$\boxed{\text{II.1}}$ LEBESGUEOVY PROSTORY L^p

L^p prostory představují významný matematický prostředek (nástroj) spojující teorii míry a funkcionální analýzu. L^p prostory jsou významné v teorii diferenciálních rovnic, pravděpodobnosti, moderní analýze.

Buď $\boxed{p \in \langle 1, +\infty \rangle} := \{ x \in \mathbb{R}^*;\ 1 \le x \le +\infty \}$ pevný parametr.

Buď $\boxed{(X, \mathcal{S}, \mu) \text{ prostor s mírou}}$ tzn.

- X je množina objektů
- $\mathcal{S}$ je σ-algebra na X ($\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ taková, že (i) $X \in \mathcal{S}$; (ii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{S}$; (iii) $A_n \in \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}$)
- $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ je míra (i) $\mu(\emptyset) = 0$ (ii) $\mu(\bigcup A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu A_n$ pro A_n navzájem disjunktní.

Lze pro jednoduchost uvažovat situaci: $X = \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 1, 2, 3, 4, \dots$

$\mathcal{S}$ – systém Lebesgueovsky měř. množin

$\mu = \lambda^d$ (d-rozměrná Lebesgueova míra)

$\boxed{\text{Množina } \mathcal{L}^p}$

(a) $1 \le p < +\infty \Rightarrow \mathcal{L}^p(X) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{S}, \mu) := \{ f;\ f \text{ je funkce definovaná na } X;\ f \text{ měřitelná},\ (\mathcal{L})\int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \}$

$$\Downarrow$$

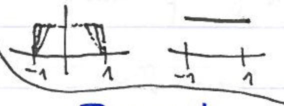
$$f \longmapsto \|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

(b) $p = +\infty \Rightarrow \mathcal{L}^\infty(X) = \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{S}, \mu) := \{ f;\ f \text{ měřitelná na } X \text{ taková, že } \exists M\ |f(x)| < M\ \mu \text{ skoro všude} \}$

$$\Downarrow$$

$$f \longmapsto \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| := \inf_{\substack{N \\ \lambda^d(N) = 0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)|$$

$K = \langle -2, 2 \rangle$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{mimo } \langle -1, 1 \rangle \\ 1 & \text{na } \langle -1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \rangle \\ \text{lineární} & \text{jinak} \end{cases}$



Připomeň

- $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, kde $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$, je
  - lineární (vektorový) prostor
  - normovaný
  - úplný

  } BANACHŮV PROSTOR

  $C(\Omega)$ → prostor spoj. funkcí na Ω

- $(C(\Omega), \|\cdot\|_1)$, kde $\|f\|_1 = \int_\Omega |f(x)| \, dx$ je
  - lineární
  - normovaný
  - ALE NENÍ úplný.

Integrály a integrální "normy" a tedy funkce s těmito normami jsou důležité objekty (z fyzikálního i mat. pohledu). Bylo by tedy vhodné mít prostory, které budou úplné. Jejich zavedení (a studium vlastností) bude předmětem dalšího pojednání.

Def. • X vektorový (lineární) prostor nad $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) $\equiv$ • $f,g \in X \Rightarrow f+g \in X$

• $\alpha \in \mathbb{R},\ f \in X \Rightarrow (\alpha f) \in X$

• X je metrický $\equiv \exists\ d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ tak, že

- $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \ \wedge\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

$d(x,y) = \|x-y\|_X$

$\Uparrow$

• X je normovaný $\equiv \exists\ \|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}_0^+$ tak, že

- $\|x\|_X \geq 0 \quad \forall x \ \&\ \|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\|\lambda x\|_X = |\lambda|_{\mathbb{R}} \|x\|_X \quad \forall x$
- $\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$

$\|\cdot\|_X = (\cdot,\cdot)_X^{1/2}$

$\Uparrow$

• X je prostor se skal. součinem (tzv. pre-Hilbertův) $\equiv \exists\ (\cdot,\cdot)_X : X \times X \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ tak, že

- $(x,x) \geq 0 \ \&\ (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $(x,y) = \overline{(y,x)}$
- $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$.

