Poznamenejme, že Newtonův integrál je příklad neabsolutně konvergentního integrálu: existují funkce na $(0,\infty)$ tak, že $(N)\int_0^\infty f < \infty$ a $(N)\int_0^\infty |f| = +\infty$ $\square$

<u>Příklad</u> Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\frac{1}{x^\alpha} \in L((0,b))$, $b \in \mathbb{R}$?

<u>Řešení</u> $\frac{1}{x^\alpha} \in C((0,b)) \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \in M((0,b))$ $\forall \alpha$ a $\frac{1}{x^\alpha} \geq 0$.

Uvažme $\Omega_n = \langle \frac{1}{n}, b \rangle$

$$(L)\int_{1/n}^b \frac{1}{x^\alpha} = (R)\int_{1/n}^b \frac{1}{x^\alpha} = (N)\int_{1/n}^b \frac{dx}{x^\alpha} \overset{\alpha \neq 1}{=} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{1/n}^b$$

$$= \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \begin{cases} \nearrow \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{pro } \alpha < 1 \\ \searrow +\infty & \text{pro } \alpha > 1 \end{cases}$$

Protože $(N)\int_{1/n}^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_{1/n}^b \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty)$,

dostáváme:

$$\boxed{\frac{1}{x^\alpha} \in L((0,b)) \iff \alpha < 1}$$

Proveďte podobnou analýzu pro $\frac{1}{x^\alpha}$ na $(1,\infty)$:

pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\frac{1}{x^\alpha} \in L((1,\infty))$?

Věta 3.15

① • $f \in C(\langle a, +\infty))$, $f \geq 0$ (nebo ≤ 0)
• existuje $\lim_{x\to\infty} |f(x)|\, x^{\alpha} = A$

$\Rightarrow$
• $A \in (0,\infty)$: $f \in L(\langle a,+\infty)) \Leftrightarrow \alpha > 1$
• $A = 0 \wedge \alpha > 1 \Rightarrow f \in L(\langle a,\infty))$
• $A = +\infty \wedge \alpha \leq 1 \Rightarrow$
$f \in L^{*}(\langle a,\infty)) \setminus L(\langle a,\infty))$

② • $f \in C(\langle a,b))$, $f \geq 0$ (nebo ≤ 0)
• existuje $\lim_{x\to a+} f(x)(x-a)^{\alpha} = A$

$\Rightarrow$
• $A \in (0,\infty)$: $f \in L(\langle a,b)) \Leftrightarrow \alpha < 1$
• $A = 0$ & $\alpha < 1 \Rightarrow f \in L(\langle a,b))$
• $A = \infty$ & $\alpha \geq 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow f \in L^{*}(\langle a,b)) \setminus L(\langle a,b))$

Dk Ad ① $A \in (0,\infty) \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{2A}{x^{\alpha}}$ na okolí $+\infty$.

tato majoranta je integrovatelná $\Leftrightarrow \alpha > 1$;

$A = 0 \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{C}{x^{\alpha}}$ a tvrzení plyne; neboť pro $\alpha > 1$

($\exists\, C > 0$ na jistém okolí ∞) je $\frac{C}{x^{\alpha}} \in L$

$A = +\infty$
$\Downarrow$
$\exists\, L > 0$ $|f(x)| \geq \frac{L}{x^{\alpha}}$ na jistém okolí ∞.

a tvrzení plyne ze skutečnosti, že
$$\int \frac{L}{x^{\alpha}} = +\infty.$$

Ad ② SAMI.

$\boxtimes$

Věta 3.16 (Fubini) Buď $f \in L^*(\mathbb{R}^{q+s})$. Definujme

pro $x \in \mathbb{R}^q$: $\quad F(x) = (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dy \quad \left(= (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^s} f(x,\cdot) \right)$

pro $y \in \mathbb{R}^s$: $\quad G(y) = (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dx \quad \left(= (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^q} f(\cdot,y)\,dy \right)$

Pak

$$F \in L^*(\mathbb{R}^q) \quad \text{a} \quad G \in L^*(\mathbb{R}^s)$$

a platí:

- $(\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^{q+s}} f = \int_{\mathbb{R}^q} F = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dy \right) dx \qquad (*)$
- $(\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^{q+s}} f = \int_{\mathbb{R}^s} G = \int_{\mathbb{R}^s} \left(\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\,dx \right) dy \qquad (**)$

