MAF 033

MATEMATICKÁ ANALÝZA I (4 písemky)

- jméno + spojení
- konzultace, cvičení
- něco o zkoušce
- požadavky

Literatura: J. Kopáček: Matematická analýza pro fyziky I, Matfyzpress Praha 1997
Vl. Souček: www.karlin.mff.cuni.cz/~soucek
J. Černý, M. Rokyta: Differential and Integral Calculus of One Real Variable, Karolinum, Praha 1998
V. Jarník: Diferenciální počet I, Academia (1946 I. vydání)
V. Jarník: Integrální počet I, Academia (–//–)

Sbírky příkladů: J. Kopáček: Příklady z matematiky pro fyziky I, Matfyzpress, Praha 1998
B.P. Demidovič: Сборник задач и упражнений по математическому анализу, Москва 1977
~~J. Polák: Matematická analýza I, SPN Praha, 1984~~
J. Kojecká, M. Závodný: Příklady z matematické analýzy I, UP Olomouc 1999
–//– II, –//– 2003

§ 0. Úvod (historický) 1/2 př

Matematika je věda, která má mezi přírodními vědami specifické postavení. Na jedné straně je schopna se rozvíjet sama o sobě, bez potřeby aplikace jejích výsledků mimo svůj obor, na druhé straně byla v minulosti ale je i v současnosti výrazně ovlivňována jinými vědními obory (v minulosti především fyzikou, dnes však i ekonomií, (chemií, medicínou) či sociálními vědami). Na druhou stranu zase matematika dělá jiné obory výrazně ovlivňuje. Stačí si např. uvědomit, kolik nositelů Nobelovy ceny za ekonomii bylo vlastně matematiků.

Na rozdíl od např. fyziky se matematika neopírá o experiment (viz ~~J. Matoušek~~: Experimentální matematika, [illegible] Pokroky 1/99); vytváří vlastní struktury a na základě logických úvah zkoumá jejich vlastnosti. Je proto vhodná i jako prostředek k rozvíjení si logického uvažování.

Samotná matematická analýza se v dnešním pojetí věnuje především vlastnostem funkcí. Než však vůbec dospěla k pojmu funkce, její derivace a integrál, urazila pěkný kus cesty.

Je zajímavé, že úvahy týkající se integrálu, se objevují již v matematice v Mezopotámii a Egyptě ve starověku. Šlo především o studium obsahů a objemů. Velký pokrok udělala Řecká škola (zejména studium obsahů útvarů postupným „vyčerpáváním" daného obsahu pomocí útvarů, kde umíme obsah spočítat – vlastně blízko se dnešnímu pojmu limity).

Evropská matematika se dostala na úroveň řecké matematiky až někdy kolem 15. století. O tom, jak byla tehdy matematika spjata s praktickým životem svědčí např. dílo J. Keplera: „Nová stereometrie vinných sudů".

Koncem 16. století zavedl F. Viète symboliku, kterou zdokonalil R. Descartes v 17. století.

V 17. století potom přichází I. Newton a G. W. Leibniz, kteří nezávisle zavedli pojem derivace funkce a integrálu (jméno integrál ale pochází od Johanna Bernoulliho). V 19. století potom A. L. Cauchy a B. Bolzano zavedli pojem limity a matematika (analýza) posléze dostává další řád.

Koncem 19. století (a počátkem 20. století) se objevuje velký problém – ukazuje se, že pojem množina, který byl do té doby chápán spíše intuitivně, může vést k jistým problémům. Objevují se axiomatické teorie množin (G. Cantor byl první, Edo se o podobné studie pokusil). V roce 1900 přichází D. Hilbert se svým návrhem formálního vybudování matematiky, u níž se pak dokáže bezespornost. Tento program rozbil ve 30. letech K. Gödel: a) Je-li axiomatická teorie bezesporná, pak v ní existují věta, které se nedá vyvrátit ani dokázat.
b) Neexistuje žádný konstruktivní postup, který by ukázal, že teorie je bezesporná.

I přes tyto potíže zůstává matematika vědou s bezesporně velkým významem jak sama o sobě, tak i pro ostatní vědní obory.

§1 Úvod (něco o logice, teorii množin a číslech) (4 přednášky)

1.1. Logika ½ př.

Budeme pracovat výhradně s dvouhodnotovou logikou. Budeme tedy uvažovat pouze věty, tzv. výroky – tvrzení, o kterém má smysl říci, že je pravdivé či nepravdivé. 1 = T, 0 = F

Výroková funkce: je předpis, který prvku x z dané „množiny" přiřadí výrok (P(x))

Příklad: Výrok: Tabule v T1 je červená (tj. hodnota je 0)
Výroková funkce: Tabule v posluchárně x je červená. x probíhá všechny posluchárny na MFF UK.

Logické spojky: slouží k vytváření komplikovanějších výroků. Zadávají se pravdivostní tabulkou

A	B	negace non A	konjunkce $A \wedge B$	disjunkce $A \vee B$	implikace $A \Rightarrow B$	ekvivalence $A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

$((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

Př.: A: Venku prší
B: ~~Země~~ Jsem doma

negace: Venku neprší
konjunkce: Venku prší a (současně) jsem doma.
disjunkce: Buď venku prší nebo jsem doma.
implikace: Jestliže venku prší, jsem doma
ekvivalence: Venku prší právě tehdy když jsem doma.

MAF 032

Kvantifikátory

1, Existenční : $\exists$

$\exists x \in M: P(x)$ (Existuje x z množiny M takové, že výrok P(x) je pravdivý)

2, Obecný : $\forall$

$\forall x \in M: P(x)$ (Pro všechna x z množiny M je výrok P(x) pravdivý)

+ zdůraznění: lze ~~[illegible]~~ libovolně často zaměňovat stejnojmenné kvantifikátory, různé ne!

Příklad :

Existuje přirozené číslo n takové, že $\sqrt{n}$ je přirozené číslo

$(\exists n \in \mathbb{N}: \sqrt{n} \in \mathbb{N})$ je pravdivý výrok (např. n = 1)

Pro všechna n přirozená je $\sqrt{n}$ přirozené číslo

$(\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt{n} \in \mathbb{N})$ je nepravdivý výrok (např. n = 2)

Pracujeme s dvouhodnotovou logikou, tj. vycházíme z následujících zákonů (axiomů)

1) Zákon sporu

Pro žádný výrok A není pravda současně ~~[illegible]~~ A i non A

2) Zákon vyloučeného třetího

Pro každý výrok A je buď A pravda a non A nepravda, nebo A je nepravda a non A je pravda.

Tvrzení 1

Platí : a) $A \Rightarrow A$

b) $(A \Rightarrow B \text{ a } B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$

c) $A \Leftrightarrow A$

d) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow A)$

e) $(A \Leftrightarrow B, B \Leftrightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)$

f) $non(non A) \Leftrightarrow A$

g) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (non B \Rightarrow non A)$

h) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (non B \Leftrightarrow non A)$

i) $non(A \vee B) \Leftrightarrow (non A) \wedge (non B)$

j) $non(A \wedge B) \Leftrightarrow (non A) \vee (non B)$

k) $non(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge (non B)$

l) $non(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge non B) \vee (B \wedge non A)$

m) $non(\exists x \in M: P(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M: non P(x)$

n) $non(\forall x \in M: P(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M: non P(x)$

Důk

Viz cvičení (pomocí tabulky hodnot)

Tvrzení, které budeme většinou dokazovat, je implikace (popř. ekvivalence – tj. složená implikace $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$). Z tvrzení 1 plynou následující metody důkazu

a) přímý důkaz
b) nepřímý důkaz (viz g))
c) důkaz sporem (viz k))

Příklad:

Dokažme: Nechť $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Potom n^2 liché $\Rightarrow$ n je liché. $(\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 = 2k+1 \Rightarrow n = 2l+1,\ k, l \in \mathbb{N})$

a) $n = p_1 \cdot p_2 \cdots p_r$, kde p_i jsou prvočísla (rozklad lze vždy provést). Potom $n^2 = p_1^2 p_2^2 \cdots p_r^2$. Jelikož n^2 je liché, tak žádné p_i není 2 a tedy n je liché.

b) Budeme dokazovat (viz g)): Je-li n sudé $\Rightarrow$ n^2 je sudé.
Tedy $n = 2k \Rightarrow n^2 = 4k^2$ je sudé.

c) (viz k)) Nechť tedy n^2 je liché a n je sudé. Potom $n^2 + n$ je liché, ale $n^2 + n = n(n+1)$ je vždy sudé a to je spor. ↯

Pozn.: 1) Základy logiky položil Aristoteles. Při četbě Platóna se můžeme setkat s tím, že "Sokrates "usvědčil" své spoluobčany na základě úvahy $(A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C) \Rightarrow C \Rightarrow A$, což je logicky špatně.