Def. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ je cauchyovská $\equiv (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n,m \geq n_0)$ $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$

Def. Buď $(X, \|\cdot\|_X)$ normovaný lin. Řekneme, že X je úplný pokud každá cauchyovská posloupnost má v X limitu. ($\forall$ cauchy. je konvergentní)

$\boxed{\begin{array}{l} X \text{ BANACHŮV – úplný normovaný lin.} \\ X \text{ HILBERTŮV – úplný prostor se skal. součinem} \end{array}}$

Řekneme, že $Y \subset X$ je hustá v X $\equiv \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in X$ existuje $y \in Y$ $\|x-y\|_X < \varepsilon$

(X,ρ) je separabilní $\equiv \exists$ spoč. hustá podmnožina v X

Budeme řešit, zda spojité nebo dokonce C^{∞}-funkce (či $\mathcal{D}(\Omega)$-funkce) budou husté v zavedených prostorech.

$\boxed{\text{Tvrzení 1}}$ Youngova nerovnost. Buď $p, q \in (1, +\infty)$ tzv. duální exponenty $\boxed{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1}$
(Lemma) $\left(q = \frac{p}{p-1} =: p' \right)$

Pak $\forall\, a, b \geq 0$ platí: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$

(Dk) Pro $a=0$ resp. $b=0$ není co dokazovat.

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b = \underset{\overset{\shortparallel}{\lambda}}{\frac{1}{p}} \ln \underset{\overset{\shortparallel}{x}}{a^{p}} + \frac{1}{q} \ln \underset{\overset{\shortparallel}{y}}{b^{q}} =: \lambda \ln x + (1-\lambda) \ln y \qquad \lambda \in (0,1)$$

$$\underset{\ln}{\overset{\text{konkávita}}{\leq}} \ln(\lambda x + (1-\lambda) y) = \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right)$$

Podtržené implikuje tvrzení ■

Cvičení $AB = (p\varepsilon)^{1/p} A \frac{B}{(p\varepsilon)^{1/p}} = ab \leq \frac{p\varepsilon A^p}{p} + \frac{B^q}{\frac{p}{p-1}(p\varepsilon)^{\frac{1}{p-1}}} = \varepsilon A^p + C(\varepsilon) B^q$ kde $C(\varepsilon) = \frac{p-1}{(p)^{\frac{p}{p-1}}} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}}$

Ukažte, že pro $(\forall \varepsilon > 0)$ $(\forall A, B \geq 0)$
$AB \leq \varepsilon A^p + C(\varepsilon) B^q$ kde $C(\varepsilon) = \frac{p-1}{p^{\frac{p}{p-1}}} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p-1}}$

(V1.) (Hölderova nerovnost) Buď $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p, q \in (1, +\infty)$

Pak
- $fg \in \mathcal{L}^1$
- $\left| \int_X fg \, d\mu \right| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q dx\right)^{1/q}$

Pozorování: $p=1$ či $p=+\infty$ lze triviálně zahrnout.

(Dk)
Je-li $\|f\|_p = 0$ či $\|g\|_q = 0$ (či $p=1$ či $p=+\infty$), pak triviální.
Je-li tedy $\|f\|_p > 0$ a $\|g\|_q > 0$ tak

$$\frac{f(x)\, g(x)}{\|f\|_p \|g\|_q} \leq \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \overset{\text{Young}}{\leq} \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$

Integrováním přes X

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_X f(x)\, g(x) \, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

a tvrzení plyne. ■

Věta 1.2 (Minkowského nerovnost) Buď $p \in \langle 1, +\infty \rangle$. Pak pro $\forall f, g \in \mathcal{L}^p$ platí
$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

Dk $\boxed{p=+\infty}$ $F = \|f\|_\infty$ tzn. nejmenší číslo takové, že $|f(x)| \leq F$ pro s.v. x

$G = \|g\|_\infty$

Pak platí $|f(x)+g(x)| \leq F + G$ pro s.v. x a odtud tvrzení.

$\boxed{p=1}$ Snadné, rozmyslete sami.