Důsledek (1) Buď $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^{q+s})$ tj. Ω je měřitelná a buď $f \in L^*(\Omega)$. Označ

$P_1 = \{ x \in \mathbb{R}^q ;\ \exists\, y \in \mathbb{R}^s \text{ a } (x,y) \in \Omega \}$ ... průmět Ω do $\mathbb{R}^q$

$P_2 = \{ y \in \mathbb{R}^s ;\ \exists\, x \in \mathbb{R}^q \text{ a } (x,y) \in \Omega \}$ ... průmět Ω do $\mathbb{R}^s$

Dále značme:
- pro $x \in P_1$: $\ \Omega(x,*) := \{ y \in \mathbb{R}^s ;\ (x,y) \in \Omega \}$
- pro $y \in P_2$: $\ \Omega(*,y) := \{ x \in \mathbb{R}^q ;\ (x,y) \in \Omega \}$.

Jsou-li $P_1 \in \Lambda(\mathbb{R}^q)$ a $P_2 \in \Lambda(\mathbb{R}^s)$, pak

(1) pro s.v. $x \in P_1$ existují $F(x) := \int_{\Omega(x,*)} f(x,\cdot)$

pro s.v. $y \in P_2$ — " — $G(y) := \int_{\Omega(*,y)} f(\cdot,y)$

② Existují $\int_{P_1} F(x)\,dx$ a $\int_{P_2} G(y)\,dy$

③ Platí: $\int_{\Omega} f = \int_{P_1} F(x)\,dx = \int_{P_1}\left(\int_{M^{(x,*)}} f(x,y)\,dy\right) dx$

$$= \int_{P_2} G(y)\,dy = \int_{P_2}\left(\int_{M^{(*,y)}} f(x,y)\,dx\right) dy$$

Dk důsledku Definuji $\tilde{f} = f\chi_{\Omega}$ a užiji větu 3.16.

Příklad Naznačte obecný postup výpočtu $I = (\mathcal{L})\int_{M} f(x,y,z)$, kde M je omezená množina vymezená plochami otevřená,

$x=0,\ y=0,\ z=0$ a $x+y+z=1$ a poté spočtěte objem M (Lebesgueovu míru M).

Řešení

- $M \subset \mathbb{R}^3$
- $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z \in (0,1),\ y \in (0,1-z),\ x \in (0,1-y-z)\}$

Tedy obecně:

$$\int_M f(x,y,z) = \int_0^1\left(\int_0^{1-z}\left(\int_0^{1-y-z} f(x,y,z)\,dx\right) dy\right) dz$$

Speciálně

$$V(M) = \lambda_3(M) = \int_M 1 = \iiint_M dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{1-z}\left(\int_0^{1-y-z} dx\right) dy\right) dz = \int_0^1\int_0^{1-z} (1-y-z)\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \left[(1-z)y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-z} dz = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-z)^2\,dz = \frac{1}{2}\left[z - z^2 + \frac{z^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{6}$$

$\boxed{\text{Dk Fubiniho věty}}$ Stačí ukázat pro $f \geq 0$ a pro $F(x) = (\mathcal{L}) \int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dy$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Cíl:} & \bullet\ F \in \mathcal{L}^*(\mathbb{R}^q) \\ (*) & \bullet\ \int_{\mathbb{R}^{q+s}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f(x,y)\,dy \right) dx \end{array}}$$

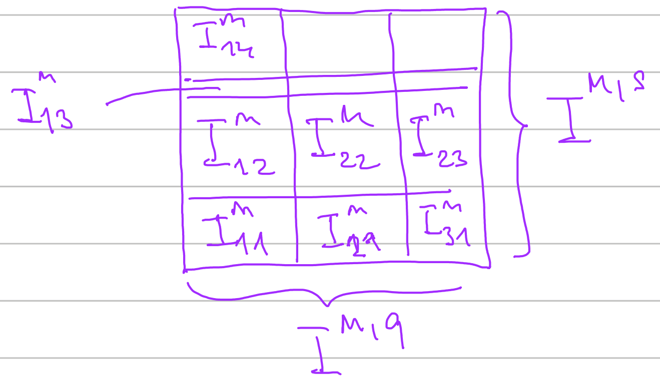
Protože $f \in \mathcal{M}^+$, resp. $f \in \mathcal{L}^*$, existují $h_n \in \mathcal{H}$, $h_n \nearrow f$.

