vybrat podposloupnost, která má vlastní limitu. (tj. konvergentní podposloupnost)

Důkaz

Cílem je aplikovat větu o dvou strážnících - tj. vybrat podposloupnost, kontrolovanou shora i zdola něčím, co jde k limitě čísla.

Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, existují A_0 a $B_0 \in \mathbb{R}$ tak, že

$$A_0 \le a_n \le B_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \text{Nechť } A_0 < B_0$$ (jinak není co řešit, a_n je konstantní posloupnost).

Definujme $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ následovně:

Položme $C_n = \frac{1}{2}(A_{n-1} + B_{n-1})$. Pak určitě alespoň v jednom z intervalů $[A_{n-1}, C_n]$ a $[C_n, B_{n-1}]$ existuje nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Je-li ∞ mnoho prvků v $[A_{n-1}, C_n]$, položme $A_n = A_{n-1}$ a $B_n = C_n$, jinak $A_n = C_n$ a $B_n = B_{n-1}$.

Zřejmě $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ je neklesající, omezená (A_0, B_0) a $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ je nerostoucí, omezená posloupnost, tedy mají limity A resp. B. Dále

$$|A_n - B_n| = \frac{1}{2^n}|A_0 - B_0| \to 0 \text{ pro } n \to \infty \text{ a tedy}$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = L = \lim_{n\to\infty} B_n.$$

Potom posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ definujme následovně

$a_{n_0} \in [A_0, B_0]$ volme libovolné z $\{a_n\}$

$a_{n_1} \in [A_1, B_1]$ volme tak, aby $a_{n_1} \in \{a_n\}$ a $n_1 > n_0$

$a_{n_k} \in [A_{n_k}, B_{n_k}]$ volme tak, aby $a_{n_k} \in \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $n_k > n_{k-1}$.

Pak

$$A_k \le a_{n_k} \le B_k$$

a tedy dle věty o dvou strážnících (V10) máme, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$. ☒

Zbývá dořešit situaci, kdy je posloupnost neomezená.

Věta 16

(Věta platí analogicky pro lim) (bez kvant!)

(i) Není-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená shora, pak existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$.

(ii) Není-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená zdola, pak existuje vybraná podposloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$.

Důkaz

Dokážeme hned (i); (ii) je analogické ($b_n = -a_n$). Označme $M_k = \{a_n;\ a_n > k\}$. Potom M_k má nekonečně mnoho prvků (jinak spor s neomezeností $\{a_n\}$ shora) a tedy definujeme

$a_{n_1} \in M_1$ libovolné

$\vdots$

$a_{n_k} \in M_k$; tak aby $n_k > n_{k-1}$.

Z věty o jednom strážníkovi (Důsledek 1) pak plyne, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty$. ☒

Existuje ještě jedna možnost, jak přiřadit libovolné reálné posloupnosti posloupnost konvergentní.

Definice 8

Označme $b_n = \sup\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \ge n\} = \left(\sup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\ge n}} \{a_k\}\right)$

$c_n = \inf\{a_k;\ k \in \mathbb{N},\ k \ge n\} = \left(\inf_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\ge n}} \{a_k\}\right)$

Definujme

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

pozor, může nastat $b_n = +\infty$ tak konečně $\lim_{n\to\infty} +\infty = +\infty$

Pozorování

1, korektnost definice: Zřejmě b_n, c_n jsou monotónní posloupnosti, $b_1 \ge b_2 \ge \dots \ge b_n \ge \dots$

$c_1 \le c_2 \le \dots \le c_n \le \dots$

Navíc $c_n \le b_n$

a tedy $\lim_{n\to\infty} b_n$ a $\lim_{n\to\infty} c_n$ existují. Zřejmě navíc

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

2) Vztah k limitě posloupnosti

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje $\Leftrightarrow$ $\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n$.

Dk

$\Leftarrow$ protože $c_n \le a_n \le b_n$, plyne z věty o dvou strážnících existence $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \overline{\lim} = \underline{\lim}\, a_n$.
Navíc pro $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom $\exists n_0 : \forall n > n_0 : a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ a každé toto platí pro b_n a c_n (přesněji $A-\varepsilon \le c_n \le b_n \le A+\varepsilon$). Tedy nutně
$A-\varepsilon \le \underline{\lim}\, a_n \le \overline{\lim}\, a_n \le A+\varepsilon$.

