3. Primitivní funkce 2 přednášky

3.1. Základní pojmy a příklady 1př.

Hledání primitivních funkcí je opravo inverzní k derivování. Někdy se též primitivní funkce nazývá antiderivace.

Definice 1

Nechť $f: (a,b) \to \mathbb{C}$, $F: (a,b) \to \mathbb{C}$. Řekneme, že F je primitivní funkce k f na (a,b), jestliže platí $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Potom značíme

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Pozn.: Někdy se místo otevřeného intervalu uvažují i uzavřené resp. polouzavřené intervaly. V takovém případě se požaduje, aby příslušné jednostranné derivace F byly rovny f.

Věta 1 (O nejednoznačnosti primitivní funkce)

(i) Je-li F primitivní funkce k f na (a,b), potom též $G(x) = F(x) + c$, c konstanta, je také primitivní funkce k f.

(ii) Jsou-li F a G dvě primitivní funkce k f na (a,b), potom $\exists$ konstanta $C \in \mathbb{C}$ taková, že $F(x) - G(x) = C$ na (a,b).

Dk

(i) plyne derivováním

(ii) se dokáže jednodušeji pomocí vět o střední hodnotě – zmíníme se na příslušném místě později. ■

Věta 2

Je-li F primitivní funkce k f na (a,b), potom F je spojitá na (a,b)

Důkaz

$F'(x) = f(x)$ na (a,b), tj. F má derivaci na (a,b) a tudíž F je spojitá na (a,b). ■

Věta 3 (Tabulka základních primitivních funkcí)

(1) $\int (x+a)^n\,dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} + C$, $a \in \mathbb{C}$, $n \neq -1$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \neq a$ pro $a \in \mathbb{R}$, $n < 0$

(2) $\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x > 0$

(3) $\int \frac{1}{x+a}\,dx = \ln|x+a| + C$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}$

(4) $\int e^x\,dx = e^x + C$, $x \in \mathbb{R}$

(5) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, $x \in \mathbb{R}$

(6) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $x \in \mathbb{R}$

(7) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C_1$, $x \in \mathbb{R}$

$\phantom{(7) \int \frac{1}{1+x^2}\,dx} = -\operatorname{arccotg} x + C_2$, $x \in \mathbb{R}$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C_1 \qquad x \in (-1,1)$

$\qquad = -\arccos x + C_2 \qquad , x \in (-1,1)$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{argsinh} x + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C \quad , x \in \mathbb{R}$

(10) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{argcosh}|x| \cdot \operatorname{sign} x \quad , |x|>1 \quad , \operatorname{argcosh} x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

(11) $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C \quad , x \in \mathbb{R}$

(12) $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C \quad , x \in \mathbb{R}$

(13) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C \qquad x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

(14) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C, \qquad x \in (k\pi, (k+1)\pi) \quad , k \in \mathbb{Z}$

Dk DÚ – rovnou derivováním.

Pozn.: Platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \qquad x \in [-1,1]$

$\qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$

Příklad 1: Určete

a) $\int |x|\,dx$.

~~b) $\int g(x)\,dx$, kde $g(x) = 1 \quad x \in (-\infty,0)$~~

a) Zřejmě pro $x>0$ je $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C_1$

$x<0$ je $-\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C_2$

Protože primitivní fce musí být spojitá v $x=0$, je potom

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + C & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} + C & x < 0 \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pozn.: Někteří autoři zavádějí i tzv. zobecněnou primitivní funkci. Uvažujme např.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x \geq 0 \end{cases}.$$

Potom má smysl uvažovat funkci $F(x) = \begin{cases} x + C & x < 0 \\ 2x + C & x \geq 0 \end{cases}$ [illegible]

Fce F sice nemá v $x=0$ derivaci, má tam ale derivaci zprava, která je rovna 2. Má tedy jistý smysl nazvat F (zobecněnou) primitivní funkcí k f. My se těmito případy nebudeme zabývat.

Nyní si ukážeme základní techniky, které v kombinaci s Větou 3 umožní nalézt alespoň jistou třídu primitivních funkcí.

Věta 4 (integrace součtu)
Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a G je primitivní k g na (a,b). Potom $F+G$ je primitivní k $f+g$ na (a,b).
Nechť $c \in \mathbb{C}$. Potom cF je primitivní k cf na (a,b).

