$\boxed{3.4}$ Měřitelné funkce, měřitelné množiny, σ-algebry, míry

Nejdříve provedeme shrnutí zavedených struktur včetně drobného rozšíření, klíčovým pojmem této sekce bude MĚŘITELNOST fcí a množin a pojem MÍRA.

(i) H ... vektorový prostor schodovitých funkcí

$f \in H \iff \exists\, I \subset \mathbb{R}^d$ omezený interval a jeho dělení $\{I_j\}_{j=1}^{N}$

tak, že $\quad f = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{I_j} \iff f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{I_j}(x)$

pro jistá $c_j \in \mathbb{R}$

$$f \in H \implies \int f = \sum_{j=1}^{N} c_j V(I_j)$$

Klíčové vlastnosti:
- $f \in H \implies |f| \in H$
- $\{h_i\} \subset H,\ h_i \searrow 0 \implies \int h_i \to 0$

(ii) M^+ ... $f \geq 0$; $\exists \{h_i\} \subset H$ tak, že $h_i \nearrow f$

$f \in M^+ \implies \int f = \lim_{i\to\infty} \int h_i$ (buď $+\infty$ nebo $\in \mathbb{R}_0^+$)

L^+ ... $\{f \in M^+;\ \exists K > 0\ \forall i\ \int h_i \leq K\}$

$f \in L^+ \implies \int f = \lim \int h_i \in \mathbb{R}_0^+$

(M^+, L^+ nejsou vektorové prostory)

(iii) M ... $\{f;\ f^+, f^- \in M^+\}$

L^* ... $\{f \in M;\ \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}\}$

L ... $\{f \in M;\ \int f := \int f^+ - \int f^- \in \mathbb{R}\}$

PLATÍ: $L \subset L^* \subset M$; $M^+ \subset L^*$

$\boxed{\text{Věta}}$ 3.11 (Shrnutí základních vlastností M)

1. $\{f_n\} \subset M$ a $f_n \to f$ s.v. $\Rightarrow f \in M$
2. $f, g, \{f_n\} \subset M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{f \pm g, \alpha f}_{M \text{ je vektorový prostor}}, f g, \frac{f}{g}_{\neq 0}, \underbrace{\max\{f,g\}, \min\{f,g\}}_{M \text{ je svaz}} \in M$

$\Rightarrow \sup\{f_n\}, \inf\{f_n\}, \limsup\{f_n\}, \liminf\{f_n\} \in M$

3. f spojitá $\Rightarrow f \in M$
4. $F: \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ spojitá, $\vec{f} = (f_1, \dots, f_s): \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$ a $f_i \in M$ $\Rightarrow F \circ \vec{f} \in M$

Důkaz je vynechán (zkuste si rozmyslet jak bychom dokazovali 1 a 2). Důležitý je celkový význam této věty: "měřitelnost fcí" je uzavřená na spoustu operací: $\pm, \cdot, -, \max, \min, \sup, \inf, \limsup, \liminf$

Ale nikoliv na složení.

Platí: Každá funkce se dá napsat jako složení dvou měřitelných zobrazení. Ukážeme, že existují χ_{Ω}, které NEJSOU měřitelné. Obecně tedy nelze zobecnit tvrzení 4 pro $F \in M$ a $f_i \in M$.

Mějme nyní $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a $f \in L(\mathbb{R}^d)$ či $f \in M(\mathbb{R}^d)$

Ptáme se, zda

$$f\chi_{\Omega} \stackrel{df.}{=} \begin{cases} f & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d - \Omega \end{cases}$$ patří do $L(\mathbb{R}^d)$ resp. $M(\mathbb{R}^d)$?

! Obecně to neplatí !