Ukážeme, že [1] $(*)$ platí pro $h_n \in \mathcal{H}$

[2] provedeme limitní přechod $n \to \infty$.

$\boxed{\text{Ad [1]}}$ h_n jsou definovány na $\underset{\in \mathbb{R}^{q+s}}{I^m} = I^{m,q} \times I^{m,s}$

Označme I^m_{ij} ... podinterval I^m, na kterém je h^m rovno c^m_{ij} a platí $I^m_{ij} = I^{m,q}_i \times I^{m,s}_j$, viz obrázek pro $q = s = 1$



Zřejmě

$$V(I^m) = V(I^{m,q})\,V(I^{m,s})$$

$$V(I^m_{ij}) = V(I^{m,q}_i)\,V(I^{m,s}_j)$$

Pro $x \in I^{m,q}$ existuje $i : x \in I^{m,q}_i$ a definujeme

$$F^m_i(x) = \int_{\mathbb{R}^s} h_m(x,y)\,dy = \sum c^m_{ij} V(I^{m,s}_j)$$

*) což je konstantní na $I^{m,q}_i$

Dále

$$\int_{\mathbb{R}^{q+s}} h_m = \int_{I^m} h_m = \sum_{i,j} c^m_{ij} V(I^m_{ij}) = \sum_{i,j} c^m_{ij} V(I^{m,q}_i) V(I^{m,s}_j)$$

$$= \sum_i V(I^{m,q}_i) \sum_j c^m_{ij} V(I^{m,s}_j) = \sum V(I^{m,q}_i) F^m_i$$

$$= \int_{\mathbb{R}^q} F^m$$

kde $F^m = \sum F_i \chi_{I^{m,q}_i}$ je definována na $I^{m,q}$ je schodovitá

*) Tedy $F^m_i(x) = F^m_i$

Ad [2] $\lim_{n\to\infty}$

$$\int_{\mathbb{R}^{q+s}} f = \int_{\mathbb{R}^{q+s}} \lim h_m \overset{\text{Levi}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{q+s}} h_m$$

$$\overset{[1)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} \left(\int_{\mathbb{R}^s} h_m(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^q} F^m$$

$$\overset{\text{Levi}}{=} \int_{\mathbb{R}^q} \lim F^m = \int_{\mathbb{R}^q} F$$

$F^m \nearrow F$ (neboť $h_m \nearrow f$ a použijeme definici F^m, F). $\blacksquare$

<u>Důsledek Fubiniho věty</u> (významný z početního hlediska)

Je-li $f \in M(\Omega)$ a jsou-li $P_1, P_2, M(x,*)$ a $M(*,y)$ jako ve Fubiniho větě 3.16 a je-li alespoň jeden z integrálů

$$I := \int_{P_1} \left(\int_{M(x,*)} |f(x,y)|\,dy \right) dx \,, \qquad J := \int_{P_2} \left(\int_{M(*,y)} |f(x,y)|\,dx \right) dy$$

konečný, pak

$f \in L(\Omega)$ a tvrzení (*) a (**) platí.

Dk tohoto důsledku Je-li $f \in M(\Omega)$, pak $|f| \in M(\Omega)$. Protože $|f| \geq 0$, tak $|f| \in L^*(\Omega)$ a pro $|f|$ dle Fubiniho věty (*) a (**) platí pro $|f|$. Protože I nebo J je konečný, tak (*) či (**) pro $|f|$ implikuje $\int_\Omega |f| < +\infty$. Tedy $f \in L(\Omega)$ a nyní aplikuji Fubiniho větu na f a dostávám vzorce (*) i (**). $\boxed{\leq}$

<u>Věta 3.17</u> (o substituci) Buď

- $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $\Psi : G \to \mathbb{R}^d$ prosté, regulární (tzn. Ψ je C^1 zobrazení na G, $\det \nabla\Psi \neq 0$ v G)
- $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ taková, že $\Omega \subset \Psi(G)$
- f definovaná s.v. na Ω

Pak
$$\int_\Omega f(y)\,dy = \int_{\Psi^{-1}(\Omega)} f(\Psi(x))\,|\det \nabla\Psi(x)|\,dx \qquad (\circledcirc)$$
pokud aspoň jeden z integrálů existuje.

Místo důkazu uvedeme několik pozorování k pochopení přítomnosti členu $|\det \nabla\Psi(x)|$ ve vztahu $(\circledcirc)$.