Dk.
Plyne ze vzorců $(f+g)' = f'+g'$, $(cf)' = cf'$ pro $c = \text{const}$. ∎

Věta 5 (integrace per partes)
Nechť $u,v : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ takové, že u' a v' existují. Potom

$$\int u v' \, dx = uv - \int u' v \, dx$$

jestliže jedna z primitivních funkcí existuje.

Nechť $f,g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\exists\, f', g'$ na (a,b). Pak $\int f'g = fg - \int fg'$, pokud alesp. 1 z integrálů ex.

Dk: $(fg)' = f'g + fg'$ tj. $fg = \int f'g + \int fg'$ a ten vztah platí pokud alespoň 1 z integrálů ex. a pak ex. i druhý…

Důkaz.
Nechť G je primitivní funkce k $u'v$. Je tedy třeba ukázat, že

$(G - uv)' = -uv'$

Ale $(G - uv)' = u'v - (uv)' = -uv'$.

Analogicky obrácený směr (při předpokladu existence druhé prim. fce). ∎

Příklad 2

① $\int x e^x dx = \begin{bmatrix} u = e^x & u' = e^x \\ v = x & v' = 1 \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = \underline{(x-1)e^x + C}$, $x \in \mathbb{R}$

② $\int \arcsin x \, dx = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v = \arcsin x & v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{bmatrix} = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$

$= \underline{x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}}$ $\quad x \in (-1,1)$ (i když by šlo tady dodefinovat, že existuje i jednostranná derivace v ± 1)

③ Nechť

$I_n = \int \sin^n x \, dx$.

Nalezneme rekurentní vztah:

$I_n = \int \sin^n x \, dx = \begin{bmatrix} u = -\cos x & u' = \sin x \\ v = \sin^{n-1} x & v' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \end{bmatrix} = -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x \, dx$

$= -\cos x \sin^{n-1} x \, dx + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = -\cos x \sin^{n-1} x \, dx + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \sin^n x \, dx$

Tedy

$I_n = -\cos x \sin^{n-1} x \, dx + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$

$\Updownarrow$

$\underline{I_n = -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x \, dx + \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$, $\quad I_0 = x + C \quad I_1 = -\cos x + C$, $x \in \mathbb{R}$.

(4) $J_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n} dx = \left[\begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v = \frac{1}{(x^2+1)^n} & v' = \frac{-n \cdot 2x}{(x^2+1)^{n+1}} \end{matrix} \right] = \frac{x}{(x^2+1)^n} + \int \frac{2n\, x^2}{(x^2+1)^{n+1}} dx =$

$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n J_n - 2n J_{n+1}$

$\Rightarrow \boxed{J_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} J_n + \frac{1}{2n}\frac{x}{(x^2+1)^n}}$ $\boxed{J_1 = \operatorname{arctg} x + C}$

Další důležitou technikou jsou věty o substituci. V zásadě existují dvě možnosti

I) Umím najít $\int f(x)dx$ a potřebuji $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Tedy substituce $x = \varphi(t)$

$dx = \varphi'(t)dt$ $\Rightarrow \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx = F(x) \overset{+C}{=} F(\varphi(t)) + C$

máme

Věta 6 (1. věta o substituci)

Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b) a nechť $\varphi: (\alpha,\beta) \to (a,b)$ (ne nutně na) taková, že $\forall t \in (\alpha,\beta)$ existuje $\varphi'(t)$ vlastní. Potom $F\circ\varphi$ je primitivní funkce k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na (α,β).

Důkaz

$(F\circ\varphi)' = F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ ∎

II) Umím najít $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ a potřebuji $\int f(x)dx$.

Opět položíme $x = \varphi(t)$

$dx = \varphi'(t)dt$

$\Rightarrow \int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t)$ ale teď se musíme vrátit k původní ~~fce~~ proměnné x! $\Rightarrow$ potřebuji, aby φ měla inverzi! Pokud je to pravda, pak $\int f(x)dx = (\Phi\circ\varphi^{-1})$ $\Rightarrow$ potřebuji, aby byly splněny předpoklady o derivaci složené funkce.

Věta 7

Nechť je ~~fce~~ Φ primitivní funkce k $(f\circ\varphi)\varphi'$ na (α,β), přičemž $\varphi: (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je bijekce (prostá a na), taková, že $\forall t \in (\alpha,\beta)$ je $\varphi'(t) \neq 0$, vlastní. Potom $\Phi\circ\varphi^{-1}$ je primitivní funkce k f na (a,b).

důsledek $\varphi'(t) \neq 0$

Pozn.