Def (měřitelné množiny)

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je měřitelná $\iff \chi_\Omega \in M$

Def $\mathcal{P}(X)$ ... systém všech podmnožin X (potenční množina)

$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ... —— || —— $\mathbb{R}^d$

$\Lambda(\mathbb{R}^d)$ ... systém všech měřitelných podmnožin $\mathbb{R}^d$

Platí: $\Lambda(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ [NÍŽE ukážeme více $\Lambda(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$]

Def Zobrazení

$\lambda_d : \Lambda(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_0^+$ je definováno vztahem

$$\lambda_d(\Omega) = \int \chi_\Omega$$

Pozorování

$$\lambda_d\left((0,1)^d\right) = \int \chi_{(0,1)^d} = V\left((0,1)^d\right) = 1$$

λ_d budeme později nazývat Lebesgueova míra

Def. Buď $f \geq 0$ & $f \in M$. Zobrazení

$\nu_f : \Lambda(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_0^+$ definujeme

předpisem $\nu_f(\Omega) = \int f \chi_\Omega$

Pozorování: $\lambda_d(\Omega) = \nu_1(\Omega)$. Ukážeme později, že ν_f jsou míry, tj. ν_f splňují vlastnosti, které uvedeme v definici míry.

Ještě předtím si ukážeme existenci neměřitelné množiny (a tedy také neměřitelné funkce).

Příklad (konstrukce neměřitelné množiny) Tato konstrukce je založena na Axiomu výběru a jednoduchém vztahu ekvivalence mezi reálnými čísly z $[0,1]$.

Řekneme, že $x, y \in [0,1]$ jsou ekvivalentní, $x \sim y$, právě když $x - y \in \mathbb{Q}$ (rozdíl je racionální)

(určitě platí: $x \sim x$; $x \sim y \Rightarrow y \sim x$; $x \sim y$ & $y \sim z \Rightarrow x \sim z$

tedy $x \sim y$ je ekvivalence)

Nyní rozdělíme $[0,1]$ do tříd ekvivalence, např.

- $\mathbb{Q} \subset [0,1]$ tvoří jednu třídu
- $\frac{\sqrt{2}}{2} + p$, kde $p \in \mathbb{Q}$ tak, že $\frac{\sqrt{2}}{2} + p \in [0,1]$ tvoří další třídu
- atd

Dvě třídy ekvivalence jsou buď stejné nebo disjunktní. A platí

$$[0,1] = \bigcup_\alpha \mathcal{E}_\alpha \quad \text{kde } \mathcal{E}_\alpha \text{ je jedna třída ekvivalence.}$$

Nyní definujme naší množinu

$$\mathcal{N} = \{x_\alpha\}_\alpha \quad \text{kde } x_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha \text{ je jediný z } \mathcal{E}_\alpha.$$

Tato konstrukce je možná díky axiomu výběru: Buď E množina a $\{E_\alpha\}$ soubor neprázdných podmnožin E, přičemž množina indexů není spočetná. Pak existuje funkce $\alpha \longmapsto x_\alpha$ (výběrová funkce) tak, že $x_\alpha \in E_\alpha$ $\forall \alpha$.

$\boxed{\text{Ukážeme, že } \mathcal{N} \text{ není měřitelná.}}$ Sporem. Nechť $\mathcal{N}$ je měřitelná.

Uvažujme posunutí množiny $\mathcal{N}$ typu

$$\mathcal{N}_k = \mathcal{N} + r_k$$

kde $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ představuje všechna racionální čísla z $\langle -1, 1 \rangle$

Není obtížné ověřit (OVĚŘTE SI), že :

- N_k jsou navzájem disjunktní
- $[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset [-1,2]$.

Kdyby N byla měřitelná, pak jsou N_k také měřitelné $\forall k \in \mathbb{N}$.
Protože N_k jsou navzájem disjunktní, tak

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N_k) \leq 3.$$

Protože N_k jsou jen posunutí N tak $\lambda_1(N_k) = \lambda_1(N)$.
Tedy

$$1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1(N) \leq 3,$$

což vede ke sporu jak v případě kdy $\lambda_1(N) = 0$, nebo když $\lambda_1(N) > 0$ $\boxed{\text{K}}$

Def. Soubor podmnožin Σ množiny X se nazývá σ-algebra

- $X \in \Sigma$
- $A, B \in \Sigma \Rightarrow A \setminus B \in \Sigma$
- $A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

$$\boxed{(X, \Sigma) \text{ měřitelný prostor}}$$

Příklady (i) $\{\emptyset, X\}$ je σ-algebra
(ii) $\mathcal{P}(X)$ je σ-algebra
(iii) $\{A \subset X;\ A \text{ je konečná nebo } X \setminus A \text{ je konečná}\}$ je σ-algebra

Pro úplnost připomeňme definice topologie a topologického prostoru.