2) Dvouhodnotová logika není jediná možná (viz např. fuzzy logika apod.). Ne všechny výroky jsou ano/ne, např. Lhář: Já jsem lhář (nelze rozhodnout o pravdivosti, protože lhář vždy lže) nebo tvrzení, které je pravdivé ale nelze ho dokázat.
Gödel: "Toto věta nelze dokázat"
(Kdyby nebyla pravda, tj. ~~Tuto větu lze dokázat~~ Věta: "Tuto větu nelze dokázat" lze dokázat, dostaneme spor s tvrzením).

My budeme podobné situace zásadně vynechávat.

1.2 Množiny

<1/2 př.

Dlouho v matematice převládal názor, že pojem množiny stačí chápat intuitivně, tj. jako soubor prvků, které splňují určité vlastnosti. Koncem 19. století začal G. Cantor pojem množiny studovat podrobněji. V této době se také objevují první potíže.

Příklad (B. Russell)

Nechť Y je množina všech takových množin, které neobsahují sebe samu jako prvek.
Je Y prvkem sebe samé?
Pokud ano – spor, neboť Y obsahuje sebe samu
Pokud ne – spor, protože pak Y by mělo patřit do této množiny

Proto se budovala postupně řada modelů axiomatické teorie množin, která by podobné <u>antinomie</u> vyloučila.

Pro naše účely stačí vědět, že množiny splňují takovou vlastnost, že pro každý prvek x lze jednoznačně rozhodnout, zda x do M patří či nikoliv.

<u>Základní pojmy</u>

1, $x \in M$ 2, $x \notin M$ 3, $P \subset M$ (tj. $\forall x \in P$ platí $x \in M$) 4, $P = M$ (tj. $P \subset M \wedge M \subset P$)
5, $M \cup P$ (tj. $x \in M \cup P$: $x \in M \vee x \in P$) 6, $M \cap P$ ($x \in M \cap P$: $x \in M \wedge x \in P$)
7, $\emptyset$ (prázdná množina je prvkem každé množiny) 8, $\exp M$ – množina všech podmnožin M (pozn. je-li M konečná, pak má $\exp M$ právě 2^n prvků, kde n je počet prvků M – smysl řádku Pascalova trojúhelníku) 9, $C \setminus M = \{x \in C, x \notin M\}$ – není symetrické! 10, A, B dvě množiny
$A \times B = (a,b): a \in A, b \in B$ (kartézský součin množin) – Např: $R^N = \underbrace{R \times R \times \dots R}_{N\text{krát}}$

<u>Tvrzení 2</u> (De Morganovy vzorce)
Nechť A, B, C jsou dvě množiny. Potom

$$C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$$
$$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$$

<u>Dk</u>
cvičení

Důležitou vlastností, která na první pohled vypadá nevinně, je možnost vybrat z každé množiny po jednom prvku – tzv. axiom výběru. Ukázalo se, že ani axiomatická teorie množin nevyřešila všechny problémy. Jednak není možné kombinatorickými prostředky dokázat, že teorie je bezesporná, navíc v ní existují výroky, které se nedají kombinatorickými dokázat ~~nerozhodnutelné výroky~~ (1.7 Gödel).

Pokud máme nějakou bezespornou teorii a přidáme k ní axiom výběru, pak zůstane bezesporná. To vedlo některé nadšence ke studiu alternativních teorií množin, kde ~~se~~ axiom výběru nevyžadují. Je třeba říci, že vzniklé teorie jsou méně bohaté než teorie, které axiom výběru obsahují.

1.3 Zobrazení

<u>Definice 1</u> < ½ př

Nechť A, B jsou dvě množiny, $D \subset A$. Nechť $\forall x \in D$ je dáno ! (právě jedno) $y_x \in B$. Označme $y_x = \varphi(x)$. Potom říkáme, že $\varphi: A \xrightarrow{} B$ (D_φ) je zobrazení z množiny A do množiny B. Množinu D nazýváme definičním oborem φ, množinu $\varphi(D)$ oborem hodnot zobrazení φ (značíme často R_φ). Množinu $\{x \in D, \varphi(x) = y\}$ označujeme jako vzor ~~bo~~ prvku y.
Je-li $R_\varphi = B$, mluvíme o zobrazení <u>na</u>, je-li $D = A$ mluvíme o zobrazení <u>množiny A</u>.
(surjektivní)

Pozn.:

Nechť $X = A \times B$. Potom každou podmnožinu $A \times B$ nazýváme relací. Zobrazení není tedy nic jiného než relace na $A \times B$. My ale tento přístup nebudeme užívat.

Příklady 1) $a, b \in \mathbb{R}$. Potom $\varphi(x) = ax + b$ … lineární zobrazení (affinní) (speciální lineární funkce, viz dále)

2) $\varphi(x) = x$ $\varphi: A \to A$ se nazývá identita

3) $\varphi(x) = a$ $\forall x \in D_\varphi$ konstantní zobrazení

4) Je-li $A \subset \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}(\mathbb{C})$ mluvíme o reálné (kompl.) fci jedné reálné proměnné

5) Je-li $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{R}(\mathbb{C})$ mluvíme o posloupnosti (reálné, kompx.)

6) $A, B = \mathbb{R}$ a relace $\varphi: x \mapsto y$ taková, že $y^2 = x$ není zobrazení ($x > 0$ $\exists y_{1,2}$: $y \pm \sqrt{x}$)

Definice 2

Nechť $\forall x_1, x_2 \in D_\varphi$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$. Potom φ se nazývá prosté zobrazení. (injektivní)

Zobrazení prosté a na se nazývá vzájemně jednoznačné zobrazení (bijekce).

(Ekvivalentně $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$).

Příklad 1) $\varphi(x) = x^2$ $x \in \mathbb{R}$ není prosté

2) $\varphi(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}^+_0$ je prosté

Znamená to tedy, že zadat zobrazení nemusí být jen zadat předpis, jak k $x \in D_\varphi$ najít $\varphi(x)$, ale i zadat D_φ! Z toho plyne, že dvě zobrazení $\varphi_1 = \varphi_2$, jestliže

a) $D_{\varphi_1} = D_{\varphi_2}$

b) $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ $\forall x \in D_{\varphi_1} = D_{\varphi_2}$.

Je-li zobrazení prosté, pak každý vzor má právě jeden obraz a lze definovat

Definice 3

Nechť $\varphi: A \to B$ je prosté zobrazení. Potom zobrazení $\varphi^{-1}: B \to A$ definujeme:

$D_{\varphi^{-1}} = R_\varphi$

$R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi$

$\varphi^{-1}(x) = y \iff x = \varphi(y)$.

