3 Lebesgueův integrál

Cílem této kapitoly je vybudovat integrál pro funkce více proměnných. Mohli bychom budovat vícenásobný Riemannův integrál, což se často dělá. Riemannův integrál však má závažné nedostatky:

- Prostor $R(\langle a,b\rangle) := \{f : (a,b) \to \mathbb{R};\ (R)\int_a^b |f(x)|\,dx < \infty\}$ není úplný metrický prostor. Např. Aproximujme Dirichletovu funkci posloupností, která je rovna 1 jen v konečně mnoha racionálních bodech.

- Limitní přechody

(1) $$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

či záměny operací

(2) $$\frac{d}{dt}\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f'(t)\,dt$$

lze ospravedlnit jen za velmi silných předpokladů.

My budeme budovat jiný integrál, tzv. Lebesgueův, který má tu vlastnost, že prostory

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R};\ \int_\Omega |u(x)|^p\,dx < +\infty\} \quad \text{s} \quad \|\cdot\|_p := \left(\int_\Omega |\cdot|^p\,dx\right)^{1/p}$$

jsou úplné normované (tedy Banachovy) prostory pro $p \in \langle 1, \infty)$.
Speciálně, pro $p = 2$, dostaneme $L^2(\Omega)$, což je Hilbertův prostor se skalárním součinem $(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$.
Navíc si Lebesgueův integrál klade za cíl nalézt minimální požadavky, kdy (1) či (2) platí.

Lebesgueův integrál je konstruován ideově jinak než Riemannův integrál. Z pohledu aproximace oboru integrálů máme:

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$(\mathcal{L})\int_a^b f(x) \simeq \sum c_i \mu(M_i) \quad \text{kde}$$

$$M_i := \{x \in \langle a,b\rangle;\ f(x) \in \langle c_i, c_{i+1})\}$$

3.1 Prostor schodovitých funkcí a množiny míry nula

<u>Definice</u> (intervalu v $\mathbb{R}^d$) Jsou-li $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = 1, 2, \dots, d$, pak

$I := (a_1, b_1\rangle \times (a_2, b_2\rangle \times \dots \times (a_d, b_d\rangle$ nazveme <u>interval</u>,

$I^o := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_d, b_d)$ je <u>otevřený interval</u>

$\overline{I} := \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \dots \times \langle a_d, b_d\rangle$ je <u>uzavřený interval</u>

$S := (a_1, b_1\rangle \times \dots \times (a_{i-1}, b_{i-1}\rangle \times \{b_i\} \times \dots \times (a_d, b_d\rangle$ <u>stěna I</u>

Definujeme objem intervalu I resp. I^o resp. $\overline{I}$ vztahem

$$V(I) := \prod_{i=1}^{d} (b_i - a_i)$$

<u>Dělením</u> I nazveme systém navzájem disjunktních intervalů, jejichž sjednocení je celé I a množiny krajních bodů v i-té složce tvoří dělení intervalu $(a_i, b_i\rangle$.

<u>Def.</u> (množiny míry nula). Řekneme, že $E \subset \mathbb{R}^d$ je <u>množina míry nula</u> pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje spočetné pokrytí intervaly I_k, $k = 1, \dots, \infty$, tak, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} V(I_k) < \varepsilon.$$

Příklad Buď $Q \subseteq \mathbb{R}$ libovolná spočetná množina, pak Q je množina míry nula. Speciálně racionální čísla $\mathbb{Q}$ je množina míry nula.

Dk Buď $Q = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$. Pak $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{\varepsilon}{2^n}}(x_n) \supset Q$,

a tedy $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})}$

a $\sum_{n=1}^{\infty} V\left(I_{(x_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^n})}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon$ ☐

Tvrzení Spočetné sjednocení množin míry nula je množina míry nula.

Dk Sami.

Příklad Cantorovo diskontinuum je nespočetná množina míry nula.

Řešení Cantorovo diskontinuum získáme z $\langle 0,1\rangle$ tak, že $\langle 0,1\rangle$ rozdělíme na třetiny a vynecháme prostřední třetinu $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ a ve zbylých částech tento postup opakujeme. Platí

$$x \in C \iff x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad \text{kde } a_n = 0 \text{ nebo } 2.$$

$\boxed{C \text{ je nespočetná}}$ Kdyby C byla spočetná, pak

$C = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0.a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ x_2 &= 0.a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ &\vdots \\ x_n &= 0.a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \\ &\vdots \end{aligned}\right\} a_{ij} \in \{0,2\}$$

Definujeme-li $x = 0.a_1a_2\dots$ předpisem $a_i = \begin{cases} 0 & \text{je-li } a_{ii} = 2 \\ 2 & \text{je-li } a_{ii} = 0, \end{cases}$

pak $x \notin C$ (neb se liší od všech prvků v $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Tedy C není spočetná.