$\boxed{\text{Def}}$ Řekneme, že soubor podmnožin $\mathcal{T}$ množiny X je topologie pokud
- $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
- $A, B \in \mathcal{T} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{T}$
- $A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup A_n \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$ se nazývá topologický prostor

Příklady (i) $\{\emptyset, X\}$ je topologie

(ii) $\{\emptyset, \mathbb{R}, (0,1)\}$ je topologie, ale není σ-algebra

(iii) Buď P topologický prostor. Označme $\mathcal{B}(P)$ σ-algebra generovanou souborem všech otevřených podmnožin P. Nazývá se σ-algebra borelovských množin. Obsahuje uzavřené množiny, všechny spočetné průniky otevřených množin (tzv. množiny G_δ), všechna spočetná sjednocení uzavřených množin (tzv. množiny F_σ), atd.

Definice (míry) Buď Σ soubor podmnožin X.
Pak zobrazení $\mu : \Sigma \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je míra (measure) pokud
1) Σ je σ-algebra
2) μ je nezáporná a $\mu(\emptyset) = 0$
3) μ je σ-aditivní $\equiv \{A_i\}_{i=1}^\infty \subset \Sigma$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Rightarrow$
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$$

(X, Σ, μ) se nazývá prostor s mírou

Je-li navíc $\mu(X) = 1$, pak (X, Σ, μ) se nazývá pravděpodobnostní prostor

- Pokud μ je míra a $\mu(X) < \infty$, pak μ je <u>konečná</u>
- Míra je <u>σ-konečná</u> $\equiv \exists X_n \nearrow X$ (tzn. $X_{n+1} \supset X_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X$) a $\mu(X_n) < +\infty$
- Míra μ je <u>úplná</u> $\equiv (A \subset B) \wedge (B \in \Sigma)$ a $\mu(B) = 0 \Rightarrow A \in \Sigma$ (ze σ-aditivity pak plyne, že $\mu(A) = 0$)
- Míra μ je absolutně spojitá vzhledem k míře ν, píšeme $\mu \ll \nu$ $\equiv$ Je-li $\nu(A) = 0$, pak $\mu(A) = 0$.

$\boxed{\text{Věta 3.12}}$

- Systém všech měřitelných množin $\Lambda(\mathbb{R}^d)$ je σ-algebra
- Pro libovolné $f \in M^+(\mathbb{R}^d)$, je ν_f úplná míra, která je absolutně spojitá k Lebesgueově míře λ_d.

Dk. • $\mathbb{R}^d \in \Lambda(\mathbb{R}^d) \Leftarrow 1 \in M^+$, anžto $h_n = \chi_{[-n,n]^d} \nearrow 1$

$\sup h_n = 1 \in M^+$

- $A, B \in \Lambda(\mathbb{R}^d)$ tj. $\chi_A, \chi_B \in M(\mathbb{R}^d)$, pak

$\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} \in M(\mathbb{R}^d)$

$\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\} \in M(\mathbb{R}^d)$ } dle Věty 3.11

a položte $\chi_{A\setminus B} = \chi_{A\setminus(B\cap A)} = \chi_A - \chi_{B\cap A} \in M(\mathbb{R}^d)$

- Jsou-li $A_i \in \Sigma$, pak $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$ neboť $\sup_{i=1,\dots,\infty} \{\chi_{A_i}\} \in M(\mathbb{R}^d)$
- $\nu_f \geq 0$ neboť $f\chi_\Omega \geq 0$ pro $f \geq 0$.

• Jsou-li E_i navzájem disjunktní, měřitelné, pak

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu_f(E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int f \chi_{E_i} = \int f \sum \chi_{E_i} = \int f \chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} = \nu_f\left(\bigcup_{1}^{\infty} E_i\right)$$

kde jsme využili $0 \le f\chi_{\bigcup_{i=1}^{k} A_i} \nearrow f\chi_{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i}$.