Příklad: (viz str. 5)

ad 2) $\varphi(x) = x^2 \Rightarrow$ $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}^+_0$ (neboť $y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$).

Pozn.: Chápeme-li zobrazení jako relaci na $A \times B$, je inverzní zobrazení relace na $B \times A$ takové, že $(y, x) \in \varphi^{-1}$ je relace na $B \times A$ $\iff$ (x, y) je relace na $A \times B$.

Definice 4

Nechť $\varphi: A \to C$, $\psi: C \to B$, $R_\varphi \cap D_\psi \neq \emptyset$. Pak složené zobrazení $\psi \circ \varphi$:

a) $D_{\psi\circ\varphi} = \{x \in D_\varphi : \varphi(x) \in D_\psi\}$

b) $(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$.

Příklad. $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\varphi(x) = 2x+1$

$\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\psi(y) = \sqrt{y}$

$(\psi\circ\varphi)(x) = \sqrt{2x+1}$ $D_{\psi\circ\varphi} = \{x \in \mathbb{R};\ x \geq -\frac{1}{2}\}$.

Tvrzení 3

Nechť $\varphi: A \to B$ je prosté zobrazení. Pak

1) φ^{-1} je prosté zobrazení z B do A, $R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi$.

2) $\varphi^{-1} \circ \varphi = Id$, ~~$\varphi\circ\varphi^{-1} = Id$~~ $x \in D_\varphi$, $\varphi \circ \varphi^{-1} = Id$, $x \in D_{\varphi^{-1}}$.

3) $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$

Důkaz

1) Je třeba dokázat prostotu φ^{-1}. Nechť $x_1, x_2 \in R_\varphi = D_{\varphi^{-1}}$: $\varphi^{-1}(x_1) = \varphi^{-1}(x_2) = y$. Dle definice $\varphi(y) = x_1 = x_2$ tj. $x_1 = x_2$.

2) Nechť $\tilde{x} = \varphi^{-1}(\varphi(x))$, tj. dle definice $\varphi(\tilde{x}) = \varphi(x)$ a tedy díky prostotě φ $\tilde{x} = x$.
Analogicky se dokáže druhá rovnost.

3) ~~$(\varphi^{-1})^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \varphi^{-1}(x) = \varphi(y)$~~

Víme, že $D_{\varphi^{-1}} = R_\varphi$, tedy $D_{(\varphi^{-1})^{-1}} = R_{\varphi^{-1}} = D_\varphi$. Dále $(\varphi^{-1})^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(y)$ tj. $y = \varphi(x)$. ∎

(Pozn.: formulace axiomu výběru)

1.4 Číselné obory > 2 př.

Předpokládáme, že víme zhruba intuitivně, co to jsou reálná čísla. Uvědomme si dvojí způsob, jak reálná čísla zavést. Prvním je axiomatický, tj. budeme požadovat jisté axiomy na množinu čísel a ukážeme, že tímto axiomům vyhovují právě reálná čísla. Druhý způsob, tj. konstrukce reálných čísel pomocí „řezů", jen naznačíme. Více viz např. Jarník: Dif. počet I.

1.4.1 Axiomatické zavedení reálných čísel

Definice 5

Nechť X je množina. Relaci R na X×X, splňující
- reflexivita: $(x,x) \in R$
- tranzitivita: $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$
- antisymetrie: $(x,y) \in R$, $(y,x) \in R \Rightarrow x = y$

Budeme nazývat (částečným) uspořádáním. Je-li tato relace ~~...~~ navíc, tak ji nazýváme úplným uspořádáním. Značíme $\leq$.

(tj. $\forall x,y \in R$ buď (x,y) nebo $(y,x) \in R$)

Pozn. (Ověřte, že menší nebo rovno splňuje všechny předpoklady a je na R úplným uspořádáním)
(ve smyslu $(x,y) \in R \Leftrightarrow x \leq y$). Analogicky definujeme relaci $<$ (ostře) jako $\leq$ a není rovno, resp. $\geq$ a $>$.

Definice 6 (supremum, infimum)

Nechť $B \subseteq A$ a nechť na A je definováno úplné uspořádání. Nechť B je shora omezená množina, tj. $\exists a \in A: \forall x \in B \; x \leq a$. Potom $S \in A$ nazv. supremum B, jestliže

- S je horní závora (tj. $\forall x \in B \; x \leq S$)
- S je nejmenší horní závora (tj. $\forall y \in A, y < S \; \exists x \in B: x > y$)

$s \in A$ nazv. infimum B, jestliže B je zdola omezená a

- s je dolní závora (tj. $\forall x \in B \; x \geq s$)
- s je největší dolní závora (tj. $\forall y \in A, y > s \; \exists x \in B: x < y$).

$[0,1)$ resp. $[0,1]$

Definice 7 (Reálná čísla)

Nechť R je neprázdná množina s definovanými operacemi sčítání $(+)$, násobení $(\cdot)$ a úplným uspořádáním ~~relací~~ $\leq$. Množinu R nazv. množinou reálných čísel, jestliže

A1) $(\forall \alpha,\beta \in R) \; \exists! \gamma \in R: \gamma = \alpha + \beta$

A2) $\forall \alpha,\beta \in R \quad \alpha+\beta = \beta+\alpha$ (komutativita sčítání)

A3) $\forall \alpha,\beta,\gamma \in R \quad (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha + (\beta+\gamma)$ (asociativita sčítání)

A4) $\exists!$ prvek z R, 0, : $x+0 = 0+x = x$ ($\exists$ nulového (neutrálního) prvku vzhledem ke sčítání)

A5) $\forall x \in R \; \exists! \, -x \in R: \; x + (-x) = (-x)+x = 0$ ($\exists$ inverzního prvku)

P1) $(\forall \alpha,\beta \in R) \; \exists! \gamma \in R: \alpha\beta = \gamma$

P2) $(\forall \alpha,\beta \in R) \; \alpha\beta = \beta\alpha$ (komutativita násobení)

P3) $\forall \alpha,\beta,\gamma \in R \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha\cdot(\beta\gamma)$ (asociativita násobení)

P4) $\exists 1 \in R: \quad 1\cdot x = x \cdot 1 = x$ ($\exists$ neutrálního (jednotkového) prvku vzhledem k násobení)

P5) $\forall x \in R \setminus \{0\} \; \exists x^{-1} \in R: \; x^{-1}x = x \cdot x^{-1} = 1$ ($\exists$ inverzního prvku)

D1) $\forall a,b,c \in R \quad a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ (distributivita vůči sčítání)

U1) $\exists$ nějaké úplné uspořádání dle Definice 5

U2) $(\forall \alpha,\beta \in R) \; (0 \leq \alpha) \wedge (0 \leq \beta) \Rightarrow 0 \leq \alpha\cdot\beta$

U3) $(\forall \alpha,\beta,\gamma \in R)$, $\alpha \leq \beta \Rightarrow \alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$

(T1) Každá shora omezená podmnožina R má supremum (v R)

neprázdná

Pozn.: a) Vlastnosti (A1)-(A5) říkají, že $\mathbb{R}, (+)$ je komutativní (tj. Abelova) grupa.

b) Analogicky (P1)-(P5) říkají, že $\mathbb{R}\setminus\{0\}, (\cdot)$ je komutativní grupa.

c) Dohromady (A1)-(A5), (P1)-(P5), (D1) říkají, že $\mathbb{R}$ je těleso vůči $(+,\cdot)$

d) Spolu s (U1)-(U3) uspořádané těleso

e) Vlastnost, která odlišuje $\mathbb{R}$ od racionálních čísel (jak uvidíme později) je právě (T1). Zatím totiž $\mathbb{Q}$ všechny ostatní vlastnosti splňuje.

f) Vlastnosti (A1)-(A5), (P1)-(P5), (D1) splňuje i dvouprvková množina! Stačí totiž definovat

$$+\ \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \cdot\ \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

(Dokažte si!)

a všechny axiomy zůstávají v platnosti. Teprve dodání uspořádání strukturu obohatí.