Dále $C \subset \langle 0,1\rangle \setminus F_n$, kde F_n je sjednocení vynechaných intervalů po n-tém kroku konstrukce C. Tedy

$$V(F_n) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^i$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow 1 \quad \text{pro } n\to\infty.$$

Tedy C je pokryta spočetným (konečným) sjednocením otevřených intervalů, jejichž celkový objem jde k nule.

__Definice__ Řekneme, že $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je schodovitá (jednoduchá) funkce (step or simple) pokud existuje interval $I \subset \mathbb{R}^d$ tak, že $f \equiv 0$ v $\mathbb{R}^d \setminus I$ a existuje dělení $\{I_k\}_{k=1}^N$ intervalu I a existují $\{c_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}$ tak, že

$$f(x) = \sum c_k \chi_{I_k}(x)$$

__Značení__ $H := \{ f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R};\ f \text{ je schodovitá} \}$

__Definice__ $f \in H \Rightarrow \int f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \int_I f(x)\,dx := \sum_{k=1}^N c_k V(I_k)$

Následující tvrzení charakterizuje množiny míry nula pomocí schodovitých funkcí.

Tvrzení $E \subset \mathbb{R}^d$ je množina míry nula $\iff \forall \eta > 0 \; \exists \{h_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ tak, že

(1) $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_n \leq \dots$

(2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \int h_n(x)\,dx \leq \eta$

(3) $(\forall x \in E) \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} h_n(x) \geq 1$

Dk $\boxed{\Rightarrow}$ Předpokládáme, že $\boxed{\text{pro dané } \eta > 0}$ existují $\{I_k\}$ tak, že $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ a $\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) < \eta$. Definujme

$$h_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \chi_{I_k}(x)$$

Pak $h_n \in H$ a (1) platí. Navíc $\int h_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v(I_k) < \eta$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, což je (2). Protože $\bigcup I_k$ pokrývá E, tak (3) platí.

$\boxed{\Leftarrow}$ Zkuste si dokázat sami.

$\boxed{\text{Věta 3.1}}$ (Vlastnosti schodovitých funkcí, vlastnosti prostoru H)

(i) $f \in H \Rightarrow |f| \in H$

(ii) $(\forall f \in H) \quad f \geq 0 \Rightarrow \int f\,dx \geq 0$

(iii) H je vektorový prostor $(f, g \in H, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f+g \in H, \alpha f \in H)$

$\boxed{f \leq g \;\&\; f, g \in H \Downarrow \int f \leq \int g}$

(iv) $f, g \in H \Rightarrow \max\{f, g\} \in H$, $f^+ \in H$
$\min\{f, g\} \in H$, $f^- \in H$

(v) $f \in H \Rightarrow \left| \int f\,dx \right| \leq \int |f|\,dx$

(vi) Jsou-li $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ a $f_k \searrow 0$, pak $\lim_{k \to \infty} \int f_k = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^d: \; 0 \leq \dots \leq f_{k+1}(x) \leq f_k(x) \leq \dots \leq f_1(x) \;\&\; \lim_{k \to \infty} f_k(x) = 0$

D{ $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Je-li $f(x)=\sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{I_k}(x)$, pak $|f(x)|=\sum |c_k|\chi_{I_k}(x)$ je zřejmě také schodovitá.

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Je-li $f(x)=\sum_{k=1}^{N} c_k \chi_{I_k}(x)$ a $c_k \geq 0$, pak $\int f = \sum c_k V(I_k) \geq 0$.

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ Pokud $\alpha\in\mathbb{R}$, $f\in H$, pak $\alpha f\in H$.

Jsou-li $f, g\in H$ a $f\equiv 0$ v $\mathbb{R}^d - I^f$ a $g\equiv 0$ v $\mathbb{R}^d - I^g$, pak snadno sestrojíme interval I a jeho dělení $\{I_k\}$ tak, že $\{I_k\}|_{I^f}$ je zjemněním (dělením) $\{I_k^f\}_{k=1}^{N_f}$ a $\{I_k\}|_{I^g}$ je zjemněním $\{I_k^g\}_{k=1}^{N_g}$. Na intervalech $I_k \notin I^f\cup I^g$ položme $c_k=0$. Na $I_k\subset I^f\setminus I^g$ je $c_k=c_k^f$ a na $I_k\subset I^g\setminus I^f$ položme $c_k=c_k^g$. Konečně na $I_k\subset I^f\cap I^g$ klademe $c_k=c_k^f+c_k^g$.

Tak $f+g=\sum c_k\chi_{I_k}\in H$.