$\boxed{p \in (1,+\infty)}$

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f(x)+g(x)|^p \, d\mu = \int_X |f(x)+g(x)| \, |f(x)+g(x)|^{p-1} \, d\mu$$

vlastnosti Lebesgueova integrálu
$$\leq \int_X \big(|f(x)| + |g(x)|\big) |f(x)+g(x)|^{p-1} \, d\mu$$
$$\leq \int_X |f(x)| \, |f(x)+g(x)|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g(x)| \, |f(x)+g(x)|^{p-1} \, d\mu$$
$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$$
$$= \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big) \|f+g\|_p^{p-1}$$
a tvrzení snadno plyne ■

$(\mathcal{L}^p, \|f\|_p)$ splňuje vlastnosti $(1)_1$, (2), (3) normy, nesplňuje však $(1)_2$

DEFINICE Buď $f \in \mathcal{L}^p$. Označme
$$[f] = \{ g \in \mathcal{L}^p ; \ g = f \ \mu\text{-skoro všude} \}$$
zavádíme třídu ekvivalence a rozdělíme funkce z $\mathcal{L}^p$ do těchto tříd

$$L^p(X) = \mathcal{L}^p(X) / \sim$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ přičemž $\|[f]\|_p = \|f\|_p$ nezávisí na volbě reprezentanta

Z věty 1.2, definice $\|\cdot\|_p$ a výše uvedeného plyne, že $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ je <u>normovaný vektorový prostor</u>

<u>Cvičení</u> (na Hölderovu nerovnost)

1) Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená, pak $\|f\|_r \leq \left(\lambda^d(\Omega)\right)^{\frac{s-r}{sr}} \|f\|_s \quad \forall\, 1 \leq r \leq s \leq +\infty$,

neboli $L^s(\Omega) \subset L^r(\Omega)$

Dk $s=+\infty$ $\quad \|f\|_r^r = \int |f(x)|^r \leq \|f\|_\infty \left(\lambda^d(\Omega)\right) \implies \|f\|_r \leq \left(\lambda^d(\Omega)\right)^{1/r} \|f\|_\infty$

$q = \frac{s}{s-r}$

$$\|f\|_r^r = \int |f(x)|^r \leq \int |f(x)|^{r \cdot \frac{s}{r}} 1 \, d\mu \leq \|f\|_s^r \left(\lambda^d(\Omega)\right)^{\frac{s-r}{s}}$$
■

2) Buď $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq +\infty$. Pak $\forall f \in L^{p_1}(\Omega) \cap L^{p_2}(\Omega)$: $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_1}^{\alpha} \|f\|_{p_2}^{1-\alpha}$ kde α: $\frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2} = \frac{1}{p}$.

INTERPOLAČNÍ NEROVNOST

Věta Riesz-Fischerova ukazuje, že $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ jsou prostory úplné, tedy <u>BANACHOVY</u>

Věta 1.3 Riesz-Fischerova

Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v $L^p(X)$, pak ex. $f \in L^p(X)$ tak, že $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{(n\to+\infty)} 0$.

Dk (a) $\boxed{p=+\infty}$ $\exists N \subset X : \mu(N)=0$ a $\{f_n(x)\}$ je cauchyovská v $\mathbb{R}$ $\forall x \in X - N$.

Ozn. $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X \setminus N$.

Je snadné ukázat, že $f \in L^\infty(X)$ a $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ (PROVEĎTE SAMI)

(b) $\boxed{p \in \langle 1, +\infty)}$

z $\{f_n\}$ vybereme $\{g_j\} := \{f_{n_j}\} \subset \{f_n\}$ tak, že

$$S := \sum_{j=1}^{\infty} \|g_{j+1} - g_j\|_p < +\infty$$

Označme $h(x) := \sum_{j=1}^{\infty} |g_{j+1}(x) - g_j(x)| \geq 0$

Pak

$$0 \leq \int_X |h(x)|^p dx = \int_X \Big(\lim_{k\to+\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{k} |g_{j+1}(x) - g_j(x)|}_{G_k \geq 0 \nearrow}\Big)^p = \int_X \Big(\lim_{k\to\infty} G_k\Big)^p dx$$

$$= \int_X \lim (G_k)^p dx \underset{\text{Levi}}{\overset{?}{=}} \lim_{k\to\infty} \int_X G_k^p \underset{\substack{\text{Minkowského}\\\text{nerovnost}}}{\leq} \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \|g_{j+1} - g_j\|_p^p < S^p$$

Odtud plyne pro s.v. $x \in X$ $|h(x)| < +\infty$. Také pro s.v. $x \in X$ $|g_1(x)| < +\infty$.

Buď $X_0 = \{x \in X ; |h(x)| < \infty \ \& \ |g_1(x)| < +\infty\}$. Zřejmě $\mu(X \setminus X_0) = 0$.