$\mathbb{R}$ často zobrazujeme jako body na přímce (reálná osa). Měřítko zvolíme volbou poloh 0 a 1. Uspořádání pak znamená, že $x<y \iff x$ je vlevo od y. Množina bodů ležících mezi a a b se nazývá interval. Zavádíme značení.

$]a,b[\ = \{x\in\mathbb{R};\ a<x<b\}$ otevřený interval

$]a,b]\ = \{x\in\mathbb{R};\ a<x\le b\}$ polouzavřený interval

$[a,b[\ = \{x\in\mathbb{R};\ a\le x<b\}$

$[a,b]\ = \{x\in\mathbb{R};\ a\le x\le b\}$ uzavřený interval

} omezené intervaly

$]a,+\infty[\ = \{x\in\mathbb{R};\ x>a\}$

$[a,+\infty[\ = \{x\in\mathbb{R};\ x\ge a\}$

$]-\infty,a]\ = \{x\in\mathbb{R};\ x\le a\}$

$]-\infty,a[\ = \{x\in\mathbb{R};\ x<a\}$

$\mathbb{R} = \ ]-\infty,\infty[$

} neomezené intervaly

Pozor: $\pm\infty \notin \mathbb{R}$!

1.4.2 Přirozená, celá a racionální čísla

Definice 8.

Přirozená čísla $\mathbb{N}$ budeme definovat jako nejmenší podmnožinu $\mathbb{R}$ splňující

- $1\in\mathbb{N}$
- $x\in\mathbb{N} \Rightarrow x+1\in\mathbb{N}$. (tzv. induktivní podmínka)

Pozn.: Pokud bychom vynechali slovo nejmenší, mohli bychom dostat cokoliv – $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}$ apod.

Označení: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Pozn.: Zřejmě je každá podmnožina $\mathbb{N}$ omezená zdola.

Definice 9

Celá čísla $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{x;\ -x \in \mathbb{N}\} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$.

Definice 10

Racionální čísla $\mathbb{Q} = \{x;\ x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$

Cvičení

Ověřte, že $\mathbb{Q}$ splňuje ~~předpoklady~~ axiomy $\mathbb{R}$, kromě (T1) (výsledek lze standardními operacemi sčítání a násobení).

Připomeňme, že každé přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ může jednoznačně (až na pořadí) rozložit na součin $n = p_1 \cdots p_k$, kde p_i jsou prvočísla (tj. dělitelé jsou pouze 1 – jednička a číslo samotné). (Číslo 1 je třeba vynechat). Toto netriviální tvrzení nebudeme dokazovat.

~~Věnujme se též některým vlastnostem $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$.~~

Tvrzení 4

$\mathbb{N}$ není omezená shora.

Důkaz

Nechť $\mathbb{N}$ je omezená shora. Protože $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\exists\, a = \sup \mathbb{N}$. Dle definice suprema tedy $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$: $a - 1 < n_0 \le a$. Potom ale $n_0 + 1 > a$ a dle definice $\mathbb{N}$ $n_0 + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow$ spor. ∎

Pozn. 1 (0.3)

Pozn. Z vlastnosti $\mathbb{N}$ (a z její definice) plyne tzv. důkaz indukcí. Nechť máme výrokovou formu $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$ a nechť platí:

a) $P(1)$ je T

b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $P(n)$ je T $\Rightarrow$ $P(n+1)$ je T

Potom $P(n)$ je T $\forall n \in \mathbb{N}$.

1.4.3 Vlastnosti reálných, racionálních a přirozených čísel

Nyní si uvedeme některé základní vlastnosti výše zavedených číselných oborů. Většinu z nich znáte na základě intuitivní představy, co jednotlivé číselné obory obvyklé ~~[illegible]~~ znamenají. My si je nyní uvedeme na základě jejich axiomatického zavedení.

Tvrzení 5

a) Nechť $x \in \mathbb{R}$, libovolné. Potom existuje $n \in \mathbb{N}$: $n > x$

b) Nechť $y \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ libovolné. Potom $\exists\, n \in \mathbb{N}$: $n\varepsilon > y$ (tzv. Archimédův princip)

Důkaz

a) Nechť tvrzení není pravda. Potom x je horní závora $\mathbb{N}$, což je spor s Tvrzením 4 (neomezenost $\mathbb{N}$)

b) ~~[illegible]~~ Díky (V2) je tvrzení ekvivalentní $n > \frac{y}{\varepsilon}$ a stačí použít tvrzení a).

Tvrzení 6

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Nechť $\forall \varepsilon > 0$: $a < b + \varepsilon$ ($\leq$). Potom $a \leq b$.

Důsledek: $x < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$. Pak $x \leq 0$. (Ekvivalentně ≤ 0).

Dk.

Předpokládejme, že tvrzení není pravda, tj. platí $b < a$. Zvolme $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$ (>0) a tedy

$$b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} < \frac{a+a}{2} = a$$

což je spor s tvrzením. ∎

(z $\frac{a+b}{2}$ platí $\frac{a+b}{2}$)

Tvrzení 7.

Pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ $\exists\, r \in \mathbb{Q}$: $x < r < y$.

Důsledek 1

Mezi každými dvěma reálnými čísly $\exists$ nekonečně mnoho racionálních (a reálných) čísel. (tj. více než libovolné konečné množství).

Důkaz (Tvrz. 7)

Protože $y - x > 0$, je také $\frac{1}{y-x} > 0$ a tudíž existuje $n \in \mathbb{N}$: $n > \frac{1}{y-x}$ (*).
Dále BÚNO předpokládejme, že $x > 0$ (jinak nalezneme $p \in \mathbb{N}$: $-x < p$ a vše provedeme níže uvedeným pro $x_p = x + p$, $y_p = y + p$ a nalezneme r_p. Hledané číslo $r = r_p - p \in \mathbb{Q}$.)
Dále k číslu $nx \in \mathbb{R}$ $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tak, že $nx < m$, tedy

(*) $\quad x < \frac{m}{n}$.

Označme m' minimální $m \in \mathbb{N}$: že (*) platí (určitě $\exists$, protože $\mathbb{N}$ je zdola omezená).
Potom, díky tomu, že $x > 0$

$$\frac{m'-1}{n} \leq x < \frac{m'}{n}$$

a tudíž

$$x < \frac{m'}{n} = \frac{m'-1}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} \leq x + y - x = y, \text{ tj.}$$

$\boxed{x < \frac{m'}{n} < y}$ a $r = \frac{m'}{n}$.

V důkazu redukce konec. ∎

Dk Důsledku

Mezi x a y leží alespoň jedno rac. číslo r_1. Analogicky mezi x a r_1 leží alespoň jedno rac. číslo r_2 atd.
~~Opakujeme $x' = \frac{x+y}{2}$ leží mezi x a y a mezi čísly x, x'~~ ($\mathbb{N}$) ~~(x', y) leží opět alespoň jedno rac. číslo, tj.~~ alespoň jedno je různé od předchozích
Předpokládáme-li, že mezi x a y je konečně mnoho rac. čísel, vede dalo bychom spor s N+1 čísel. ∎

Čísla, která nejsou racionální, budeme nazývat iracionální. Čtenář hned udělat analogii Tvrzení 7, tj. že mezi každými dvěma reálnými čísly leží nekonečně mnoho iracionálních čísel. Dokažme nejprve, že alespoň jedno iracionální číslo existuje.