$\boxed{\text{Ad (iv)}}$ Protože $f^+=\max\{f,0\}$, $f^-=\max\{-f,0\}$, $\max\{f,g\}=\frac{1}{2}\{|f-g|+f+g\}$ a $\min\{f,g\}=-\max\{-f,-g\}$, tak tvrzení plyne z (iii) a (i).

$\boxed{\text{Ad (v)}}$ Protože $-|f|\leq f\leq |f|$, tak dle (ii) aplikované na $|f|+f$ a $|f|-f$ a s použitím linearity dostáváme

$$-\int|f| \leq \int f \leq \int|f|.$$

$\boxed{\text{Ad (vi)}}$ Chceme ukázat, že

$$(\forall \varepsilon>0)(\exists k_0\in\mathbb{N})(\forall k\geq k_0)\quad \int f_k \leq \varepsilon.$$

[1] <u>Značení</u> • f_1 je nula vně I (f_k jsou monotónní $\Rightarrow f_k=0$ vně I)

$M:=\max_{x\in I} f_1(x)$

• $f_k\in H \Rightarrow \exists\{I_{kj}\}_{j=1}^{N_j} (\exists f_{kj}\in\mathbb{R})\ f_k=\sum_{j=1}^{N_j} f_{kj}\chi_{kj}$

S_k .... množina všech stěn dělení I_{kj}

$$S_\infty=\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k\cup\{\text{zbylé stěny } \partial I\}$$

S_∞ je spočetná – jednotlivé stěny z S_∞ lze oindexovat přirozenými čísly

[2] Pokrytí $\bar{I}$ $\quad \varepsilon > $ dáno. Polož $\eta := \frac{\varepsilon}{2M}$ a $\eta' = \frac{\varepsilon}{2V(I)}$

(a) pokrytí S_∞ $\quad \forall$ stěnu S_i z S_∞ pokryjeme otevřeným intervalem K_i tak, že $V(K_i) \leq \frac{\eta}{2^i}$

Potom $\sum_{i=1}^{\infty} V(K_i) < \eta$.

(b) pokrytí $I \setminus S_\infty$

$I \setminus S_k$ je otevřená množina a f_k je na $I \setminus S_k$ spojitá

$$\forall x \in I \setminus S_\infty \ (\exists k_0 = k_0(x))(\forall k \geq k_0) \quad f_k(x) < \eta'$$

(speciálně $f_{k_0}(x) < \eta'$)

Protože f_{k_0} je po částech konstantní, tak existuje otevřený interval $J(x)$ tak, že $f_{k_0}(y) < \eta'$ pro všechna $y \in J(x)$

$$\bar{I} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \cup \bigcup_{x \in I \setminus S_\infty} J(x) \text{ , ale } \bar{I} \text{ je kompakt}$$

$$\Longrightarrow \exists K_{i_1}, \dots, K_{i_m}, x_1, \dots, x_p \text{ tak, že } \bar{I} \subset \bigcup_{j=1}^{m} K_{i_j} \cup \bigcup_{i=1}^{p} J(x_i)$$

vzájemně disjunktní

[3] Definujme $k_0^* = \max_{i=1,\dots,p} \{ k_0(x_i) \}$

Pro $\forall k \geq k_0^*$ a $\forall x \in I \setminus S_\infty$: $f_k(x) < \eta'$

a navíc $I \setminus S_\infty \subset \bigcup_{i=1}^{p} J(x_i)$ & $\sum_{i=1}^{p} V(J(x_i)) \leq V(I)$

$$\int f_k \leq \int f_{k_0^*} \leq M \sum_{j=1}^{m} V(K_{i_j}) + \eta' V(I)$$

$$\leq M\eta + \eta' V(I) = \varepsilon$$

$\boxtimes$

Definice Řekneme, že nějaká vlastnost (např. $f=g$, $f\le g$, ...) platí *skoro všude* (almost everywhere) a píšeme s.v. (a.e.) $\equiv^{df}$ vlastnost platí $\forall x\in\mathbb{R}^d\setminus Z$, kde Z je množina míry nula.

Věta 3.2 (Další vlastnosti schodovitých funkcí). Buď $f, g\in H$

(i) $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset H$ a $f_n\searrow 0$ s.v. $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\int f_n = 0$

(ii) $f=g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$

(iii) $f\le g$ s.v. $\Rightarrow \int f \le \int g$

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Dokážeme tvrzení $\boxed{\text{nejdříve}}$ za silnějších předpokladů:

$\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset H$ a $0\le \dots f_{n+1}(x)\le f_n(x)\le\dots\le f_1(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}^d$