Z definice $h(x)$ plyne, že

$\forall x \in X_0$ $\{g_j(x)\}$ je cauchyovská. Označme $\boxed{f(x) := \lim_{j\to+\infty} g_j(x).}$

Zbývá ukázat, že $f \in \mathcal{L}^p$ a $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Pozorujme: • $|g_j|^p \to |f|^p$ s.v. v X $(\forall x \in X_0)$

$\forall j \in \mathbb{N}$ • $|g_j|^p = |g_j - g_1 + g_1|^p \leq (|\underset{\mp g_{j-1} \pm \dots}{g_j - g_1}| + |g_1|)^p \leq (|h| + |g_1|)^p$

Dle Lebesgue věty: $\int_X |f|^p d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X |g_j|^p d\mu \leq \int_X (|h| + |g_1|)^p < +\infty$

$\Rightarrow f \in \mathcal{L}^p$.

Také z Lebesgueovy věty: $\|f - g_j\|_p^p = \int_X |f - g_j|^p d\mu \to 0$ $(j \to +\infty)$

Konečně: $\|f - f_j\|_p = \|f - g_j\|_p + \|g_j - f_j\|_p \to 0$. Důkaz je hotov ▨

podmínka $\uparrow$ z cauchyovské

DŮLEŽITÁ POZOROVÁNÍ

① Z důkazu věty 1.3 plyne:

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ cauchyovská v L^p $\Rightarrow$ · $\exists \{f_{n_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{f_n\}$ $f_{n_j} \to f$ s.v. v Ω

· $\exists f \in L^p$

$f_n \to f$ v L^p $\Rightarrow$ —||—

[Ze silné konvergence v normě L^p plyne konvergence s.v. vybrané podposloupnosti

$\boxed{\text{Otázka!}}$ Neplatí dokonce, že $f_n \to f$ skoro všude

Příklad, který ukazuje že nikoliv.

$\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \langle 0,1 \rangle$ $I_0 = \langle 0,1\rangle$, $I_1 = \langle 0, 1/2\rangle$, $I_2 = \langle 1/2, 1\rangle$

$I_3 = \langle 0, 1/4\rangle$, $I_4 = \langle 1/4, 2/4\rangle$, $I_5 = \langle 2/4, 3/4\rangle$, $I_6 = \langle 3/4, 1\rangle$

$I_7 = \langle 0, 1/8\rangle$, ...

$f_n = \chi_{I_n} \Rightarrow \|f_n\|_2^2 = \int_0^1 |\chi_{I_n}|^2 = |I_n| \to 0$

$\|f_n - 0\|_2 \to 0$ f_n je tedy cauchyovská, neboť konverg.

Ale: $\forall x \in \langle 0,1\rangle$ $\left.\begin{array}{l}\limsup f_n(x) = 1 \\ \liminf f_n(x) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim f(x)$ neexistuje $\forall x \in \langle 0,1 \rangle$.

$\boxed{\text{KONEC PŘ 1}}$

② $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f, f_n : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ 4 typy konvergence

- $f_n \to f$ bodově $\equiv$ $\forall x \in \Omega$ $f_n(x) \to f(x)$
- $f_n \to f$ s.v. v Ω $\equiv$ $\exists \Omega_0 \subset \Omega$ tak, že $|\Omega \setminus \Omega_0| = 0$
- $f_n \rightrightarrows f$ stejn. v Ω $\equiv$ $\sup_{x\in\Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0$
- $f_n \to f$ v L^p $\equiv$ $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ konvergence v průměru

$\boxed{\text{CVIČENÍ}}$

1) modifikujte důkaz V1.3 a ukažte, že $f_n \to f$ v $L^p(\Omega)$ $\Rightarrow$ $\exists \{f_{n_k}\} \subset \{f_n\} : f_{n_k} \to f$ s.v.
2) Ukažte, že: $\lambda^d(\Omega) < +\infty \wedge f_n \rightrightarrows f$ v Ω $\Rightarrow$ $f_n \to f$ v $L^p(\Omega)$. $\forall p \in \langle 1, +\infty)$
3) $\|f\|_p \le \|f\|_{p_1}^{\alpha} \|f\|_{p_2}^{1-\alpha}$ $\left(\frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2} = 1\right)$ $\|f\|_p \le \|f\|_1^{\alpha} \|f\|_{\infty}^{1-\alpha}$