Opět ~~se asi v kapitole V dozvíme, že ...~~ Pro ověření předpokladů V2.17 bychom potřebovali ještě vědět, že φ^{-1} je spojitá. To ale plyne z vlastností φ a ověříme to později, viz třeba lemma 2.1.

Důkaz

Chceme ukázat, že $(\Phi\circ\varphi^{-1})'(x) = f(x)$. Ale z věty o derivaci složené fce resp. derivaci inverzní funkce plyne

$(\Phi\circ\varphi^{-1})' = \cancel{\Phi'(\varphi^{-1}(t)) = (f\circ\varphi)(t)\,\varphi'(t)}\ \Phi'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) = (f\circ\varphi\circ\varphi^{-1})(x)\,\varphi'(\varphi^{-1}(x))\cdot\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x)$ ∎

Příklad 3:

1.S.V.

a) $\int \sin^n x \cos x\,dx = \left[\begin{matrix} y=\sin x \\ dy=\cos x\,dx\end{matrix}\right] = \int y^n\,dy = \frac{y^{n+1}}{n+1}+C = \boxed{\frac{\sin^{n+1}x}{n+1}+C}$

(obecně: $\int f^n(x)\, f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}+C$), $x\in\mathbb{R}$

I. D.ú.

1.S.V.

b) $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \left[\begin{matrix} y=ax^2+bx+c \\ dy=(2ax+b)\,dx\end{matrix}\right] = \int\frac{dy}{y} = \ln|y|+C = \ln|ax^2+bx+c|+C$

na intervalech, kde $ax^2+bx+c\neq 0$

(obecně: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|+C$)

2.S.V.

c) $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left[\begin{matrix} x=t^2 \\ dx=2t\,dt\end{matrix}\right.$ potřebujeme $\exists$ inverze, tj. volím např. $t\in(0,\infty)$, pak $\varphi'(t)\neq 0$ $\left.\right] = \int\frac{2t\,dt}{1+t} =$

$= \int 2\,dt - \int\frac{2}{1+t}\,dt = 2t - 2\ln|1+t| + C = \boxed{2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C}$ $\quad x>0$

(ale vše může prodloužit výsledek jednostranné derivace až do bodu $x=0$ → ukaž si to sami!)

$b^2-4c<0$

d) $\int\frac{dx}{x^2+bx+c} = \int\frac{dx}{(x+\frac{b}{2})^2+\underbrace{c-\frac{b^2}{4}}_{>0}} = \int\frac{dx}{\left(\frac{2x+b}{2}\right)^2+\frac{4c-b^2}{4}} =$

$= \frac{4}{4c-b^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{2x+b}{2\sqrt{\frac{4c-b^2}{4}}}\right)^2} = \frac{4}{4c-b^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\int\frac{dt}{1+t^2} =$

$\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}} = t$

1.S.V. $\frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\,dx = dt$

$= \frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\,\mathrm{arctg}\, t = \boxed{\frac{2}{\sqrt{4c-b^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+C}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

$b^2-4c<0$

e) $\int\frac{px+q}{x^2+bx+c} = \int\frac{\frac{p}{2}(2x+b)+q-\frac{bp}{2}}{x^2+bx+c}\,dx = \boxed{\frac{p}{2}\ln(x^2+bx+c) + \frac{q-\frac{bp}{2}}{\sqrt{4c-b^2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}+C}$ $\quad x\in\mathbb{R}$

3.2 Integrace racionálních funkcí

> 4 př.

Jednou z tříd funkcí, pro kterou lze vždy (alespoň teoreticky) nalézt primitivní funkci jsou tzv. racionální (lomené) funkce, tj. podíl dvou polynomů

(*) $\quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P, Q jsou polynomy, $P,Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Ukážeme zde pouze algoritmus výpočtu, nebudeme dokazovat, že libovolný polynom lze na požadovaný tvar převést – podrobněji viz [Sousedík: skripta na webu], popř. dodatek ke starému vydání skript Kopáček: Matematika pro fyziky či mnoho jiné učebnice int. počtu (Jarník, ...)

Zajímá nás můžeme dosáhnout situace, kdy st $P <$ st Q. Je-li st $P \geq$ st Q, pak můžeme podělit polynom P polynomem Q a dostaneme

$$R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)},$$

Př: $\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x^3+x-x}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$

kde st $P_2 <$ st Q a P_1 je polynom. Není tedy problém P_1 zintegrovat a můžeme tedy BÚNO předpokládat, že st $P <$ st Q v $R(x)$.