$\lim f_n(x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^d\setminus Z,$

kde Z je množ. míry nula tzn. $\exists\{h_i\}_{i=1}^\infty\subset H$

(i) $0\le h_1(x)\le\dots\le h_n(x)\le\dots$

(ii) $(\forall n)\quad \int h_n\le \frac{\varepsilon}{M}\qquad (M:=\max f_1)$

(iii) $(\forall x\in Z)\quad \sup\limits_n h_n(x)\ge 1$

Uvažme fce $\boxed{f_n - M h_n}$. jsou nerostoucí všude

. $f_n\ge 0 \Rightarrow \int f_n\ge 0\ (\forall n)$. $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n(x)-M h_n(x))\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}^d$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty}(f_n(x)-M h_n(x))^+ = 0$

Dle Věty 3.1 (vi)

$$\lim_{n\to\infty}\int (f_n(x)-M h_n(x))^+ = 0,$$

což implikuje

$$\lim_{n\to\infty}\int (f_n(x)-M h_n(x)) \le 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \leq M \lim_{n\to\infty} \int h_n \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ $\{f-g\}_{n=1}^{\infty}$ je konstantní posloupnost, která je

(triviální) monotónní pro všechna x a

(triviální) $\lim_{n\to\infty} f(x)-g(x) = 0$ pro s.v. x.

Tedy dle právě dokázaného tvrzení $\left(\boxed{\text{Ad (i)}}\right)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int (f-g) = 0 \Rightarrow \int f = \int g$$

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ $0 \leq |g-f| = g-f$ s.v. $\Rightarrow$ $0 \leq \int |g-f| = \int g-f \Rightarrow$

$$\underset{\text{linearita}}{\Rightarrow} \int f \leq \int g.$$

Nyní dokážeme tvrz. (i) za předpokladu uvedených ve větě.

$\boxed{\text{Ad (i)}}$ $\boxed{\text{PODRUHÉ}}$

Definujme $\tilde{f}_n$ takto: $\tilde{f}_1 = f_1^+$

$\tilde{f}_i = \min\{f_i^+, \tilde{f}_{i-1}\}$

Pak není těžké ověřit, že

- $\tilde{f}_n$ je nerostoucí $\forall x \in \mathbb{R}^d$
- $\tilde{f}_n = f_n$ s.v.

$\Big\}$ $\overset{\text{Tvrzení (i) dokázané}}{\underset{\text{za silnějších předp.}}{\Longrightarrow}}$

$\lim \int \tilde{f}_n = 0$ a dle (ii): $\int \tilde{f}_n = \int f_n \Rightarrow$

$\lim \int f_n = 0$

$\blacksquare$

3.2 Prostory měřitelných a lebesgueovsky integrovatelných fcí M^+, L^+, M, L.

Definice • $\boxed{f \in M^+}$ (prostor měřitelných nezáporných funkcí)

$\stackrel{df.}{\equiv} \exists \{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$, $h_i \geq 0$ a $\underbrace{h_i \nearrow f \text{ s.v.}}$

(tzn. $\forall x \in \mathbb{R}^d - Z$: • $0 \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq \dots f(x)$

• $\lim_{i \to \infty} h_i(x) = f(x)$,

Z je množ. míry nula)

PROSTOR LEBESGUEOVSKY INTEGROVAT. NEZÁPORNÝCH FUNKCÍ • $\boxed{f \in L^+}$ $\stackrel{df}{\equiv}$ $f \in M^+$ a posloupnost $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ z definice prostoru M^+ navíc splňují: $\exists K > 0$ $\forall i \int h_i \leq K$.

Pro $f \in L^+$ definujeme Lebesgueův integrál takto:

$$\int f = \lim_{i \to \infty} \int h_i$$

[Povšimněme si, že $h_i \leq h_j \Rightarrow \int h_i \leq \int h_j \leq K$ pro $i < j$, $i, j \in \mathbb{N}$ lib. Tedy $\left\{\int h_i\right\}_{i=1}^{\infty}$ tvoří monotónní omezenou posloupnost čísel. Z MAF 1 víme, že limita takové posloupnosti vždy existuje.]

V následujících dvou větách budeme nejdříve zkoumat strukturální vlastnosti L^+ včetně nezávislosti definice integrálu na volbě posloupnosti $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$. Potom budeme zkoumat záměnu

$\int$ a limity.

Věta 3.3 Buď $f,g \in L^+$. Potom

(i) $f \le g$ s.v. $\Rightarrow \int f \le \int g$

(ii) $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$

(iii) $\int f$ nezávisí na volbě $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$

(iv) f je konečná s.v.

(v) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow \alpha f + \beta g \in L^+$ (to však neznamená, že L^+ je vektorový prostor. Proč?)

(vi) $\max\{f,g\} \in L^+$, $\min\{f,g\} \in L^+$.