• ν_f je úplná. Vskutku, je-li $A \subset B$ a $B \in \Sigma$ a $\mu(B) = 0$,
pak $\int f\chi_B = 0 \Rightarrow f\chi_B = 0$ s.v. a tedy $f\chi_A = 0$ s.v.
a $\int f\chi_A = 0 \Rightarrow \nu_f(A) = 0$

• $\nu_f \ll \lambda_d$ neboť $\lambda_d(E) = 0 \Leftrightarrow \int \chi_E = 0 \underset{\chi_E \ge 0}{\Rightarrow} \chi_E = 0$ s.v. $\Rightarrow f\chi_E = 0$ s.v. $\Rightarrow \nu_f(E) = \int f\chi_E = 0$

∎

Z předchozí věty plyne:

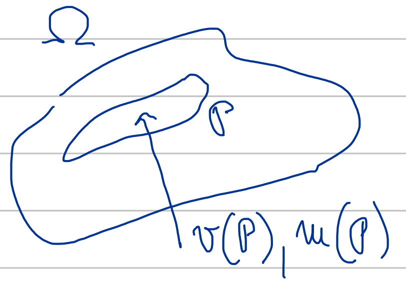
$$\nu_f(\Omega) = \int f\chi_\Omega \Rightarrow \nu_f \ll \lambda_d$$

Platí i opačné tvrzení, které se nazývá Radon-Nikodymova věta.

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ "spojité prostředí" (voda, vzduch, pevné látky). V takovém prostředí je přirozené požadovat, že "je-li objem nějaké podmnožiny nulový, je i hmotnost spojená s touto podmnožinou nulová", neboli $\underset{\text{hmotnost}}{m}(P) = 0$ pokud $\underset{\text{objem}}{V}(P) = 0$ neboli $m \ll P$. Dle Radon-Nikodymovy věty $\exists \rho \ge 0 : m(P) = \int_P \rho \, dV$

$\rho : \Omega \to \mathbb{R}$

(ρ se nazývá hustota)



v, m dvě míry

POZOROVÁNÍ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ spojitá, pak $F(x) := \int_a^x f(s)\,ds$ splňuje $F' = f$ v $\mathbb{R}$
Je-li navíc $f \ge 0$, pak $\nu_f(a,b) = \int_a^b f(s)\,ds$ je nejen míra,
ale platí $\nu_f(a,b) = F(b) - F(a)$

Tento poslední vztah lze zobecnit následujícím způsobem

Buď F rostoucí. Pak f může mít nejvýše spočetně bodů nespojitosti. Je-li x_0 bod nespojitosti, pak $F(x_0-) := \lim_{x \to x_0-} F(x)$, $F(x_0+) := \lim F(x)$ a $F(x_0)$ může být jakákoliv hodnota mezi $F(x_0-)$ a $F(x_0+)$. Definujeme-li $F(x_0) = F(x_0+)$, pak F je nejen neklesající, ale také spojitá zprava. Platí:

Tvrzení: Je-li F rostoucí fce na $\mathbb{R}$ spojitá zprava. Pak existuje jediná míra μ (často značená dF) definovaná na σ-algebře borelovských množin taková, že $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ je-li $a < b$. Naopak, je-li μ míra na σ-algebře borelovských množin, která je konečná na omezených intervalech, pak F definované:

$$F(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\mu((-x,0]) & x < 0 \end{cases}$$

je rostoucí a spojitá zprava.

Je-li F rostoucí, spojitá zprava na $[a,b]$, pak lze rozšířit vně $[a,b]$ tak, že $F(x) = F(a)$ pro $x < a$ a $F(x) = F(b)$ pro $x > b$. Zřejmě $\mu(-\infty, a) = 0$ a $\mu(b, +\infty) = 0$.

Píšeme: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\mu(x) = \int_a^b f(x)\,dF$ $\boxed{\text{Lebesgue-Stieltjesův integrál}}$

se redukuje na Lebesgueův $\int$ pro $F(x) = x$, což vede k značení $dF = dx$.

$\boxed{\text{Poznámky}}$ (1) V $d=1$ známe $(R)\int_a^b f$, který je dobře definován pro $f \in C(\langle a,b\rangle)$.

V jedné dimenzi lze tedy budovat konstrukci Lebesgueova integrálu z $H := \{f \in C(\langle a,b\rangle)\}$.