Nyní: $$Q(x) = c\,(x-\alpha_1)^{r_1}\cdots(x-\alpha_k)^{r_k}\cdot\underbrace{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\cdots(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{s_\ell}}_{p_i^2-4q_i<0}$$

(popř. $(x-z_1)^{s_1}(x-\bar z_1)^{s_1}\cdots(x-z_\ell)^{s_\ell}(x-\bar z_\ell)^{s_\ell}$)

JARNÍK I1

a potom může případ

$$R(x) = \frac{A_1^1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2^1}{(x-\alpha_1)^2} + \dots + \frac{A_{r_1}^1}{(x-\alpha_1)^{r_1}} + \frac{A_1^2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_{r_2}^2}{(x-\alpha_2)^{r_2}} + \dots + \frac{A_{r_k}^k}{(x-\alpha_k)^{r_k}}$$

$$+ \frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_2^1x+C_2^1}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{B_{s_1}^1x+C_{s_1}^1}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}} + \dots + \frac{B_{s_\ell}^\ell x+C_{s_\ell}^\ell}{(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{s_\ell}}$$

$$A_j^i,\ B_j^i,\ C_j^i \in \mathbb{R}$$

Výpočet: pomocí porovnání polynomů, popř. dosazovací metoda. Podrobněji – viz cvičení

Př: $\frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$

$2x+1 = A(x+1) + Bx$

$x=0: A=1$, $x=-1: -1=-B$

a každý integrál spočítat zvlášť

1) reálné kořeny – zde není ve výpočtu žádný problém

2) kvadratické členy

a) typ $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ → viz příklad dříve

b) typ $\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$ si přepíšu jako $\frac{B}{2}\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} + \frac{\tilde B}{(x^2+px+q)^k}$, $\tilde B = C - \frac{Bp}{2}$

Nyní první integrál spočtu substitucí a na druhý ~~…~~ použiji techniku per partes a dostanu rekurentní vzorec (případně upravíme jako v předchozím příkladu přejdu na tvar $\int \frac{\tilde{\tilde B}}{(y^2+1)^2}\,dy$).

Jiná možnost (podle mě co se týče náročnosti více méně ekvivalentní) je použít rozklad na komplexní kořeny. Místo kvadratických členů integruji vždy pouze integrál typu $\frac{A}{(x-x_0)^q}$, kde $x_0 \in \mathbb{C}$, $A \in \mathbb{C}$. Ale pozor – nelze to pro případ $q=1$, tedy musím převést na tvar $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$.

Tj. $\frac{A}{x-i} + \frac{\bar A}{x+i} = \frac{Ax+\bar A x + Ai - \bar A i}{x^2+1} = \frac{2\operatorname{Re}A\,x + 2i\operatorname{Im}(A)i}{x^2+1}$ a až tedy umím integrovat.

<u>Příklad</u> 4) $$\int \frac{2x^5+5x^4+7x^3+11x^2+7x+4}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,dx$$

Vypočtu $$R(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$

Př. 2(4) $= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{x}{(x^2+1)^2}$

a tedy $$\int R(x)\,dx = \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx + C.$$

Další příklady viz cvičení. Př 5: $\int \frac{1}{1+x^{2k}}\,dx$, $k \in \mathbb{Z}$, spec. $\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$: $(x-a-bi)\cdot(x-a+bi) = (x-a)^2+b^2$ reálný polynom

3.3 Důležité substituce, které vedou na integraci racionálních funkcí $\angle \frac{3}{4}$ př.

Označení: V dalším $R(z)$ je racionální funkce z (tj. $R(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$)

a $R(u,v)=\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$,

kde P, Q jsou polynomy, tj.

$$P(u,v)=\sum_{0\le i,j\le n} a_{ij}\,u^i v^j, \quad \text{analogicky } Q(u,v).$$

Např. $R(u,v)=\dfrac{u^4+v^2+3uv+1}{(uv+1)}$.

(I) $\int R(e^{\alpha x})\,dx$

Substituce $y=e^{\alpha x} \Rightarrow dy=\alpha e^{\alpha x}dx \Rightarrow dx=\frac{1}{\alpha y}dy$. $\Big\}\; x\in\mathbb{R}$

dostaneme

$$\int R(y)\frac{1}{\alpha y}\,dy, \text{ tj. opět rac. funkci.}$$

(II) $\int \frac{R(\ln x)}{x}\,dx$

Substituce $\ln x = y$, $\frac{dx}{x}=dy$, $x\in\mathbb{R}^+$

dostáváme $\int R(y)\,dy$, tj. opět racionální funkci.