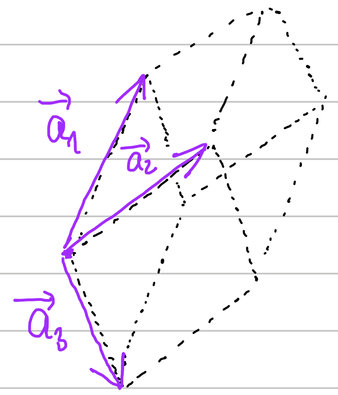
<u>Pozorování</u> ① Je-li $d=1$, pak $\det \nabla\Psi(x) = \Psi'(x)$. Pro $d=1$, má Věta 3.17 tvar:

Je-li $\Psi : (\alpha,\beta) \xrightarrow{\text{na}} (\Psi(\alpha),\Psi(\beta))$ regulární (tj. $\Psi \in C^1((\alpha,\beta))$ a $\Psi' > 0$ nebo $\Psi' < 0$ v (α,β))

a je-li $\boxed{\Psi' > 0}$, pak Ψ je rostoucí a $\Psi(\alpha) < \Psi(\beta)$ a platí $(\circledcirc)$:
$$\int_{\Psi(\alpha)}^{\Psi(\beta)} f(y)\,dy = \int_\alpha^\beta f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx,$$
což je stejný tvar jako ve větě o substituci pro Riemannův integrál.

Je-li $\boxed{\Psi' < 0}$, pak Ψ je klesající a $\Psi(\beta) < \Psi(\alpha)$ a z $(\circledcirc)$
$$\int_{\Psi(\beta)}^{\Psi(\alpha)} f(y)\,dy = \int_\alpha^\beta f(\Psi(x))\,|\Psi'(x)|\,dx = -\int_\alpha^\beta f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx.$$
Tedy
$$\int_\alpha^\beta f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx = \int_{\Psi(\alpha)}^{\Psi(\beta)} f(y)\,dy,$$
což je opět věta o substituci známá z teorie Riemannova integrálu.

② Geometrický význam determinantu



Buď A matice : i-tý sloupec = vektor $\vec{a}_i$

Buď R_A rovnoběžnostěn jako na obrázku.

Platí : $\boxed{\lambda_d(R_A) = |\det A|}$

λ_d … d-rozměrná Lebesgueova míra R_A = objem rovnoběžnostěnu R_A

Dk

$$R_A := \{ y \in \mathbb{R}^d ; \; y = \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{a}_i \; , \; x_i \in (0,1), \; i = 1, \dots, d \}$$

- $\psi(x) \overset{df.}{=} \sum_{i=1}^{d} x_i \vec{a}_i \; : (0,1) \xrightarrow{\text{na}} R_A$ prosté
- $\det \nabla \psi(x) = \det A$

$$\Rightarrow \quad |R_A| := \lambda_d(R_A) = \int_{R_A} 1 \, d\lambda_d \overset{V\,3.17}{=} \int_{(0,1)^d} |\det A| \, d\lambda_d(x)$$

$$= \det A \, \underbrace{\lambda_d\left((0,1)^d\right)}_{=1}$$

$$= \det A \qquad \boxtimes$$

Obecněji : Pro $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^d$: $K_\delta = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^d ; \; 0 < x_i - x_i^0 < \delta \}$

Pak pro $y^0 \in \mathbb{R}$

$$\psi(x) = \vec{y}^0 + \sum_{i=1}^{d} (x_i - x_i^0) \vec{a}_i = \vec{y}_0 + A(\vec{x} - \vec{x}^0)$$

zobrazuje K_δ na rovnoběžnostěn o stranách daných vektory $\delta \vec{a}_i$.

Tedy

$$|\psi(K_\delta)| = |\det A| \; |K_\delta|$$

ZMĚNA OBJEMU PŘI LINEÁRNÍ TRANSFORMACI.

Ještě obecněji uvažujme $\vec{\psi}: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ regulární.

Pak dle Taylorova rozvoje:

$$\vec{\psi}(x) = \vec{\psi}(x^0) + \underbrace{\vec{\nabla}\psi(x^0)\,(\vec{x}-\vec{x}^0)}_{= d\psi(\vec{x}^0;\,\vec{x}-\vec{x}^0)} + o(|x-x^0|)$$

lineární aproximace ψ v bodě x^0

Pak pro $|\vec{x}-\vec{x}^0|$ malé platí:

$$|\psi(K_\delta)| \approx |\det \nabla\vec{\psi}(\vec{x}^0)|\;|K_\delta|$$

koeficient změny objemu krychle pro její obraz zobrazením $\vec{\psi}$

přibližně rovnoběžnostěn.

