Vypočítejte následující příklady, všechny kroky zdůvodněte.

1. příklad (6 body) Spočtěte první a druhý Gateauxův diferenciál funkcionálu:

$$\Phi[y] = \int_0^1 \left(2y^2y' - \exp\left(x(y')^2\right)\right) \mathrm{d}x.$$

2. příklad (6 bodů) Nalezněte všechny extremály funkcionálu Φ s vazební podmínkou g

$$\Phi[y] = \int_0^1 ((y')^2 + 4y)\,\mathrm{d}x, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2, \quad g[y] := \int_0^1 (y')^2\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

3. příklad (7 bodů) Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou kovergenci posloupnosti funkcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ na $\mathbb{R}$ pro

$$f_n(x) = \frac{e^{nx} - 1}{e^{nx} + 1}.$$

4. příklad (6 bodů) Určete, zda řada konverguje stejnoměrně na $[0, 1]$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(nx^2)}{n + x^2}.$$

(1) Spočtěte 1. a 2. Gateâux diferenciál $\Phi[y] = \int_0^1 (2y^2y' - \exp(xy'^2))\,dx$

$$\delta\Phi[y](h) = \frac{d}{dt}\int_0^1 \left(2(y+th)^2(y'+th') - \exp(x(y'+th')^2)\right)dx\Big|_{t=0}$$

$$= \int_0^1 \left(4(y+th)h(y'+th') + 2(y+th)^2h' - \exp(x(y'+th')^2)\,2(y'+th')h'\right)dx\Big|_{t=0}$$

$$= \int_0^1 \left(4yy'h + 2y^2h' - 2\exp(xy'^2)xy'h'\right)dx.$$

3b

$$\delta^2\Phi[y](h,k) = \frac{d}{dt}\int_0^1 \left(4(y+tk)(y'+tk')h + 2(y+tk)^2h' - 2\exp(x(y'+tk')^2)x(y'+tk')h'\right)dx\Big|_{t=0}$$

$$= \int_0^1 \left(4ky'h + 4yk'h + 4ykh' - 4x^2y'^2\exp(xy'^2)k'h' - 2x\exp(xy'^2)k'h'\right)dx.$$

3b

2.) Najděte vázaný extrémály funkcionálu Φ s vazbovou podmínkou G.

(6B)

$$\Phi\{y\} = \int_0^1 (y')^2 + 4y \, dx \quad , \text{ O.P.: } \quad y(0) = 1 \; , \; y(1) = 2$$

$$G\{y\} = \int_0^1 (y')^2 \, dx = \frac{4}{3}$$

- $\delta G\{y\}(h) = \int_0^1 2y'h' \neq 0$
- $f(x,y,z) = z^2 + 4y \in C^2(\langle 0,1\rangle \times \mathbb{R}^2)$ $\quad$ (pro $\Phi\{y\} = \int_0^1 f(x,y,y')\,dx$)
- $g(x,y,z) = z^2 \quad \in C^2(\langle 0,1\rangle \times \mathbb{R}^2)$ $\quad$ (pro $G\{y\} = \int_0^1 g(x,y,y')\,dx$)

$\Rightarrow$ věta o L. multiplikátorech ✓

def. $F = \Phi - \lambda G = \int_0^1 \overbrace{(y')^2(1-\lambda) + 4y}^{\tilde{F}} \, dx$ $\quad$ (1b)

Euler-Lagr. rce pro F: $\quad -\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y'}\right) + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = 0$

$$-\frac{d}{dx}\left(2y'(1-\lambda)\right) + 4 = 0 \Rightarrow \underline{(1-\lambda)y'' = 2} \; *$$

$\to \lambda = 1 \to 0 = 2$ ↯

$\to \lambda \neq 1$: $y'' = \frac{2}{1-\lambda}$ (1b) $\Rightarrow$ $\underline{y = \frac{x^2}{1-\lambda} + c_1 x + c_2}$

O.P.: $y(0) = 1$, $y(1) = 2$: $\quad 1 = c_2$, $\quad 2 = \frac{1}{1-\lambda} + c_1 + c_2$ $\Rightarrow$ $c_2 = 1$, $\frac{1}{1-\lambda} = 1 - c_1$