Dk: K $f \in L^+$: $\exists h_i \ge 0, h_i \in H, h_i \nearrow f$ s.v. a $\exists K > 0$ $\forall i$ $\int h_i \le K$

K $g \in L^+$: $\exists l_i \ge 0, l_i \in H, l_i \nearrow g$ s.v. — " — $\int l_i \le K$

Ad (i) $h_i - l_j \searrow h_i - g$ $(j \to \infty)$
protože $f - g \le 0$, tak $h_i - g \le 0$ s.v. $(\forall i)$ $\Big\} \Rightarrow (h_i - l_j)^+ \searrow 0$ s.v. pro $j \to \infty$

$$\Rightarrow \int (h_i - l_j)^+ \to 0 \quad j \to \infty$$

Tedy $\lim_{j\to\infty} \int h_i - l_j \le 0 \Rightarrow \int h_i \le \lim_{j\to\infty} \int l_j = \int g$

$\downarrow i \to \infty$

$$\int f \le \int g$$

Ad (ii) plyne z (i) neboť $f = g$ s.v. $\Rightarrow f \ge g$ s.v. & $g \ge f$ s.v.

Ad (iii) Uvažujme dvě posloupnosti $\{h_i^1\}_{i=1}^{\infty}$ & $\{h_i^2\}_{i=1}^{\infty}$ tak, že $h_i^1 \nearrow f^1 = f$ a $h_i^2 \nearrow f^2 = f$

Pak $f_1 = f_2$ s.v. a dle (ii) $\int f_1 = \int f_2$

Ad (iv) $Z_1 := \{x \in \mathbb{R}^d;$ neplatí $h_i(x) \nearrow f(x)\}$ je mn. míry nula.
Definujme $Z_2 := \{x \in \mathbb{R}^d \setminus Z_1; f(x) = \infty\}$. Cílem je ukázat, že Z_2 je mn. míry nula. Definujme $H_i = \frac{\varepsilon}{K} h_i \in H$. Pak
(α) $H_i \ge 0$, (β) $(\forall i)$ $\int H_i = \frac{\varepsilon}{K} \int h_i \le \varepsilon$,
(γ) $\forall x \in Z_2$ $\sup_i H_i(x) \ge 1$ (neboť $h_i \nearrow \infty$ na Z_2).

Tedy Z_2 je dle "charakterizace mn. míry nula" mn. míry nula.

$\boxed{\text{Ad (v)}}$ Rozmyslete sami.

$\boxed{\text{Ad (vi)}}$ Označme $H_i = \max_x \{h_i, l_i\}$.

Protože $h_i, l_i \in \mathcal{H} \Rightarrow H_i \in \mathcal{H}$ dle Věty 3.1 (iv).

Navíc:
- $H_i \nearrow \max\{f, g\}$
- $(\forall i) \int \max\{f, g\} \leq 2K$

$\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{f, g\} \in \mathcal{L}^+$. ∎

$\boxed{\text{Věta 3.4}}$ (Limitní přechod v L^+)

Buď $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^+$, $f_n \nearrow f$ s.v. a $(\exists K)(\forall n \in \mathbb{N})$ $\int f_n \leq K$.

Pak

$$\int f = \left(\int \lim f_n\right) = \lim_{n\to\infty} \int f_n$$

tj. záměna limity a $\int$ platí.

Dk. $f_n \in L^+$: $\exists \{h_{nj}\}_{j=1}^{\infty}$, $h_{nj} \geq 0$, $h_{nj} \in H$, $h_{nj} \nearrow f_n$ s.v., tj $\int h_{nj} \leq K$

Definujme $H_j = \max\limits_{1\leq n\leq j} h_{nj} \in H$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
h_{11} & \leq & h_{12} & \leq & h_{13} & \leq & \cdots & \leq & h_{1j} & \leq \cdots & \leq f_1 \\
h_{21} & \leq & h_{22} & \leq & h_{23} & \leq & \cdots & \leq & h_{2j} & \leq \cdots & \leq f_2 \\
h_{31} & \leq & h_{32} & \leq & h_{33} & \leq & \cdots & \leq & h_{3j} & \leq \cdots & \leq f_3 \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & &
\end{array}$$

Zřejmě: $\overset{\in H}{H_j}$ je monotónní: $h^* = \lim\limits_{j\to\infty} H_j$ a tedy $\int h^* = \lim\limits_{j\to\infty} \int H_j$

Platí:

$$\left.\begin{array}{c}
h_{nj} \leq H_j \leq f_j \\
\big\downarrow{\scriptstyle j\to\infty} \\
f_n \leq h_* \leq f \\
\big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\
f \leq h_* \leq f
\end{array}\right\} \Rightarrow f = h_* \text{ (s.v.)}$$