(2) Jiný způsob konstrukce $(L)\int_a^b f$.

- (X, Σ, μ) prostor s mírou
- f je měřitelná $\iff (\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \{x; f(x) > \alpha\}$ je měřitelná
- H ..... jednoduché fce na měřitelné Ω.

$\boxed{\text{ÚMLUVA}}$ Buď $f:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\in\Lambda(\mathbb{R}^d)$. Definujme

$\tilde f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ předpisem $\tilde f(x)=\begin{cases} f(x) & x\in\Omega \\ 0 & x\in\mathbb{R}^d\setminus\Omega\end{cases}$

Je-li $\tilde f\in M$, pak definujme

$$\boxed{(\mathcal{L})\int_\Omega f=(\mathcal{L})\int\tilde f}$$ neboli: $f\in L(\Omega)\overset{df}{\equiv}\tilde f\in L$

$\boxed{\text{Věta 3.13}}$ (Závislost $(\mathcal{L})\int$ na integračním oboru). Pro $\Omega,\Omega_i\in\Lambda(\mathbb{R}^d)$, $i\in\mathbb{N}$, platí:

(1) $\Omega=\bigcup_{i=1}^\infty\Omega_i$ a $\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ a $f\in L(\Omega)$ $\Rightarrow$ $\int_\Omega f=\sum_{i=1}^\infty\int_{\Omega_i}f$

(1') $\Omega=\bigcup_{i=1}^\infty\Omega_i$ a $\Omega_i\cap\Omega_j=\emptyset$ $(i\neq j)$ a $0\le f\in M$, $\sum_{i=1}^\infty\int_{\Omega_i}f<+\infty$ $\Rightarrow$ $f\in L(\Omega)$

(2) $\Omega=\bigcup_{i=1}^\infty\Omega_i$ a $\Omega_i\subset\Omega_{i+1}$ pro $\forall i$ a $f\in L(\Omega)$ $\Rightarrow$ $\int_\Omega f=\lim_{i\to\infty}\int_{\Omega_i}f$

(3) $\Omega=\bigcap_{i=1}^\infty\Omega_i$ a $\Omega_{i+1}\subset\Omega_i$ pro $\forall i$ a $f\in L(\Omega)$ $\Rightarrow$ $\int_\Omega f=\lim_{i\to\infty}\int_{\Omega_i}f$

(4) $\lambda_d(\Omega)<\infty$ a $f\in M(\Omega)$ a $(\exists K)(|f|\le K$ na $\Omega)$

$\Longrightarrow$ $f\in L(\Omega)$ a $\left|\int_\Omega f\right|\le K\lambda_d(\Omega)<\infty$

(5) f měřitelná, E množ. míry nula $\Rightarrow$ $\int_E f=0$

(6) $\tilde\Omega\subset\Omega$, $\tilde\Omega,\Omega\in\Lambda(\mathbb{R}^d)$ a $f\in L(\Omega)$, $f\ge0$ $\Rightarrow$ $\int_{\tilde\Omega}f\le\int_\Omega f$

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ Je-li $f\in L(\Omega)$, pak $|f|\in L(\Omega)$. Dle Lebesgueovy věty ($|f|$ je integr. majoranta) $f\in L(\Omega_i)$.

Navíc $\sum_{i=1}^k\chi_{\Omega_i}f\xrightarrow[k\to\infty]{}\chi_\Omega f$ v $\mathbb{R}^d$ $\Rightarrow$

$$\int_\Omega f=\int f\chi_\Omega\underset{\text{Lebesg.}}{=}\lim_{k\to\infty}\int\sum_{i=1}^k f\chi_{\Omega_i}=\lim_{k\to\infty}\sum_1^k\int f\chi_{\Omega_i}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sum_1^k\int_{\Omega_i}f=\sum_{i=1}^\infty\int_{\Omega_i}f$$ ∎

$\boxed{\text{Ad } (1')}$ $\sum_{i=1}^{k} f\chi_{\Omega_i} \nearrow f\chi_{\Omega}$ neboť $f \geq 0$. S využitím zbylých předpokladů a Leviho věty dostáváme $f\chi_{\Omega} \in L \Rightarrow f \in L(\Omega)$.