$\Rightarrow$ $\underline{y = (1-c_1)x^2 + c_1 x + 1}$ (2b) $\quad$ (nebo $c_1 = 1 - \frac{1}{1-\lambda} = \frac{-\lambda}{1-\lambda}$ $\Rightarrow$ $\underline{y = \frac{x^2}{1-\lambda} - \frac{\lambda x}{1-\lambda} + 1}$)

vazba: $\frac{4}{3} = \int_0^1 (y')^2 \, dx = \int_0^1 (2x(1-c_1) + c_1)^2 \, dx = \int_0^1 4x^2(1-c_1)^2 + 4xc_1(1-c_1) + c_1^2 \, dx$ $\quad$ (1b)

$$= \frac{4}{3}(1-c_1)^2 + 2c_1(1-c_1) + c_1^2 \quad / \cdot 3$$

$\Rightarrow 4 = 4(1 - 2c_1 + c_1^2) + 6c_1 - 6c_1^2 + 3c_1^2 \Rightarrow 0 = c_1^2 - 2c_1 = c_1(c_1 - 2)$ $\to$ $\underline{c_1 = 0}$, $\underline{c_1 = 2}$

$\Rightarrow$ $\underline{y_0^{(1)} = x^2 + 1}$, $\underline{y_0^{(2)} = -x^2 + 2x + 1}$ $\quad$ (1b)

3) Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci posloupnosti fcí $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ na $\mathbb{R}$ pro (70)

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}$$

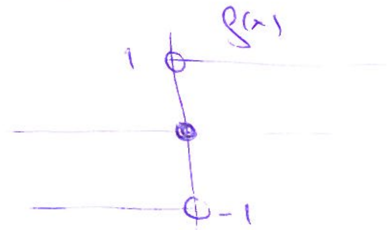
1.) Bodová k:

• $x=0$: $f_n(x)=0 \ \forall n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$

• $x>0$: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{e^{nx}}(1-e^{-nx})}{\cancel{e^{nx}}(1+e^{-nx})} = 1$

• $x<0$: $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1} = -1$

$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ (2b)



2.) stejnoměrná k. + (lokálně s.k.)

$f(x)$ nespojitá v okolí 0, tedy nemůže být stejnoměrnou na intervalech obsahujících 0 limitou $f_n(x)$ (spojité $\forall n\in\mathbb{N}$) (1)

$\Rightarrow$ určitě $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ na všech $I: 0\in I$

• Zkoumejme tedy $\underbrace{(-\infty,0)}_{=I_1}$ a $\underbrace{(0,\infty)}_{=I_2}$

• $\boxed{I_1}$: $\sigma_n = \sup_{(-\infty,0)} |f_n(x)-f(x)| = \sup_{(-\infty,0)} \left|\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}+1\right| = \sup_{(-\infty,0)} \left|\underbrace{\frac{2e^{nx}}{e^{nx}+1}}_{g_n(x)}\right|$

$$(g_n(x))' = 2\frac{ne^{nx}(e^{nx}+1)-e^{nx}ne^{nx}}{(e^{nx}+1)^2} = 2\frac{ne^{nx}}{(e^{nx}+1)^2} \geq 0 \quad \text{a } g_n\geq 0$$

$$\Rightarrow \sup_{(-\infty,0)} |g_n(x)| = \lim_{x\to 0-} g_n(x) = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0$$

a hned vidíme, že na $I_1^{\varepsilon} := (-\infty,-\varepsilon\rangle$ $(\varepsilon>0)$: $\sigma_n = \sup_{(-\infty,-\varepsilon\rangle} |g_n(x)| = \frac{2e^{-n\varepsilon}}{1+e^{-n\varepsilon}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

tedy: $f_n(x) \not\rightrightarrows f$ na $(-\infty,0)$ ale (1a)

$f_n(x) \rightrightarrows f$ na $(-\infty,-\varepsilon\rangle$ pro $\forall \varepsilon>0$, tedy (1b)

$f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $(-\infty,0)$

∘ $\boxed{I_2}$: (* pozn.)