III $\int R\left(x,\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, $ad-bc\neq 0$, $s\in\mathbb{N}$

Substituce $y=\sqrt[s]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow x=\frac{-dy^s+b}{cy^s-a}$ tj. $dx=\frac{(ad-bc)s y^{s-1}}{(cy^s-a)^2}dy$

dostáváme

$$\int R\left(\frac{-dy^s+b}{cy^s-a},\, y\right)\frac{(ad-bc)s y^{s-1}}{(cy^s-a)^2}\,dy$$

tj. opět racionální funkci.

s sudé: $\frac{ax+b}{cx+d}>0$
s liché: $cx+d\neq 0$.

Př. 5 $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,dx$, $x\in(-1,\infty)$

Volme $y=\sqrt[6]{x+1} \Rightarrow x=y^6-1$

$dx=6y^5\,dy$

tj. $\int \frac{1-y^3}{1+y^2}\,6y^5\,dy =$

$-y^8+y^5 : (y^2+1) = -y^6+y^4+y^3-y^2-y+1$
y^6+y^5
y^5-y^4
$-y^4-y^3$
$-(-y^4-y^2)$
$-y^3+y^2$
$-(-y^3-y)$
y^2+y
$y-1$

$= 6\left[\int\left(-y^6+y^4+y^3-y^2-y+1+\frac{y-1}{y^2+1}\right)dy\right.$

$= -\frac{6}{7}y^7+\frac{6}{5}y^5+\frac{3}{2}y^4-2y^3-3y^2+6y+3\ln(y^2+1)-6\,\mathrm{arctg}\,y+C$, kde $y=\sqrt[6]{x+1}$.

IV Eulerovy substituce

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx \qquad , \quad a \neq 0$$

Potom nastal alespoň čtyři možnosti (některé i více najednou):

(1.) $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, $x_1 < x_2$; $a>0$: $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$; $a<0$: $x \in (x_1, x_2)$

Potom
$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \sqrt{a}\sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}\,(x-x_2) & (x>x_2) \\ -\sqrt{a}\sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}\,(x-x_2) & (x<x_1) \end{array}\right\} a>0 \\ \sqrt{-a}\sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}}\,(x_2-x) \quad a<0,\ x\in(x_1,x_2) \end{cases}$$

a můžeme použít III.

(2.) $a>0$

Potom lze použít substituci

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x + t \qquad x \text{ takové, že } ax^2+bx+c>0$$

Potom $\cancel{ax^2}+bx+c = \cancel{ax^2} \pm 2\sqrt{a}\,xt + t^2$

$$x = \frac{t^2-c}{b \mp 2\sqrt{a}\,t} \qquad dx = \left(\frac{t^2-c}{b\mp 2\sqrt{a}\,t}\right)' dt$$

(3) $c>0$

Potom pomůže substituce

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} \pm xt$$

$ax^2+bx+\cancel{c} = x^2t^2 \pm 2xt\sqrt{c} + \cancel{c}$ $\quad /:x \Rightarrow$ je nutné rozebrat zvlášť $x>0$ a $x<0$ a potom brát integrační konstanty tak, aby výsledná primitivní fce byla spojitá

$\Downarrow$

$$x(a-t^2) = \pm 2t\sqrt{c} - b$$

$$x = \left(\frac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\right) \qquad dx = \left(\frac{\pm 2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\right)' dt$$

(4.) $ax^2+bx+c=0$ nemá reálný kořen a $a<0 \Rightarrow c<0 \Rightarrow ax^2+bx+c<0$ na $\mathbb{R}$ a tudíž $\sqrt{ax^2+bx+c}$ nemá v $\mathbb{R}$ smysl.

Příklad 6:

a) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

Zřejmě lze použít (2) nebo (3). Zde se jeví jako výhodnější (2) ve tvaru

$\sqrt{x^2+x+1} = -x+t$ tj. $x+1 = -2xt+t^2$

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t} \qquad x\in\mathbb{R},\quad t \in \left(-\tfrac{1}{2}, \infty\right)$$

$$dx = \frac{2t(1+2t)-2t^2+2}{(1+2t)^2}\,dt = \frac{2t^2+2t+2}{(1+2t)^2}\,dt$$

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\,dx = \underline{\int \frac{1}{t}\cdot\frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)^2}\,dt}\,,$$ lze dopočítat a dosadit za t.