Poznamenejme, že zobrazení

$$\vec{\psi}(\vec{x}) = \underbrace{\vec{y}^0}_{\text{posunutí}} + \underbrace{\mathbb{A}(\vec{x}-\vec{x}^0)}_{\text{otočení}}, \quad \text{kde } \mathbb{A}\mathbb{A}^T = 1$$

ortogonální matice $\Downarrow$ $|\det \mathbb{A}| = 1$

zachovává délky*), objem, ...

Příklady ① Polární, cylindrické, sférické d-rozměrné sférické souřadnice

viz cvičení

---

*) Platí

$$|\psi(x^1)-\psi(x^2)|^2 = (\psi(x^1)-\psi(x^2))\cdot(\psi(x^1)-\psi(x^2)) = (\mathbb{A}(x^1-x^2))\cdot(\mathbb{A}(x^1-x^2))$$
$$= \mathbb{A}\mathbb{A}^T(x^1-x^2)\cdot(x^1-x^2) = |x^1-x^2|^2$$

(2) Spočtěte $I_d := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|\vec{x}|^2} d\vec{x}$.

Platí $I_d = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-x_1^2} e^{-x_2^2} \cdots e^{-x_d^2} \overset{\text{Fubini}}{=} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_2^2} \cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_d^2} \right) \right) \cdots \right)$

$= J^d$ kde $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz$

Nyní počítejme I_2 pomocí Věty o substituci a použití polárních souřadnic:

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx\,dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr \right) d\varphi$$

$\Psi := \begin{matrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{matrix} : (0,\infty) \times (0,2\pi) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ posledí

$\quad r$

$\det D\Psi = r$ $\qquad$ množ. míry nula

$\overset{\text{Fubini}}{=} 2\pi \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \pi$

Tedy $J^2 = I_2 = \pi$ implikuje $J = \sqrt{\pi}$ a tedy

$$\boxed{I_d = (\sqrt{\pi})^{\frac{d}{2}}}$$

☒

(3) Pro $\alpha > \beta > 0$ spočtěte: $I(\alpha,\beta) := \int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}$

Označme $f(x,y) := \frac{e^{-yx^2}}{x}$ ... par

$f(x,\beta) - f(x,\alpha) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dy = \int_\alpha^\beta -xe^{-yx^2} dy$

Tedy $I(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta xe^{-yx^2} dy \right) dx$

integr. fce je $\geq$ $\qquad \overset{\text{Fubini}}{=} \int_\alpha^\beta \left(\int_0^\infty xe^{-yx^2} dx \right) dy$

$= \int_\alpha^\beta \left[\frac{e^{-yx^2}}{2y} \right]_0^\infty dy = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta \frac{1}{y} dy = \ln \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$.

☒

3.6 Integrály závislé na parametru

Předchozí příklad byl příkladem integrálu závislého na parametrech α, β. V této kapitolce se budeme zabývat otázkou, zda lze integrál $I(\alpha) = \int_\Omega f(\alpha, x)\,dx$ derivovat dle α tak, že prohodíme $\int$ a derivování, tj. zda platí

$$\frac{d}{d\alpha} I(\alpha) = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha, x)\,dx.$$

Podobná otázka: platí

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} I(\alpha) = \int_\Omega \lim_{\alpha\to\alpha_0} f(\alpha, x)\,dx \quad ?$$

Odpovědi přináší následující věty.

Věta 3.18 (O záměně $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}$ a $\int$)

Buď $\alpha_0 \in P \subset \mathbb{R}^p$, $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$. Buď $F: P\times\Omega \to \mathbb{R}$ taková, že

(1) $(\forall \alpha\in P)$ $F(\alpha, \cdot)$ je měřitelná

(2) Pro s.v. $x\in\Omega$ existuje $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha, x) =: F(x)$

(3) $\exists g\in L(\Omega)$: pro s.v. $x\in\Omega$ a $\forall\alpha\in P$: $|f(\alpha,x)| \le g(x)$

Potom
- $F\in L(\Omega)$
- $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int_\Omega F(\alpha,x)\,dx = \int_\Omega \lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} F(\alpha,x) = \int_\Omega F(x)\,dx$

Dk: plyne z Heineho a Lebesgueovy věty.