Integrací:

$$\begin{array}{c}
\int h_{nj} \leq \int H_j \leq \int f_j \\
\big\downarrow{\scriptstyle j\to\infty} \\
\int f_n \leq \int f \leq \lim\limits_{j\to\infty} \int f_j \qquad (f = h_* \text{ s.v.}) \\
\big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty} \\
\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \leq \int f \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n
\end{array}$$

$\blacksquare$

Definice Buď $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\boxed{f \in L}$ (f je lebesgueovsky integrovatelná) $\equiv f^+, f^- \in L^+$

a

(L) $\int f \overset{df.}{=} \int f^+ - \int f^-$

Také $\boxed{f \in M}$ (f je lebesgueovsky měřitelná) $\equiv f^+, f^- \in M^+$

Poznámka (důležitá) Lze definovat "$f \in L$" také tak, že existují $f_1, f_2 \in L^+$: $f = f_1 - f_2$ s.v. a $\int f = \int f_1 - \int f_2$

Ukážeme, že definice nezávisí na rozkladu:

Máme: $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \Rightarrow f^+ + f_2 = f_1 + f^-$ s.v. a $f^+, f^-, f_1, f_2 \in L^+$

tedy: $\int f^+ + f_2 = \int f_1 + f^-$

$\Downarrow$

$\int f^+ - \int f^- = \int f_1 - \int f_2$

a oba rozklady dávají stejný výsledek.

$\boxed{\text{Věta}}$ 3.5 (Struktura fcí z L) Buď $f, g \in L$. Pak

(i) L je vektorový prostor a (L) $\int$ je aditivní, tj.

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \quad \alpha f + \beta g \in L \quad$ a $\quad \int \alpha f + \beta g = \alpha \int f + \beta \int g$

(ii)
- $f \geq g$ s.v. $\Rightarrow \int f \geq \int g$
- $f = g$ s.v. $\Rightarrow \int f = \int g$

(iii) Lebesgueův integrál je absolutně konvergentní: $|f| \in L$.

(iv) L je „svaz": $\max\{f, g\} \in L$, $\min\{f, g\} \in L$

(v) f je konečná s.v.

Dk $\boxed{\text{Ad (i)}}$ Přímo z definice plyne: je-li $f \in L$, pak $-f \in L$ (ovšem!) }
Také: je-li $\alpha > 0$ a $f \in L$, pak $\alpha f \in L$. } $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Odsud však plyne:

je-li $\alpha < 0$, pak $-\alpha > 0$, pak $-\alpha f \in L$

a pak $-(-\alpha f) = \alpha f \in L$.

Tedy L je lineární prostor.

Aditivita $(\mathcal{L})\int$: $f+g = f^+ - f^- + (g^+ - g^-) = (f+g)^+ - (f+g)^-$,

a $(f+g)^+ \in L^+$ a $(f+g)^- \in L^+$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ Protože $f^+ - f^- \geq g^+ - g^-$ s.v.

tak $f^+ + g^- \geq f^- + g^+$ s.v. & $f^+ + g^- \in L^+$, $f^- + g^+ \in L^+$

a tedy dle Věty 3.3 (i):

$$\int f^+ + \int g^- = \int f^+ + g^- \geq \int f^- + g^+ = \int f^- + \int g^+$$

Věta 3.3 (v)

což implikuje

$$\int f^+ - f^- = \int f^+ - \int f^- \geq \int g^+ - \int g^- = \int g^+ - g^-$$

$\boxed{\text{Ad (iii)}}$ plyne ze skutečnosti, že $|f| = f^+ + f^-$ a z definice. Dokázali jsme implikaci:

$$f \in L \implies |f| \in L.$$

$\boxed{\text{Ad (iv)}}$ $\max\{f, g\} = f + (g-f)^+$ (rozmyslí)

plyne ze vztahu

$\boxed{\text{Ad (v)}}$ plyne z Věty 3.3.: f^+, f^- jsou konečné až na mn. míry nula.

3.3 Věty o záměně integrálu a limity pro posloupnosti a řady funkcí a kritéria, kdy $\lim f_n \in L$

Věta 3.6 (Levi)

Buď $\left\{ \begin{array}{l} \cdot \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L \\ \cdot f_n \nearrow f \text{ s.v.} \\ \cdot (\exists k>0)\ \forall n \int |f_n| \leq K \end{array} \right\}$ Pak $\left(\int \lim f_n =\right) \int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$

Dk: Využijeme Větu 3.4. Definujme $g_n = f_n + f_1^-$.

Protože $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f$

tak $f_1 + f_1^- \leq f_2 + f_1^- \leq \dots \leq f + f_1^-$

Navíc $f_1 + f_1^- = f_1^+ - f_1^- + f_1^- = f_1^+ \geq 0$.