↳ Přirozeně nevyšel celý na cvičení ↲

b) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx$

$x^2+2x-1=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+1}}{1} = -1\pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow \underline{x \in (-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})}$

Zde můžeme dvě možnosti

① a ③ Zvolme ③:

$\sqrt{1-2x-x^2} = xt-1$

$-2x-x^2 = x^2t^2 - 2xt \quad /:x$

$x(t^2+1) = 2t-2$

$x = 2\,\frac{t-1}{t^2+1}$

$dx = \frac{2(t^2+1)-4t^2+4t}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{2(1+2t-t^2)}{(t^2+1)^2}\,dt$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{2t\cdot\frac{t-1}{t^2+1}}\cdot\frac{2(1+2t-t^2)}{(t^2+1)^2}\,dt = \underline{\int \frac{1+2t-t^2}{t(t-1)(t^2+1)}\,dt}$

$x=-2 \qquad x=0$

Nyní se nalezne primitivní fce pro $t\neq 0$, $t\neq 1$, dosadíme za t a spočteme $\lim\limits_{x\to 0^\pm} F(x)$.
Tím zjistíme, jak je třeba volit integrační konstantu nutnou ke spojitosti $F(x)$ – viz cvičení.

V. Goniometrické substituce

$\int R(\cos x, \sin x)\,dx$

① Vždy vede k cíli $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ $\qquad x\in(-\pi+k\pi, \pi+k\pi)$, $k\in\mathbb{Z} \Rightarrow t\in\mathbb{R}$

$x = 2\operatorname{arctg} t$

$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$

$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

② Je-li splněno $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$

Potom $t = \sin x$ $\qquad \left(x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad t\in(-1,1)\right)$

$\underline{dt = \cos x\,dx}$ $\quad$ a vždy půjde použít $\sin^2x+\cos^2x = 1$

③ Analogicky pro $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$

$t = \cos x$ $\qquad \left(x\in(0,\pi)\right) \qquad t\in(-1,1)$

$dt = -\sin x\,dx$

④ Je-li $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$

$t = \operatorname{tg} x$ $\qquad x\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad t\in\mathbb{R}$

$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$\cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2x+\cos^2x} = \frac{1}{1+t^2} \qquad \sin x\cos x = \frac{\sin x\cos x}{\sin^2x+\cos^2x} = \frac{t}{1+t^2}$

$\sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2x+\cos^2x} = \frac{t^2}{1+t^2}$

Pozn.: Často trenažérová substituce vede na jednodušší výraz než obecná substituce.

Příklad 7

$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx \qquad x \in \mathbb{R}$$

Zde se nabízí substituce (4): $t = \operatorname{tg} x$ $\overset{\text{1. subst. metoda}}{,}$ ale $x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$. Uvidíme později, co bude dělat v bodech $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$!

Tedy
$$\int \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{1}{1+\frac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{1+2t^2}\,dt = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}\sqrt{2}\,t + C} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C}$$

$x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$

Ale všimneme si, že
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) = +\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{2}$$
$\Rightarrow$ při přechodu skrz $\frac{\pi}{2}+k\pi$ má funkce skok $\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$

Proto definujeme

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + k\cdot\pi\frac{\sqrt{2}}{2} + C & x \in (-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\frac{\sqrt{2}}{2} + C & x = \frac{\pi}{2}+k\pi \end{cases}$$

Potom $F(x)$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a diferencovatelná na $\mathbb{R}$ (v bodech $x = \frac{\pi}{2}+k\pi$ je třeba počítat z definice) a je tudíž primitivní fce k $\frac{1}{1+\sin^2 x}$ na $\mathbb{R}$.

Doporučit příklady:

(i) $\int \frac{dx}{1+x^4}$ popř. $\int \frac{dx}{1+x^6}$

(ii) $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$, $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$, $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$

ukázat Eulerovy substituce ~~X~~ $x = \sin t$ a $\cos t$ resp. $x = \cosh t$ a $\sinh t$

(iii) $\int \frac{\sin x \cos x}{1+\cos^2 x}\,dx$ vyzkoušet všechny 4 možné substituce $t = \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{tg}\frac{x}{2}$

(+ trik $u = t^2$)

Trik: $\int \frac{t}{(t^2+1)(t^2+3)(t^2+5)}\,dt \overset{\text{subst}}{\underset{z=t^2}{=}} \int \frac{\frac{1}{2}dz}{(z+1)(z+3)(z+5)}$ jednodušší..., $\frac{A}{(t^2+1)(t^2+2)} = \frac{B}{t^2+1} + \frac{C}{t^2+2}$ subst $z = t^2$