Heine: $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} \int_\Omega F(\alpha,x) = A \iff \forall \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty,\ \alpha_n \to \alpha_0 \Rightarrow \int_\Omega F(\alpha_n,x)\,dx \to \int_\Omega F(\alpha_0,x)$

Lebesgueovu větu aplikujeme přímo na $f_n(x) := F(\alpha_n, x)$.

$\blacksquare$

Důsledky Věty 3.18 (i) Nahradíme-li (2) předpokladem

(2') $F(\alpha, x)$ je pro s.v. $x \in \Omega$ spojitá v α_0

resp.

(2'') $F(\cdot, x) \in C(P)$ pro s.v. $x \in \Omega$,

potom $\varphi : \alpha \in P \longmapsto \varphi(\alpha) := \int_\Omega F(\alpha, x)\,dx$ je spojitá v α_0

resp. $\varphi \in C(P)$.

(ii) $\lim_{\alpha \to \alpha_0}$, spojitost, derivace jsou lokální vlastnosti; k záměně tedy stačí nalézt majorantu jen na určitém okolí α_0 (a ne nutně na celém P)

(iii) Předpoklad (3) lze nahradit předpokladem

(3') pro s.v. $x \in \Omega$ a $\forall \alpha, \beta \in P : \alpha \leq \beta \Rightarrow F(\alpha, \cdot) \leq F(\beta, \cdot)$
a $(\exists K \in \mathbb{R})$ $\int F(\alpha, x)\,dx \leq K$ $\forall \alpha \in \mathcal{U}(\alpha_0)$

což je zřejmé pokud v důkazu nahradíme Lebesgueovu větu Leviho větou.

Věta 3.19 (O záměně derivace a $\int$) Buď $I \subset \mathbb{R}$ interval, $\Omega \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ a $F : I \times \Omega \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^d} \mathbb{R}$ takové, že

(1) $(\forall \alpha \in I)$ $F(\alpha, \cdot)$ je měřitelná

$\exists N \subset \Omega$, $\lambda_d(N) = 0$ tak, že

(2) $\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ je konečná v $\Omega \setminus N$

(3) $\exists g \in L(\Omega)$, $(\forall \alpha \in I)$ $\left|\frac{\partial F}{\partial \alpha}\right| \leq g$ v $\Omega \setminus N$

(4) $\exists \alpha_0 \in I$: $F(\alpha_0, \cdot) \in L(\Omega)$

Pak
- $(\forall \alpha \in I)$ $F(\alpha, \cdot) \in L(\Omega)$
- $\frac{dI}{d\alpha} = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, x)\,dx$

(Dk) Pro $\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$ a pro $x \in \Omega \setminus N$ je dle Lagrangeovy věty o střední hodnotě

$$\left| \frac{F(\alpha,x) - F(\beta,x)}{\alpha - \beta} \right| = \left| \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\xi, x) \right| \leq g(x)$$

Protože $g \in L(\Omega)$, tak $x \longmapsto \frac{F(\alpha,x) - F(\beta,x)}{\alpha - \beta} \in L(\Omega)$

Volbou $\beta = \alpha_0$ dostáváme

$$F(\alpha, \cdot) \in L(\Omega) \qquad \forall \alpha \in I$$

Navíc

$$I'(\alpha) = \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{I(\alpha) - I(\alpha_0)}{\alpha - \alpha_0}$$

$$= \lim_{\alpha \to \alpha_0} \int_\Omega \frac{F(\alpha,x) - F(\alpha_0,x)}{\alpha - \alpha_0}\, dx$$

$$\overset{\text{věta 3.18}}{=} \int_\Omega \lim_{\alpha \to \alpha_0} \frac{F(\alpha,x) - F(\alpha_0,x)}{\alpha - \alpha_0}\, dx$$

$$= \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha, x)\, dx.$$

Pozorování: Opět lze změnit předpoklady tak, abychom v důkazu využili Leviho větu místo Lebesgueovy věty.