$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \text{ v } L^1 \\ f_n \text{ omezená} \end{array}\right\} \Rightarrow f_n \to f$ v L^p $\forall p \in \langle 1, \infty)$

③ $(\mathcal{L}^p(\Omega), \|\cdot\|_p)$ $p \in (0,1)$

Ukažte, že · $L^p(\Omega)$ je lineární

· $\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$ NEPLATÍ $\Omega = (0,2)$, $f = \chi_{[0,1]}$, $g = \chi_{[1,2]}$, $p = 1/2$

$(\|f+g\|_{1/2} = 4$ $\|f\|_{1/2} = 1$, $\|g\|_{1/2} = 1)$ plyne z $(1+px) \ge (1+x)^p$

Avšak $\rho_p(f,g) = \int_{\Omega} |f(x) - g(x)|^p dx$ je metrika (Užij: $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $|x+y|^p \le |x|^p + |y|^p$)

a $(\mathcal{L}^p, \rho_p(f,g))$ je úplný metrický prostor i pro $p \in (0,1)$

HUSTÉ PODMNOŽINY V L^p

Prostor $L^\infty(\Omega)$ není separabilní:
- $\Omega = \langle -1,1 \rangle$, I lib. interval
- I_1, I_j $\|\chi_{I_1} - \chi_{I_j}\|_\infty = 1$ pokud $|I_1 - I_j| + |I_j - I_1| > 0$

Uvaž $1 \le p < +\infty$.

Tvrz 2 Buď M husté v X a $M \subset M^* \subset X$. Pak M^* husté v X.
- Je-li M husté v M^* a M^* husté v X. Pak M husté v X.

Dk $\forall \varepsilon > 0$ $\forall f \in X$ $\exists f^* \in M^*$ $d(f, f^*) < \frac{\varepsilon}{2}$
K $f^* \in M^*$ $\exists \tilde{f} \in M$ $d(\tilde{f}, f^*) < \frac{\varepsilon}{2}$
Pak dle $d(\tilde{f}, f) < \varepsilon$ Q.E.D.

Věta 1.4 Buď $p \in \langle 1, +\infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.
Následující množ. jsou husté v $L^p(\Omega)$:

a) $\mho$ = {množ. všech omezených fcí z $L^p(\Omega)$}

$$f \mapsto T_K(f) = \begin{cases} f(x) & |f(x)| \le K \\ -K & f(x) < -K \\ K & f(x) > K \end{cases}$$

b) F = {množ. všech fcí rovných nule vně podmnožiny Ω}

$f \mapsto f \chi_{\Omega^*}$ $\Omega^* \subset \Omega$.

c) $\mho \cap F$

d) S = {množ. všech jedn. fcí z $\mho \cap F$}

e) S_{rac} = {množ. všech fcí z S nabývajících rac. hodnot.}

f) I_{rac} = množ. všech lin. kom. s rac koef. charakt. fcí intervalů s racionálními body (restringované na Ω) $\Rightarrow$ $L^p(\Omega)$ je separabilní

g) $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ v $\mathbb{R}^d$ množ. spoj. fcí s kom. nosičem (restring. na Ω)

h) Je-li Ω omez., pak $\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega);\ \operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}} \subset \text{kpt}\ \text{v}\ \Omega\}$

Dk

Ad a) Zřejmě $|T_k(f)|^p \le |f|^p$ $\forall k \in \mathbb{N}$ a $|f - T_k(f)|^p \le 2|f|^p$ a $T_k(f) \to f$ s.v. v Ω
Dle Lebesg. věty $\|T_k(f) - f\|_p^p = \int_\Omega |T_k(f) - f|^p dx \to 0$ pro $k \to \infty$.

Ad b) Uvaž B_n koule o středu v poč. a poloměru n.
Def. $f_n = f \chi_{B_n \cap \Omega}$. Pak $f_n \to f$ s.v. v Ω
$|f_n|^p \le |f|^p$ a $|f(x) - f_n(x)|^p \le 2^p |f|^p$
$\lambda^d(\Omega \cap B_n) < +\infty$ a $\|f - f_n\|_p^p \to 0$ opět díky Lebesg. větě.