$$\sigma_n = \sup_{(0,\infty)} \left|f_n(x)-f(x)\right| = \sup_{(0,\infty)} \left|\frac{e^{nx}-1}{e^{nx}+1}-1\right| = \sup_{(0,\infty)} \left|\frac{-2}{e^{nx}+1}\right|$$

$$= \sup_{(0,\infty)} \underbrace{\frac{2}{e^{nx}+1}}_{h_n} = \lim_{x\to 0+} \frac{2}{e^{nx}+1} = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 \neq 0$$

$$h_n'(x) = 2\frac{-ne^{nx}}{(e^{nx}+1)^2} \le 0$$

a zároveň vidíme: na $I_2^{\varepsilon} := \langle \varepsilon,\infty)$ $(\varepsilon>0)$

$$\sigma_n = \sup_{\langle\varepsilon,\infty)} \left(\frac{2}{e^{nx}+1}\right) = \lim_{x\to\varepsilon+} \frac{2}{e^{nx}+1} = \frac{2}{e^{n\varepsilon}+1} \xrightarrow{n\to\infty} \underline{0}$$

tedy: $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ na $(0,\infty)$, ale (1a)

$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na $\langle\varepsilon,\infty)$ pro $\forall\varepsilon>0$, tedy (1b)

$f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ na $(0,\infty)$

$\Rightarrow f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ na $(-\infty,-\varepsilon_1\rangle \cup \langle\varepsilon_2,\infty)$ pro $\forall \varepsilon_1,\varepsilon_2>0$

$\Rightarrow f_n(x) \overset{loc}{\rightrightarrows} f(x)$ na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ~~(1b)~~

(* pozn.: nebo si všimneme, že

$$f_n(-x) = \frac{e^{-nx}-1}{e^{-nx}+1} = \frac{\cancel{e^{-nx}}(1-e^{nx})}{\cancel{e^{-nx}}(1+e^{nx})} = -f_n(x)$$

$f_n(x)$ je lichá $(\forall n)$ a tedy stačí vyšetřovat pouze I_1 nebo I_2

④ Stejnoměrná konvergence?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(nx^2)}{n+x^2} \quad \text{na} \quad x \in [0,1]$$

Ⓐ $\boxed{0 \le x \le \frac{1}{2}}$ Weierstrass: $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n \cos nx^2}{n+x^2} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2)^n} = 1$

2b

konverguje, geometrická řada

$\Rightarrow$ konverguje stejnoměrně na $[0,\frac{1}{2}]$

Ⓑ Použijeme Dirichletovo kritérium stejnoměrné konvergence pro $\boxed{\frac{1}{2} \le x \le 1}$

a) $\cos(nx^2)$ má stejně omezené částečné součty na $[\delta, \sqrt{2\pi} - \delta]$, $\delta > 0$ (víme z přednášky /cvičení) 1b

b) $\frac{x^n}{n+x^2} \rightrightarrows 0$ na $[\frac{1}{2}, 1]$: skutečně, neboť

2 body byly ekvivalentně za ověření nutné podmínky

$0 \le \left| \frac{x^n \cos(nx^2)}{n+x^2} \right| \le \left| \frac{x^n}{n+x^2} \right| \le \dots$

2b

$$0 \le \left| \frac{x^n}{n+x^2} \right| \le \frac{1}{n} \quad \text{(nezávisle na } x\text{, tedy stejnoměrně)}$$

$\downarrow n \to \infty$

0

c) $\frac{x^n}{n+x^2}$ je stejně klesající fce:

1b

$$\frac{x^{n+1}}{n+1+x^2} \overset{?}{<} \frac{x^n}{n+x^2} \quad / \cdot \underbrace{\frac{(n+x^2)(n+1+x^2)}{x^n}}_{>0} \qquad \forall n, \forall x \in [\tfrac{1}{2}, 1]$$

$$x(n+x^2) < n+1+x^2$$

platí pro $\frac{1}{2} \le x \le 1$ ✓ $\forall n$ $\Rightarrow$ konverguje stejnoměrně na $[\frac{1}{2}, 1]$

Celkem tedy máme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(nx^2)}{n+x^2} \rightrightarrows$ na $[0,1]$.