Tvrzení 8.

$\sqrt{2}$ je iracionální číslo (tj. $x \in \mathbb{R}^+$: $x^2 = 2$ je iracionální číslo).

Důkaz

Nechť $\sqrt{2}$ je racionální číslo. Tj $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Jelikož každé přirozené číslo může zapsat jako součin prvočísel, můžeme speciálně požadovat, aby p a q neměli společného dělitele. Potom

$$2 = x^2 = \frac{p_1^2 \cdots p_k^2}{q_1^2 \cdots q_l^2}$$, kde p_i, q_i jsou prvočísla. Musí nutně být alespoň jedno $p_i = 2$ (jinak spor). ~~Třeba~~ BÚNO $p_1 = 2$. Potom

$$1 = \frac{2 \cdot p_2^2 \cdots p_k^2}{q_1^2 \cdots q_l^2} \quad (*)$$

Aby platilo $(*)$, pak $\exists q_j = 2$. To ale dokazuje spor s nesoudělností p a q. ∎

Pozn. Jiné příklady iracionálních čísel jsou π a e (π může definovat např. jako konstantu c: $S_O = c r^2$, nebo pomocí řady $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\left(= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots\right)$. To, že to jsou irac. čísla, vyžaduje důkaz).

Důsledek 2

Existuje nekonečně mnoho iracionálních čísel.

Důkaz

Stačí dokázat, že když r je iracionální a q je racionální, pak $r+q$ je iracionální. Ale nechť to není pravda, tj. $r+q = z_q \in \mathbb{Q}$. Pak $r = z_q - q$ a $z_q - q \in \mathbb{Q}$, spor. ∎

Důsledek 3

Množina $\mathbb{Q}$ nesplňuje axiom úplnosti.

Dk

Ukážeme, že množina

$$M = \{z \in \mathbb{Q} : z^2 \le 2\}$$

nemá supremum v $\mathbb{Q}$. Nechť $\sup M$ ($\exists$, neboť M je podmnožina reál. čísel, shora omezená) $\in \mathbb{Q}$. Nutně $\sup M \neq \sqrt{2}$ viz Tvrzení 8. Ale je-li $\sup M < \sqrt{2}$, pak $\exists\, q_1 \in (\sup M, \sqrt{2})$ racionální (viz Tvrzení 7) a to je spor s tím, že $\sup M$ je horní závorou. Analogicky je-li $\sup M > \sqrt{2}$, pak $\exists\, q_2 \in (\sqrt{2}, \sup M)$ a dostáváme spor s tím, že $\sup M$ je nejmenší horní závorou. ∎

Dk

~~Důsledek 4~~ Tvrzení 9

Mezi každými dvěma reálnými čísly $\exists$ alespoň jedno iracionální číslo (a dokonce jich nekonečně mnoho)

Dk

Díky ~~tvrzení~~ ~~Důsledku 2~~ Tvrzení 8 víme, že $\exists$ alespoň jedno iracionální číslo. Označme ho r. Nechť $a < b$ jsou dvě reálná čísla. Je-li $r \in (a,b)$, není co dokazovat. Tedy nechť BÚNO $r > b$ (analogicky se dokáže $r < a$). Potom mezi čísly $r-b$ a $r-a$ $\exists$ dle Tvrzení 7 alespoň jedno racionální číslo q. $r-a > q > r-b$ Potom tedy $a+q < r < b+q$ tj. $a < r-q < b$. Dle Důsledku 2 víme, že $r-q$ je iracionální. To, že je jich nekonečně mnoho, se dokáže analogicky jako Důsledek 1. ∎

1.4 Některé nerovnosti

Definice 11

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Definujme $|x| = \begin{cases} x & \text{pro } x \geq 0 \\ -x & \text{pro } x < 0 \end{cases}$.

Pozn.: Jde tedy vlastně o vzdálenost od počátku.

Tvrzení 10:

Je-li $a \geq 0$, potom $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$. Speciálně $-|x| \leq x \leq |x|$ (*)

Dk (DÚ)

Mohou nastat dvě možnosti: $x = |x|$ nebo $x = -|x|$. Potom tedy

(*) $-|x| \leq x \leq |x|$, tj.

$\Rightarrow$ $-a \leq |x| \leq x \leq |x| \leq a$.

$\Leftarrow$ Nechť $-a \leq x \leq a$. Pro ~~x~~ $x \geq 0$: $-a \leq |x| \leq a$; $x \leq 0$: $-a \leq -|x| \leq a$ $\Big\} \Rightarrow$ $|x| \leq a$. ∎

Tvrzení 11 (trojúhelníková nerovnost)

a) $\forall x,y \in \mathbb{R}$: $|x+y| \leq |x| + |y|$

b) $\forall x,y \in \mathbb{R}$: $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$

c) $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$ $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$.

Dk

a) dle (*) platí $-|x| \leq x \leq |x|$, $-|y| \leq y \leq |y|$

$\Downarrow$

$-(|x|+|y|) \leq x+y \leq |x|+|y|$

a tedy $|x+y| \leq \big||x|+|y|\big| = |x|+|y|$.

b) z a) plyne

$|z_1 + z_2| - |z_2| \leq |z_1|$

Volíme: $z_1 = x-y$, $z_2 = y$ $\Rightarrow$ $|x| - |y| \leq |x-y|$

$z_1 = y-x$, $z_2 = x$: $|y| - |x| \leq |x-y|$ $\Rightarrow$ $|x-y| \geq \pm(|x|-|y|)$ $\Rightarrow$ $|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$.

c) $|x-y| = |x-z+z-y| \leq$ dle a) $\leq |x-z| + |z-y|$. ∎

Pozn.

$|x-y|$ je vzdálenost mezi body x a y.

Tvrzení 12 (Cauchy-Schwarzova nerovnost)

Nechť $a_1, \dots, a_n$ a $b_1, \dots, b_n$ jsou reálná čísla. Potom

(CS1) $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$

Je-li $\varepsilon > 0$ lib. reálné číslo, potom

(CS2) $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.

Pozn.

Vektor $(a_1, \dots, a_n)$ může chápat jako prvek z $\mathbb{R}^n$, $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ reprezentuje skalární součin, $\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2}$ normu v $\mathbb{R}^n$ a nerovnost (CS1) je nerovnost typu: $|(\vec{a}, \vec{b})| \leq \|\vec{a}\|_{\mathbb{R}^n} \|\vec{b}\|_{\mathbb{R}^n}$.

Dk

Víme $\sum_{k=1}^n (a_k \lambda + b_k)^2 \geq 0$ (Dokažte si z axiomů, že $a^2 \geq 0$ $\forall a \in \mathbb{R}$!)

Tedy $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0$, kde

$A := \sum_{k=1}^n a_k^2$

$B := \sum_{k=1}^n a_k b_k$

$C := \sum_{k=1}^n b_k^2$

Je-li $A = 0$ (tj. $a_k = 0$, $k=1,\dots,n$), je tvrzení (CS1) zřejmé. Nechť tedy $A > 0$ a volme $\lambda = -\frac{B}{A}$. Potom

$\frac{B^2}{A} - \frac{2B^2}{A} + C \geq 0$ tj. $B^2 \leq AC$, což dává (CS1).

Nyní k důkazu (CS2) stačí dokázat, že

(*) $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Ale zřejmě $AB \leq \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2$ a stačí vzít $A := a\sqrt{2\varepsilon}$, $B := \frac{b}{\sqrt{2\varepsilon}}$.

$\left((A-B)^2 \geq 0 \right)$

Nyní (CS2) plyne z (CS1) odmocněním a použitím (*).