Tedy $\underline{g_n \geq 0}$ a $\underline{g_n \nearrow f + f_1^-}$ a $\underline{(\forall n) \int g_n \leq 2K}$

Dle Věty 3.4:

$$\underline{\int \lim f_n + \int f_1^-} = \int \lim_{n\to\infty} g_n = \lim_{n\to\infty} \int g_n = \underline{\lim_{n\to\infty} \int f_n + \int f_1^-}$$

a porovnáním podtržených výrazů dostáváme tvrzení.

Věta 3.7 (Levi pro řady)

$\left. \begin{array}{l} \cdot \{f_i\}_{i=1}^{\infty} \subset L,\ f_i \geq 0 \\ \cdot (\exists K>0)(\forall m) \int \sum_{i=1}^{m} f_i \leq K \end{array} \right\} \Rightarrow$ 1) $F := \sum_{i=1}^{\infty} f_i \in L$
2) $\int F = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_i$

Dk: Užijme Větu 3.6 na posloupnost částečných součtů:

$g_m := \sum_{i=1}^{m} f_i$. (Zřejmě: $\cdot\ g_m \in L \quad \forall m \in \mathbb{N}$
$\cdot\ g_m \nearrow F$
$\cdot\ (\exists k)(\forall m) \int g_m \leq K$

tedy $\int F = \lim \int g_m = \lim \sum_{i=1}^{m} \int f_i$

$\square$

Věta 3.8 (O obrácení výroku: "$f = 0$ s.v. $\Rightarrow \int f = 0$")

Je-li $f \in L$, $f \geq 0$ a $\int f = 0$, pak $f = 0$ s.v.

Dk Definujme $F_k = kf$ $\left(F_k(x) = kf(x) \quad k \in \mathbb{N}\right)$.

Zřejmě $F_k \geq 0$ s.v., neklesající s.v. a $\forall k \in \mathbb{N}$ $\int F_k = 0$

Tedy, dle Věty 3.4: $F_k \nearrow F$ a

$$\int F = \int \lim_{k\to\infty} F_k = \lim_{k\to\infty} \int F_k = \lim_{k\to\infty} k \int f = 0$$

Tedy $F \in L$, $\int F = 0$ a F je konečná s.v.

Uvažujme $M = \{x;\, f(x) > 0\}$. Pak $F(x) = \infty$ $\forall x \in M$.

Tedy M je množina míry nula. ■

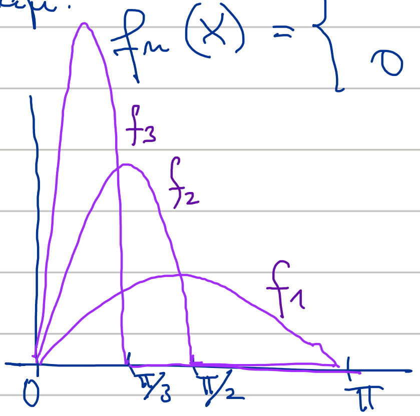
Věta 3.9 (Fatouovo lemma – kritérium garantující náležitost $\lim f_n$ do L)

$$\text{nechť} \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L,\ \boxed{f_n \geq 0} \\ \cdot\ f_n \to f \quad \text{s.v.} \\ \cdot\ (\exists K)(\forall n \in \mathbb{N}) \int f_n \leq K \end{array} \right\} \text{pak} \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ f \in L \\ \cdot\ \int f \leq K. \end{array} \right.$$

Pozorování Fatouovo lemma neříká nic o záměně $\lim\limits_{n\to\infty}$ a $\int$.

Záměna za předpokladů V.3.9. obecně NEPLATÍ. Uvažujme např.

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin nx & x \in \langle 0, \frac{\pi}{n} \rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}, \quad \text{pak}$$



- $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\int f_n = \int_0^{\pi/n} n \sin nx = \left[-\cos nx\right]_0^{\pi/n} = 2$
- $f = 0$, $f \in L$, $0 = \int f < \lim \int f_n = 2$.

Dk Věty 3.9 Definujme $F_k = \inf\{f_k, f_{k+1}, \dots\} \nearrow f$. Pak dle lemmatu musí platit $F_k \in L$. Navíc $\forall k \in \mathbb{N}$: $\int F_k \le K$.
Dle Leviho věty 3.6: $\int f = \lim\limits_{k\to\infty} \int F_k \le K$ a $f \in L$, což jsme chtěli ukázat. ■

Lemma (užitečné)

Pokud
$$\left.\begin{array}{l} f_k, g_k \in L,\ k \in \mathbb{N} \\ f_0, g_0 \in L \\ f_k \ge f_0,\ g_k \le g_0 \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \end{array}\right\} \text{ pak } \begin{array}{l} F = \inf\{f_1, f_2, \dots\} \in L \\ G = \sup\{g_1, g_2, \dots\} \in L \end{array}$$