Protože nerovnost platí $\forall \varepsilon > 0$, je důkaz hotov.

Modifikace pro $A = \pm\infty$ – DÚ.

3) Označme $M = \{A \in \mathbb{R}^*;\ \exists \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\} : \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A\}$.
Potom

$\overline{\lim}\, a_n = \sup M$

$\underline{\lim}\, a_n = \inf M$.

dokonce existují podposl. $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$

$\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{a}_{n_k} = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ **

Dk

Cvičení. min-li $\{M_k\}$ vybereme, pak vezmu $n_k \ge k$ a najdi b_n tak, aby minimalizuje a_{n_k}, neboť tak je ve členech uvažovaných do supréma

4)* Podobně pro $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lze definovat

$$\overline{\lim_{x\to a^+}} f(x) = \lim_{x\to a^+} \Big[\sup_{y \in (a,x) \cap D_f \ (\text{pozn.})} f(y) \Big]$$

$$\underline{\lim_{x\to a^+}} f(x) = \lim_{x\to a^+} \Big[\inf_{y \in (a,x)} f(y) \Big].$$

Analogicky pro limity zleva či limity.

* hromadných bodů může být hodně, např.
$0, 1, 0, \frac12, 1, 0, \frac13, \frac12, \frac23, 1, \dots$

** Dk: zvolme $b_n = \limsup a_n$, tedy ex $n_1 : a_{n_1} \ge \limsup - 1$
ex $n_2 > n_1 : a_{n_2} \ge \limsup - \frac12$ atd.

POJEM HROMADNÁ HODNOTA

Na závěr si uvedeme ještě jednu možnost, jak charakterizovat, že posloupnost (funkce) má vlastní limitu, aniž bychom museli nutně pracovat s hodnotou této limity.

Věta 17 (Bolzano-Cauchyho podmínka)
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$ a $x_0 \in \mathbb{R}^*$. Potom

(i) existuje vlastní $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x', x'' \in U^*_\delta(x_0) \cap D_f : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

(ii) $\{a_n\} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$. Potom

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje vlastní $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0,\ \forall n, m > n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$.

Pozor: Pro posloupnosti nestačí brát $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$! Př: $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Dk (pro funkce)

$\Rightarrow$ $|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - A + A - f(x'')| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| < 2\varepsilon$
pro vhodné okolí x_0, kde $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

$\Leftarrow$ K číslu $\varepsilon > 0$ existuje $U^*_\delta(x_0)$ tak, že pro $\tilde{x} \in U^*_\delta(x_0)$ a pro všechna $x \in U^*_\delta(x_0)$ platí
$f(\tilde{x}) - 1 < f(x) < f(\tilde{x}) + 1$,

Tj: f je na $U^*_\delta(x_0)$ omezená. $\delta_n < \min(\delta, 1/n)$

Nyní k $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\exists$ $U^*_{\delta_n}(x_0)$: pro $x'_n \in U^*_{\delta_n}(x_0)$ a $\forall x'' \in U^*_{\delta_n}(x_0)$:

$$|f(x'_n) - f(x'')| < \frac{1}{n}.$$

Tedy $x_n \to x_0$ a navíc $\{f(x_n)\}$ je omezená. Proto dle Weierstrassovy věty existuje x_{n_k}: $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A$.

Zvolme $\varepsilon>0$. $\forall x \in U^*_{\delta_1}(x_0)$ pro vhodné δ_1

$$|f(x)-A| \leq |f(x)-f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k})-A| < \varepsilon$$

a tudíž

$$\lim_{x\to a} f(x) = A.$$

$\blacksquare$

Definice 9 (Cauchyovská posl.)

Posloupnost $\{a_n\}_1^\infty$ (reálných čísel) se nazývá Cauchyovská, pokud splňuje B.C. podmínku, tj. $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0$: $\forall n, m > n_0$: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Platí, že je-li a_n reálná (popř. komplexní) posloupnost, pak je $\{a_n\}$ je Cauchyovská $\Leftrightarrow$ $\exists$ vlastní $\lim_{n\to\infty} a_n$.