Tvrzení 13 (AG-nerovnost)

Nechť $a_1, \dots, a_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Potom

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

Dk

Bude spolu dalšími nerovnostmi proveden na cvičení.

1.4.5. Komplexní čísla

Definice 12

~~Definujme~~ ~~...~~ ~~množinu~~ Množina $\mathbb{C} = \{z = (z_1, z_2), z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$ spolu s operacemi $\oplus$, $\circledast$

$z \oplus u = (z_1, z_2) \oplus (u_1, u_2) = (z_1 + u_1, z_2 + u_2)$

$z \circledast u = (z_1, z_2) \circledast (u_1, u_2) = (z_1 u_1 - z_2 u_2, z_1 u_2 + z_2 u_1)$.

Pozn. • $\mathbb{R}$ může chápat jako podmnožinu $\mathbb{C}$ ve smyslu, že $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}$ definuje $z = (x, 0)$.

• $\mathbb{C}$ je možno ztotožnit s $\mathbb{R}^2$ díky zobrazení

$\varphi: z \in \mathbb{C} \mapsto (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$.

Tvrzení 14

$\mathbb{C}$ vzhledem k operacím $\oplus$ a $\circledast$ tvoří těleso.

Dk (DÚ) 1/15

(A1): splněno

(A2): komutativita plyne z komutativity sčítání v $\mathbb{R}$

(A3): asociativita plyne z asociativity sčítání v $\mathbb{R}$

(A4): nulový prvek je $(0,0)$

(A5): inverzní prvek je $-z = (-z_1, -z_2)$

(P1): splněno

(P2): splněno z ~~…~~ komutativity násobení a sčítání

(P3): $(z \otimes u) \otimes v = (z_1 u_1 - z_2 u_2, z_1 u_2 + z_2 u_1)(v_1, v_2) = (z_1 u_1 v_1 - z_2 u_2 v_1 - z_1 u_2 v_2 - z_2 u_1 v_2, z_1 u_1 v_2 - z_2 u_2 v_2 + z_1 u_2 v_1 + z_2 u_1 v_2)$

$z \otimes (u \otimes v) = (z_1, z_2) \otimes (u_1 v_1 - u_2 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1) = (z_1 u_1 v_1 - z_1 u_2 v_2 - z_2 u_1 v_2 - z_2 u_2 v_1, z_1 u_1 v_2 + z_1 u_2 v_1 + z_2 u_1 v_1 - z_2 u_2 v_2)$

(P4) $1 = (1,0)$ $(z_1, z_2) \otimes (1,0) = (z_1, z_2)$

(P5) $z \in (z_1, z_2) \in \mathbb{C}$. Hledám $z^{-1} = (A,B)$: $(z_1, z_2) \otimes (A,B) = (1,0)$

tj.: $z_1 A - z_2 B = 1 \quad | z_2$

$z_2 A + z_1 B = 0 \quad | z_1$

$B(z_1^2 + z_2^2) = -z_2$ $\quad z_1^2 + z_2^2 \neq 0$ (tj. $(z_1, z_2) \neq (0,0)$)

$\boxed{B = \frac{-z_2}{z_1^2 + z_2^2}}$

$\boxed{A = \frac{+z_1}{z_1^2 + z_2^2}}$

$\Rightarrow \underline{z^{-1} = \left(\frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2}, \frac{-z_2}{z_1^2 + z_2^2}\right)}$

(D1) $(z \oplus u) \otimes v = (z_1 + u_1, z_2 + u_2) \otimes (v_1, v_2) = (z_1, z_2) \otimes (v_1, v_2) + (u_1, u_2) \otimes (v_1, v_2)$. ☒

Cvičení:

Ukažte, že píšeme-li $z = (z_1, z_2) = z_1 + i z_2$, potom skutečně $i^2 = (0,1) \otimes (0,1) = -1 \,(= (-1,0))$.

Dk

$(0,1) \otimes (0,1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$. ☒

Pozn.: Na množině $\mathbb{C}$ nemohu zavést uspořádání tak, aby zachovalo vlastnosti (U1)-(U3) a zachoval vlastnosti nad $\mathbb{R}$ *

Potom totiž, je-li $i > 0$ $(0,1) > (0,0)$, potom $(0,1) \otimes (0,1) = (-1,0) \not> (0,0)$, což je spor $(-1 > 0)$

$i < 0$ $(0,1) < (0,0)$, $(0,1) \otimes (0,1) > (0,0) \Rightarrow$ opět spor. (neboť $\mathbb{R}$ chceme jako podmnožinu $\mathbb{C}$).

Lze ale zavést částečné uspořádání, např.

$z > u \Leftrightarrow z_1 \geq z_2$ a $z_2 \geq z_2$ a alespoň jedna nerovnost je ostrá.

(Tady jde o uspořádání, ale je definováno jen pro některé dvojice z $\mathbb{C}$).

* správně místo: $i > 0$ pak $i^3 = -i > 0 \Rightarrow$ spor

$i < 0$ pak $0 < -i \Rightarrow 0 < -1 \Rightarrow 0 < +i$ spor!

Na $\mathbb{C}$ může definovat velikost následovně

$$\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$$
$$\varphi(z) = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

Definice 17

Zobrazení φ nazýváme velikostí komplexního čísla z a značíme $|z|_{\mathbb{C}}$ (index $\mathbb{C}$ budeme většinou vynechávat).

Tvrzení 15

a) $|(0,0)|_{\mathbb{C}} = 0$ a $|z|_{\mathbb{C}} > 0$ pro $z \neq (0,0)$

b) $|(z_1,0)|_{\mathbb{C}} = |z_1|$

c) $|z \otimes u|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{C}}\, |u|_{\mathbb{C}}$ a $\left|\frac{z}{u}\right|_{\mathbb{C}} = \frac{|z|_{\mathbb{C}}}{|u|_{\mathbb{C}}}$ (pro $|u|_{\mathbb{C}} \neq 0$)

d) $|u+z|_{\mathbb{C}} \leq |u|_{\mathbb{C}} + |z|_{\mathbb{C}}$. $\quad |u+z|^2 = |u|^2 + |z|^2 + 2(u_1 z_1 + u_2 z_2) \overset{(CSN)}{\leq} |u|^2 + |z|^2 + 2|u||z|$!

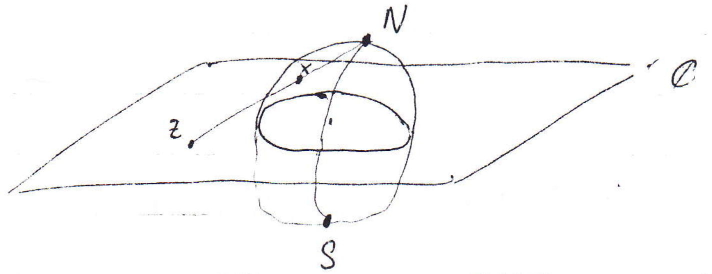
e) $\big||u|_{\mathbb{C}} - |z|_{\mathbb{C}}\big| \leq |u-z|_{\mathbb{C}}$

Dk

Domácí úkol. Připomeňme, že $\frac{z}{u} = \frac{z \otimes u^{-1}}{u \cdot u^{-1}} = \underline{\frac{z u^{-1}}{1}}$) $\boxed{\text{Může se hodit (CSN).}}$

Pozn. (stereografická projekce)

Množinu komplexních čísel můžeme ztotožnit s „jednotkovou sférou kromě severního pólu". Přesněji ∃ vzájemně jednoznačné zobrazení $\varphi: \mathbb{C} \to S \setminus \{N\}$



z: průsečík spojnice N a x s rovinou $\mathbb{C}$

Zejm.: $S \leftrightarrow (0,0)$

$\{x \in S;\ x_3 < 0\} \leftrightarrow \{z;\ |z|_{\mathbb{C}} < 1\}$

$\{x \in S;\ x_3 = 0\} \leftrightarrow \{z;\ |z|_{\mathbb{C}} = 1\}$

$\{x \in S;\ x_3 > 0,\ x_3 \neq 1\} \leftrightarrow \{z;\ |z|_{\mathbb{C}} > 1\}$.