$\boxed{\text{Ad } (2)}$ Definujme $\tilde{\Omega}_i$ pomocí Ω_i tak, aby vznikl navzájem disjunktní systém:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\Omega}_1 &:= \Omega_1 \\ \tilde{\Omega}_i &:= \Omega_{i+1} \setminus \Omega_i \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{\Omega}_i \text{ navzájem disjunktní a } \bigcup \tilde{\Omega}_i = \Omega$$

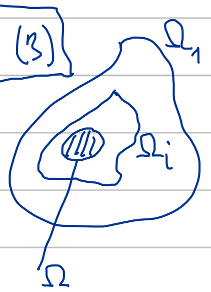
Dle (1):

$$\int_{\Omega} f = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \int_{\tilde{\Omega}_i} f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2\setminus\Omega_1} f + \dots + \int_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int f\chi_{\Omega_1} + f\chi_{\Omega_2\setminus\Omega_1} + \dots + f\chi_{\Omega_k\setminus\Omega_{k-1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int f\chi_{\Omega_k} = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega_k} f$$

$\boxed{\text{Ad } (3)}$



$$\Omega_1\setminus\Omega_i \nearrow \Omega_1\setminus\Omega \overset{\text{Dle (2)}}{\Longrightarrow} \int_{\Omega_1\setminus\Omega} f = \lim_{i\to\infty} \int_{\Omega_1\setminus\Omega_i} f \Rightarrow$$

$$\int f\chi_{\Omega_1\setminus\Omega} = \lim_{i\to\infty} \int f\chi_{\Omega_1\setminus\Omega_i} \Rightarrow \int f\chi_{\Omega_1} - f\chi_{\Omega} = \lim_{i\to\infty} \int f\chi_{\Omega_1} - \int f\chi_{\Omega_i}$$

$$\Rightarrow \int f\chi_{\Omega} = \lim_{i\to\infty} \int f\chi_{\Omega_i}$$

$\boxed{\text{Ad } (4)}$ Samo - jednoduché, ale často vhodné k použití.

$\boxed{\text{Ad } (5)}$ Nejdříve dodefinujme f vně E nulou. Tedy $\tilde{f} = 0$ s.v. (přičemž jsme využili charakterizaci množin míry nula dle charakteristických funkcí). Pak dle Věty 3.2: $\int \tilde{f} = 0$ a to znamená $\int_E f = 0$.

$\boxed{\text{Ad } (6)}$ Platí pro $f \geq 0$: $\displaystyle\int_{\tilde{\Omega}} f \leq \int_{\tilde{\Omega}} f + \underbrace{\int_{\Omega\setminus\tilde{\Omega}} f}_{\geq 0} = \int_{\Omega} f$

3.5 Jak se Lebesgueův integrál počítá

Nejdříve se zaměříme na situaci pro funkce jedné proměnné, $d=1$. Poté uvedeme dvě významné výsledky pro funkce více proměnných: Fubiniho větu a větu o substituci.

Věta 3.14 (existence $(R)\int_a^b f(x)\,dx$ implikuje existenci $(\mathcal{L})\int_a^b f$)

- $a, b \in \mathbb{R}$, $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ omezená
- existuje $(R)\int_a^b f(x)\,dx$

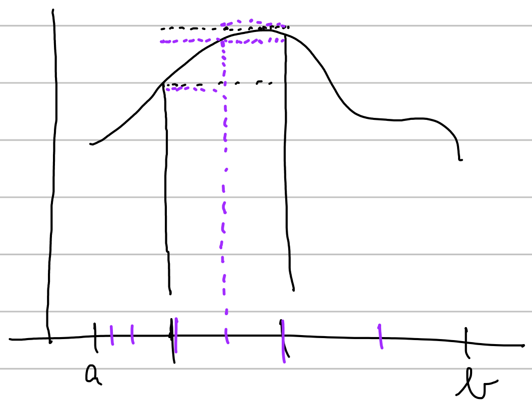
$\Rightarrow$

- $f \in L((a,b))$
- $(\mathcal{L})\int_a^b f = (R)\int_a^b f(x)\,dx$.