Příklady (1) Spočtěte $I(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cosh(bx)\, dx = 2\int_0^\infty f(a,b,x)\,dx$ pro $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Řešení: Označ. $f(a,b,\cdot) := e^{-ax^2} \cosh(bx)$

- Pro $\forall a > 0$, $b \in \mathbb{R}$: $f(a,b,\cdot) \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow f(a,b,\cdot) \in M(\mathbb{R})$
- $|f(a,b,\cdot)| \leq e^{-\frac{a}{2}x^2}$ pro dostatečně velká x

  a $\int_0^\infty e^{-\frac{a}{2}x^2} < +\infty$ (viz příklad dříve)

nebolí $\forall a_0 > 0$ $\exists\, U_{\frac{a_0}{2}}(a_0)$ tak, že $\forall a \in U_{\frac{a_0}{2}}(a_0)$

(dokonce $\forall a \in (\frac{a_0}{2}, +\infty)$) a $\forall b \in \mathbb{R}$

$|f(a,b,\cdot)| \leq e^{-\frac{a_0}{2}x^2} \implies f(a,b,\cdot) \in L(\mathbb{R})$ $\forall a > 0$, $b \in \mathbb{R}$.

- $\frac{\partial f}{\partial a}(a,b,x) = -x^2 e^{-ax^2}\cosh bx$

  $\frac{\partial f}{\partial b}(a,b,x) = x e^{-ax^2}\sinh bx \in L(\mathbb{R})$ (stejná argumentace)

  $f(a,0,x) = e^{-ax^2} \in L(\mathbb{R})$ (viz příklad dříve)

- Tedy

$$\frac{\partial}{\partial b} I(a,b) = 2\int_0^\infty x e^{-ax^2} \sinh bx = 2\underbrace{\left[-\frac{1}{2a}\sinh bx\, e^{-ax^2}\right]_0^\infty}_{=0}$$

$$x e^{-ax^2} \downarrow -\frac{1}{2a}e^{-ax^2}, \qquad \sinh bx \downarrow b\cosh bx$$

$$+\frac{b}{a}\int_0^\infty e^{-ax^2} b\cosh bx = \frac{b}{2a} I(a,b)$$

Tedy řešení ODR s parametrem a:

$$\frac{\partial}{\partial b}\ln I(a,b) = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{b^2}{4a} + c(a)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\ln I(a,b) = \frac{b^2}{4a} + c(a)$$

$$\Downarrow$$

$$I(a,b) = K(a)\exp\frac{b^2}{4a}$$

Dosazením $b=0$:

$$I(a,0) = K(a), \text{ ale } I(a,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{a}x)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Tedy

$$I(a,b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\frac{b^2}{4a}$$

$\boxtimes$

(2) Buď $F(b) = \int_0^1 \frac{x^b}{1+x}\,dx$. Ukažte, že $F \in C((-1,+\infty))$.

Řešení

- $f(b,x) = \frac{x^b}{1+x} \in C((0,1))$ pro $\forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow f(b,\cdot) \in M((0,1))$
- pro $x \in (0,1)$: $\frac{x^b}{1+x} \in C(\mathbb{R})$
- zbývá vyjádřit pro jaká b: $\frac{x^b}{1+x} \in L(0,1)$

Avšak:

$$\int_0^1 \frac{x^b}{1+x} = \underbrace{\int_0^\varepsilon \frac{x^b}{1+x}}_{\substack{\geq 0 \\ \in L((0,\varepsilon)) \\ \Leftrightarrow\ b>-1}} + \underbrace{\int_\varepsilon^1 \frac{x^b}{1+x}}_{\substack{\in C(\langle \varepsilon,1\rangle) \\ \Downarrow \\ \in L(\langle\varepsilon,1\rangle)}}$$

$\boxed{\text{ZÁVĚREČNÁ POZNÁMKA}}$

Víme, že $\left(C(\Omega);\ \int_\Omega |f(x)|dx\right)$ není úplný.

Uvažujme tedy

$$\left(L(\Omega);\ \int_\Omega |f(x)|dx\right)$$

Pak $\|f\|_1 := \int_\Omega |f(x)|dx$ splňuje

(i) $\|f\|_1 \geq 0$

(ii) $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

(iii) $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\,\|f\|_1$

Přesto $\|f\|_1$ není norma na $L(\Omega)$, neboť

$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$ s.v. (tedy nejen pro $f=0$)

$(L(\Omega), \|\cdot\|_1)$ tedy není normovaný prostor

Lze ale zavést

$L^1(\Omega) = L(\Omega)/\sim$, kde $f \sim g \Leftrightarrow f = g$ s.v. $\Rightarrow (L^1(\Omega), \|\cdot\|_1)$ je úplný.