(Vše se dá analyticky spočítat – DÚ).

1.4.6 Rozšířená reálná osa a komplexní rovina.

Okolí bodu v $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^*$ a $\mathbb{C}^*$.

Definujme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} = ([-\infty, \infty])$

Je třeba dodefinovat ~~sčítání~~ násobení a sčítání pro případ, že jeden z činitelů (sčítanců) je $\pm\infty$:

a) $x \in \mathbb{R}$: $\quad x + \{+\infty\} = \{+\infty\} \qquad x - \{+\infty\} = \{-\infty\}$

$\qquad x + \{-\infty\} = \{-\infty\} \qquad x - \{-\infty\} = \{+\infty\}$

$$\frac{x}{\{\pm\infty\}} = \frac{x}{\{\mp\infty\}} = 0$$

$x > 0$: $x \cdot \{+\infty\} = \{+\infty\}$ $\quad x \cdot \{-\infty\} = \{-\infty\}$ $\quad \frac{\{\pm\infty\}}{x} = \{\pm\infty\}$

$x < 0$: $x \cdot \{+\infty\} = \{-\infty\}$ $\quad x \cdot \{-\infty\} = \{+\infty\}$ $\quad \frac{\{\pm\infty\}}{x} = \{\mp\infty\}$

Z čeho lépe fnel uz { }.

b) $\{+\infty\} + \{+\infty\} = \{+\infty\}$ $\quad \{+\infty\} \cdot \{+\infty\} = +\infty = \{-\infty\} \cdot \{-\infty\}$

$\{-\infty\} + \{-\infty\} = \{-\infty\}$ $\quad \{+\infty\} \cdot \{-\infty\} = \{-\infty\}$

~~Kdl.~~ a ~~dd~~.

c) $\{-\infty\} < x < \{+\infty\}$ $\forall x \in R$

Nedefinují: $\{+\infty\} - \{+\infty\}$, $\{-\infty\} - \{-\infty\}$, $\frac{\{\pm\infty\}}{\{\pm\infty\}}$, $0 \cdot \{\pm\infty\}$, $\{\frac{x}{0}\}$, $x \in R^*$

Potom:

Tvrzení 15

Každá množina ($\subset R^*$) má v R^* suprem a infimum (Na základě definice suprema, kde vynulováno pořádek na kumuli shora)

~~Dk~~

Pro omezené množiny to plyne z axiomu (T1). Je-li množina neomezená shora, pak $\sup M = \{+\infty\}$ zdola inf $M = \{-\infty\}$. Konkrétně, je-li $M = \emptyset$, potom $\sup M = \{-\infty\}$ (každé číslo je horní závora) a inf $M = \{+\infty\}$

Pozn. a) Kromě případu $M = \emptyset$, je $\inf M \le \sup M$.

b) Tedy $\sup M = \{+\infty\} \Leftrightarrow \forall a \in R\ \exists x_a \in M: x_a > a$. Analogicky $\inf M = -\infty \Leftrightarrow \forall a \in R\ \exists y_a \in M: y_a < a$.

Pro množinu $\mathbb{C}$ rozšiřuji jen o "jednu nekonečno"

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} + \{\infty\}.$$

Pozn.: Bod $\{\infty\}$ je ve stereografické projekci obrazem bodu N. Potom tedy stereografická projekce je vzájemně jednoznačné příslušné zobrazení $S \to \mathbb{C}^*$ (resp. $\mathbb{C}^* \to S$).

Definuji
a) $z \in \mathbb{C}$: $z \oplus \{\infty\} = z \ominus \{\infty\} = \{\infty\}$

$\frac{z}{\{\infty\}} = (0,0)$

$z \neq (0,0)$: $z \otimes \{\infty\} = \{\infty\}$, $\frac{z}{0} = \{\infty\}$, $\frac{\{\infty\}}{0} = \{\infty\}$

~~b) $\infty + \infty = \infty$~~

Ostatní operace se nedefinují!

na R resp. $\mathbb{C}$ budu definovat ε-okolí (red. okolí) bodu jako množinu bodů z R ($\mathbb{C}$) takovou, že jejich vzdálenost od daného bodu je $< \varepsilon$ (a > 0 pro red. okolí). Tedy

Definice 14

Okolím bodu $x \in R$ ($z \in \mathbb{C}$) nazveme množinu všech bodů $y \in R$ ($w \in \mathbb{C}$) splňujících

$|x-y|_R < \varepsilon$ $\quad$ ($|z-w|_{\mathbb{C}} < \varepsilon$). Značíme $U_\varepsilon(x)$ ($U_\varepsilon(z)$).

Redukovaným okolím nazveme množinu $U_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$ ($U_\varepsilon(z) \setminus \{z\}$). Značíme $U_\varepsilon^*(x)$ ($U_\varepsilon^*(z)$). (Někdy v naší (též $P(x)$ – prstencové okolí)

Pozn.: Protože na R je definováno uspořádání, můžeme mluvit o levém a pravém okolí (redukovaném okolí)

$U_\varepsilon^+(x) = \{y \in R;\ y \in [x, x+\varepsilon[\}$, $U_\varepsilon^-(x) = \{y \in R;\ y \in]x-\varepsilon, x]\}$ (analogicky pro red. okolí).

Definice 15

Okolím (red. okolí) bodů $\pm\infty$ v $\mathbb{R}$ nazýváme množiny

$$U_K(+\infty) = (K, \infty) \cup \{+\infty\}$$
$$U_K(-\infty) = (-\infty, -K) \cup \{-\infty\}$$
$$U_K^*(+\infty) = (K, +\infty)$$
$$U_K^*(-\infty) = (-\infty, -K) \quad , \quad \varepsilon > 0.$$

Okolím (red. okolí) bodu $+\infty$ v $\mathbb{C}$ budeme nazývat vnější kruhu a bod $+\infty$ (nebo bez)

$$U_K(\infty) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| > K\} \cup \{\infty\}$$
$$U_K^*(\infty) = \{z \in \mathbb{C} ; |z| > K\}.$$

Pozn:

1.4.7 Jiné zavedení $\mathbb{R}$

Je možné vyjít od axiomatické definice $\mathbb{N}$, standardně dodefinovat $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$.

Nyní a) $\mathbb{Q}$ ztotožnit s čísly, jejichž desetinný rozvoj je konečný nebo periodický (přičemž je třeba vzít pozor, že např. $1{,}1\overline{0}$ a $1{,}0\overline{9}$ jsou stejná čísla) a říci, že iracionální čísla jsou taková, že desetinný rozvoj je nekonečný neperiodický

b) zavést $\mathbb{R}$ pomocí řezů.

Nastíníme jen velice stručně konstrukci b)

Nejprve se v $\mathbb{Q}$ zavedou uspořádání a aritmetické operace pomocí axiomů (A1)-(A5), (P1)-(P5), (D1), (U1)-(U3).

Definuji pojem řezu:

$A, A' \subset \mathbb{Q}$ se nazývá řez v $\mathbb{Q}$, jestliže platí

a) $A \neq \emptyset$, $A' \neq \emptyset$

b) každé racionální číslo patří do jedné z množin A, A'

c) $a \in A$, $a' \in A'$ $\Rightarrow$ $a < a'$.