Dk Buď $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost dělení $\langle a,b\rangle$; $D_{n+1} \subset D_n$ a $|D_n| \searrow 0$ $\left(|D_{n+1}| \le |D_n|\right)$.

Definujme $h_n, H_n \in H$: $h_n = \sum m_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}$, $m_i := \inf\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \in \mathbb{R}$

$H_n = \sum M_i \chi_{[x_{i-1},x_i]}$, $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f \in \mathbb{R}$



Pak $h_n \le h_{n+1} \le \dots H_1$

a

$H_n \ge H_{n+1} \ge \dots h_1$

a existují funkce F_1 a F_2 tak, že

$h_n \nearrow F_1$ a $H_n \searrow F_2$

Dle Leviho věty

- $F_1, F_2 \in L$
- $(\mathcal{L})\int F_1 = \lim (\mathcal{L})\int h_n = \lim (R)\int h_n = \underline{(R)\int_a^b} f(x)dx$
- $(\mathcal{L})\int F_2 = \lim (\mathcal{L})\int H_n = \lim (R)\int H_n = \overline{(R)\int_a^b} f(x)dx$

Protože $(R)\int_a^b f$ existuje, tak se horní a dolní Riemannovy součty $(R)\overline{\int_a^b} f$ a $(R)\underline{\int_a^b} f$ rovnají. Tedy

$$(\mathcal{L})\int_a^b F_1 = (\mathcal{L})\int_a^b F_2$$

Protože $h_m \leq f \leq H_m$, tak $(n\to\infty)$ $F_1 \leq f \leq F_2$ s.v.

Protože $F_2 - F_1 \geq 0$ s.v. & $(\mathcal{L})\int F_2 - F_1 \geq 0$, tak $F_1 = F_2$ s.v.

Což implikuje $F_1 = F_2 = f$ s.v. Tvrzení je dokázáno. $\boxtimes$

Existuje mnoho integrálů, dosud jsme se seznámili s Riemannovým a Lebesgueovým. Lze také zavést Newtonův integrál a to následujícím způsobem: buď $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ a nechť $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ je spojitá a splňuje $F'(x) = f(x)$ pro $\forall x \in (a,b)\setminus K$, kde K je konečná (F je <u>zobecněná</u> <u>primitivní</u> <u>funkce</u>). Nechť navíc

$$F(b-) - F(a+)$$

má smysl, pak

$$(N)\int_a^b f = F(b-) - F(a+)$$

Ze základní věty diferenciálního a integrálního počtu lze nahlédnout, že pokud existuje na (a,b) omezený (R) a (N) integrál, pak se rovnají.

Poznamenejme, že Newtonův integrál je příklad neabsolutně konvergentního integrálu: existují funkce na $(0,\infty)$ taková, že $(N)\int_0^\infty f < \infty$ a $(N)\int_0^\infty |f| = +\infty$ $\square$

Příklad Pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\frac{1}{x^\alpha} \in L((0,b))$, $b \in \mathbb{R}$?

Řešení $\frac{1}{x^\alpha} \in C((0,b)) \Rightarrow \frac{1}{x^\alpha} \in M((0,b))$ $\forall \alpha$ a $\frac{1}{x^\alpha} \geq 0$.

Uvažme $\Omega_n = \langle \frac{1}{n}, b \rangle$

$$(L)\int_{1/n}^{b} \frac{1}{x^\alpha} = (R)\int_{1/n}^{b} \frac{1}{x^\alpha} = (N)\int_{1/n}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} \overset{\alpha \neq 1}{=} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{1/n}^{b}$$

$$= \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} \begin{cases} \nearrow \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{pro } \alpha < 1 \\ \searrow +\infty & \text{pro } \alpha > 1 \end{cases}$$

Protože $(N)\int_{1/n}^{b} \frac{dx}{x} = [\ln x]_{1/n}^{b} \longrightarrow +\infty \quad (n \to \infty)$,

dostáváme:

$$\boxed{\frac{1}{x^\alpha} \in L((0,b)) \iff \alpha < 1}$$

Proveďte podobnou analýzu pro $\frac{1}{x^\alpha}$ na $(1,\infty)$:

pro jaká $\alpha \in \mathbb{R}$ je $\frac{1}{x^\alpha} \in L((1,\infty))$?