Ad c) Uvaž $f_n = T_n(f) \chi_{B_n \cap \Omega}$

Ad d) Dle Tvrz 2 stačí uvaž. f omez. s omezeným nosičem.
Z konstrukce Lebesg. integrálu plyne $\exists s_n$ jednoduchých, $s_n = 0$ vně Ω,
$|s_n(x)| \le |f(x)| \le K < +\infty$. a $s_n \to f$ s.v. v Ω. Díky Lebesg. $s_n \to f$ v L^p.

Ad e) aproximuji prvek z S pomocí charakteristických fcí s rac. koef

Ad f) aprox. Ω pomocí intervalů s rac. koef.

Připomenutí Lebesgueova integrálu (zavedení a vlastnosti)

λ^d ... d-rozměrná Lebesgueova míra (tj. $\lambda^d(A) \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{M}_d^*$

$\lambda^d\left(\bigcup A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^d(A_n)$ $\longleftrightarrow$ λ^d je σ-aditivní

A_n navzájem disjunktní. $\quad \lambda^d(I) = |I|_d = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i)$)

- $s: \overset{\Omega}{\mathbb{R}^d} \to \mathbb{R}$ jednoduchá $\equiv$ $s(\Omega)$ je konečná, tzn. $s(x) = \sum_{i=1}^{m} s_i \chi_{M_i}$

$$\int_\Omega s(x)\, d\lambda^d(x) \overset{df}{=} \sum_{i=1}^{m} s_i \lambda^d(M_i)$$

- $f \geq 0$ měřitelná $\Rightarrow$

$$\int_\Omega f \, d\lambda^d \overset{def}{=} \sup_{\substack{s(x) \leq f(x) \\ \text{s.v. v } \Omega, \\ \text{jednoduchá}}} \int_\Omega s \, d\lambda^d$$

- f měřitelná $\Rightarrow$ $\int_\Omega f(x)\, d\lambda^d = \int_\Omega f^+ \, d\lambda^d - \int_\Omega f^- \, d\lambda^d$

- Linearita $\quad \alpha, \int_\Omega (\alpha f + \beta g)\, d\lambda^d = \alpha \int_\Omega f \, d\lambda^d + \beta \int_\Omega g \, d\lambda^d$

- Lebesgueova věta $\left\| \begin{array}{l} f_n \to f \ \text{ s.v. v } \Omega \\ \exists g \in \mathcal{L}^1 \text{ tž } |f_n| \leq g \ \text{ s.v. v } \Omega \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\lambda^d = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n$

- Leviho věta $\left\| \begin{array}{l} f_n \nearrow f \ , \text{měřitelné} \\ f_n \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$ — " —

VĚTY O INTEGRÁLECH ZÁVISLÝCH NA PARAMETRU

Věta o záměně $\int$ a lim Buď $\alpha_0 \in P \subset \mathbb{R}^p$ (množ. par.), $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ měř.

Buď $F: P \times \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že

(1) $\forall \alpha \in P \quad F(\alpha, \cdot) \in M(\Omega)$

(2) Pro s.v. $x \in \Omega \quad \exists \lim_{\alpha \to \alpha_0} F(\alpha, x) =: F(x)$

(3) $\exists g \in L(\Omega): \ |F(\alpha, \cdot)| \leq g$ s.v. v Ω a $\forall \alpha \in P$

Pak $\bullet$ $F \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ a $\bullet$ $\lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_\Omega F(\alpha, x)\, dx = \int_\Omega \lim_{\alpha \to \alpha_0} F(\alpha, x)\, dx \left(= \int F(x)\, dx \right)$

Věta o derivování $\int$ dle par. Buď $F: I \times \Omega \to \mathbb{R}$ tak, že

(1) $\forall \alpha \in I \quad F(\alpha, \cdot)$ je měř.

(2) Pro s.v. $x \in \Omega \quad \exists \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, x) \ \forall \alpha \in I$

(3) $\exists g \in \mathcal{L}^1 \quad \left|\frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, x)\right| \leq g(x)$ pro s.v. $x \in \Omega \ \forall \alpha \in R$

(4) $\exists \alpha_0 \in I \quad F(\alpha_0, \cdot) \in \mathcal{L}^1$

$\Rightarrow$
- $F(\alpha, \cdot) \in \mathcal{L}^1$
- $\varphi: \alpha \mapsto \int F(\alpha, x)$ je dif. v I
- $\varphi'(\alpha) = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, dx$