Mohou nastat tři možnosti

1) A má největší prvek, A' nemá nejmenší (např. $A = \{x \in \mathbb{Q} ; x \leq 0\}$, $A' = \{x \in \mathbb{Q} ; x > 0\}$

2) A nemá největší prvek, A' má nejmenší (např. $A = \{x \in \mathbb{Q} ; x < 1\}$ $A' = \{x \in \mathbb{Q} ; x \geq 1\}$

3) A nemá největší prvek, A' též nemá nejmenší prvek

(např. $A = \{x \in \mathbb{Q} ; x^2 < 2\}$, $A' = \{x \in \mathbb{Q} ; x^2 > 2\}$.

V prvních dvou případech definuje řez racionální číslo $(0, 1)$, ve třetím případě pak iracionální číslo $(\sqrt{2})$.

Nyní je možné pomocí řezů a operací v $\mathbb{Q}$ rozšířit tyto na $\mathbb{R} = \{$množina všech definujících řezů$\}$.

Ukáže se, každá shora omezená množina v $\mathbb{R}$ má supremum (zdola infimum) a ukáže se, že $\mathbb{R}$ "je plně nasycen", tj. definuji-li řezy v $\mathbb{R}$, možnost 3) nenastane. Podrobněji viz např. Jarník.

1.5. Mohutnost množin, spočetné a nespočetné množiny ½ str.

Někdy je třeba porovnávat množiny podle počtu prvků. Zatímco u konečných množin je vše zřejmé, u nekonečných je situace o něco komplikovanější.

Definice 15.

Množiny A, B mají stejnou mohutnost, existuje-li prosté zobrazení A na B. (Říkáme též, že A a B jsou ekvivalentní a značíme $m(A) = m(B)$).

Definice 16

Říkáme, že mohutnost množiny A je menší než mohutnost množiny B, jestliže existuje prosté zobrazení A do B, ale neexistuje prosté zobrazení A na B. Označujeme $m(A) < m(B)$.

A priori není zřejmé, jestli můžeme libovolné dvě množiny porovnat. Je možné ukázat, že přijmeme-li axiom výběru, pak už může nastat jen tři možnosti.

$m(A) < m(B)$; $m(A) = m(B)$; $m(B) < m(A)$.

U konečných množin můžeme vždy množině přiřadit číslo – počet prvků. Pokud si připomeneme konstrukci přirozených čísel, nepřekvapí nás

Př1

Př2 → $(-1,1)$ má stejnou mohut. jako celé R a lib. dv[illegible] celým mají též stejnou mohut.

Tvrzení 16

Každá množina $A \subset N$ je buď konečná, nebo má stejnou mohutnost jako N. Tedy žádná nekonečná množina nemá menší mohutnost než N.

Příklad

1) $A = \{n \in N;\ n = k^2\}$

Potom zobrazení $\varphi: k \to k^2$ je prosté zobrazení N na A a tedy $m(A) = m(N)$

2) $A = \{n \in N:\ n$ je prvočíslo $< 100\}$.

Potom A je konečná množina

Pozn.: Množina všech prvočísel je nekonečná.

Definice 17

Množina se nazývá spočetná, má-li stejnou mohutnost jako N. (Značíme „$\aleph_0$" –).

Konečné a spočetné množiny se nazývají nejvýše spočetné! Množina, která není spočetná ani konečná se nazývá nespočetná.

Platí: Tvrzení 17

1) Spočetná množina nemůže obsahovat nespočetnou podmnožinu

2) Každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu.

3) Každá nekonečná podmnožina spočetné množiny je spočetná.

4) Sjednocení ~~ke~~ nejvýše spočetného systému ~~spoc~~ spočetných množin je spočetná množina.

Důkaz

Není těžký, ale z časových důvodů dokážeme pouze 4) pro spočetný systém.

Mějme tedy množiny $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, každá z nich spočetná. Tedy pro každé $i \in N$ $\exists$ zobrazení $\varphi_i : A_i \to N$ prosté a na. Označme tedy prvky $\{a_j^i\}_{j=1}^{\infty}$ – prvky i-té množiny a sestavme tabulku („nekonečnou matici")

$$\begin{array}{ccccc} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 & \cdots \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 & \cdots \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 & \cdots \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

Zobrazení $\Phi : N \to \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ je prosté a na. Tudíž mohutnost N a $\bigcup A_i$ jsou stejné, tudíž $\bigcup_{1}^{\infty} A_i$ je spočetná množina.

a číslujme

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= a_1^1 \\ \Phi_2 &= a_1^2 \\ \Phi_3 &= a_2^1 \\ \Phi_4 &= a_1^3 \\ \Phi_5 &= a_2^2 \\ \Phi_6 &= a_3^1 \\ \Phi_7 &= a_1^4 \\ \Phi_8 &= a_2^3 \\ \Phi_9 &= a_3^2 \\ \Phi_{10} &= a_4^1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Pozn.: Analogicky se ukáže, že $N \times N$ (resp. N^k) je spočetná množina, $k \in N$. Z toho tedy plyne, že Q^+ (je ~~...~~ podmnožina $N \times N$) a podobně Q je spočetná množina.

Tvrzení 18

Množina R je nespočetná.

Pozn.: $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ je prosté zobrazení R na $(-1,1)$!
Ne, to spíš arctg

Důkaz

Stačí ukázat, že $(0,1)$ je nespočetná množina. Využijeme toho, že každé číslo z $(0,1)$ může vyjádřit pomocí nekonečného desetinného rozvoje $0,a_1a_2a_3\ldots$ $a_i \in \{0,1,\ldots,9\}$. Aby tohle vyjádření bylo jednoznačné, vyloučíme ta čísla, která mají od jistého a_k samé 9. Nechť je $(0,1)$ spočetná množina. Pak je možné napsat do schématu.

1: $0, a_1^1 a_2^1 \dots a_n^1 \dots$

2: $0, a_1^2 a_2^2 \dots a_n^2 \dots$

3: $0, a_1^3 a_2^3 \dots a_n^3 \dots$

4: $0, a_1^4 a_2^4 \dots a_n^4 \dots$

$\vdots$

n $0, a_1^n a_2^n \dots a_n^n \dots$

Položme ~~a_k^k … jestli a~~ Jestli $a_k^k = 1$, položme $a_k = 2$

jinak $a_k = 1$

Vzniklé číslo $a = 0, a_1 a_2 \dots a_k \dots$

se tedy liší alespoň jedno číslo od všech výše vypsaných čísel a leží v $(0,1)$, protože tedy $\mathbb{R}$ je nespočetná množina.

Tedy iracionální čísla jsou nespočetná

~~Definice~~ Pozn.: Mohutnost $\mathbb{R}$ se značí mohutnost kontinua a značí se $2^{\aleph_0}$. Platí že mohutnost (všech podmnožin $\mathbb{N}$) je rovna mohutnosti $\mathbb{R}$ *

Je otevřený problém, zda může existovat nespočetná množina o mohutnosti menší než je $2^{\aleph_0}$ (tzv. hypotéza kontinua).

Ukazuje se, že situace je dosti komplikovaná (a to hodnotu sám Cantor věřil, že bude otázka vyřešena během 15 dní, je otevřená i dnes po více než 125 letech). Navíc platí, že jestli axiomatická teorie množin bezesporná, zůstane bezesporná i po přidání hypotézy kontinua či po přidání její negace. Přidáme-li k tělu axiomatické teorie množin ~~axiom~~ axiom výběru, situace zůstane stejná. Tedy pomocí axiomatické teorie množin nelze hypotézu kontinua ani dokázat ani vyvrátit a to ani když přidáme axiom výběru.

* pozn pro mne: pozor, konečné podmnožiny $\mathbb{N}$ je spočetně, $2^{\aleph_0}$ značí až i ty nekonečné