Dk $G_k := \max\{g_1, \dots, g_k\} \in L$, $G_k \nearrow G \overset{\text{Levi}}{\Longrightarrow} G \in L$;
Protože $\inf\{f_1, \dots\} = -\sup\{-f_1, -f_2, \dots\}$. ■

Věta 3.10 (Lebesgueova – o integrovatelné majorantě)

Pokud
$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L \\ \bullet\ f_n \to f \text{ s.v.} \\ \bullet\ (\exists g \in L)(\forall n \in \mathbb{N})\ |f_n| \le g \end{array}\right\} \text{ pak } \left\{\begin{array}{l} \bullet\ f \in L \\ \bullet\ \int f = \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \end{array}\right.$$

Dk Definujme
$$F_k = \inf_x\{f_k, f_{k+1}, \dots\} \nearrow f \text{ s.v.}$$
$$G_k = \sup_x\{f_k, f_{k+1}, \dots\} \searrow f \text{ s.v.}$$

Pak
$$-g \le F_k \le f_k \le G_k \le g$$

Integrací
$$-\int g \le \int F_k \le \int f_k \le \int G_k \le g$$

Provedeme $\lim\limits_{k\to\infty}$ s tím, že $\{F_k\}$ a $\{G_k\}$ splňují předpoklady Leviho věty 3.6. Tedy $(k \to \infty)$
$$\int f \le \lim_{k\to\infty} \int f_k \le \int f,$$
což jsme chtěli ukázat. ■

Tvrzení (užitečné varianty Lebesgueovy věty)

(1) Nechť platí (i) a (ii) z Věty 3.10 a $\exists\, g, h \in L : h \le f_n \le g$, pak platí tvrzení věty 10.11.

(2) Nechť platí (i) a (ii) a $(\exists\, g \in L)$ $|f| \le g$. Pak $f \in L$.

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ jednoduché (sami)

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ Definujme $\tilde{f}_n = \max\{\min\{f_n, g\}, -g\}$ oříznutí fcí f_n se zdola $-g$ a se shora fcí g.

Pak $|\tilde{f}_n| \le g$ a $\tilde{f}_n \to f$ s.v.

Dle Věty 3.10 dostáváme, že $f \in L$. ■

$\boxed{\text{Příklady}}$ ① $f_n(x) = \chi_{[-n,n]} \operatorname{sgn} x$

Pak
- $f_n(x) \to \operatorname{sgn} x$
- $\int f_n = 0$
- $f_n \in L$

AVŠAK $f \notin L$

$f \in M$ ale f^+ a $f^- \notin L^+$

Stejné chování vykazuje oscilující $f_n(x) = \chi_{[-2\pi n, 2\pi n]} \sin x$

Ponaučení z příkladu ①:

(i) Ve Fatouově lemmatu nelze vynechat předpoklad $f_n \ge 0$.

(ii) Posloupnost $\{f_n\}$ nemá integrovatelnou majorantu.

② Koncentrace v bodě

$$f_n = \begin{cases} n & \text{na } \left(-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}\right) \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

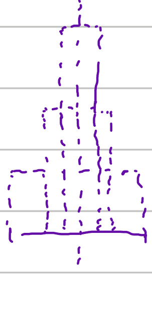
Pak
- $f_n \to 0$ s.v.
- $(\forall n)$ $\int f_n = 2a$

$\not\Rightarrow \int \lim f_n = \lim_{n\to\infty} \int f_n$

neboť

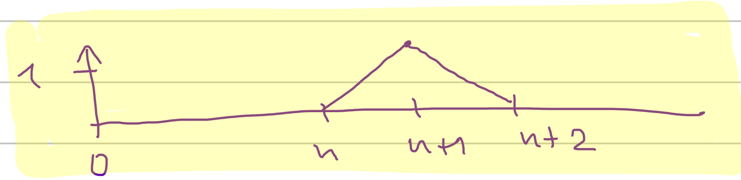
$$0 = \int \lim f_n < \lim \int f_n = 2a$$

Dle Fatouova lemmatu $0 \in L$, což je fajn, ale závěr neplatí: NEMÁM MAJORANTU ani MONOTÓNII



③ Únik hmoty do nekonečna

Buď f_n jako na obrázku:



Pak $0 \le f_n \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\int f_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$0 = \int \lim f_n < \lim \int f_n = 1$

Obecnější komentář:

OSCILACE, KONCENTRACE A ROZPTYL (DISPERSE) V NEKONEČNÉM PROSTORU jsou zajímavé komplikované jevy, kdy je třeba dávat pozor na zachovávání vlastností. Dalším důvodem jsou SKOKOVÉ NESPOJITOSTI (RÁZOVÉ VLNY).

nečiní komplikace u integrálu

④ $f_n = -\frac{1}{n}$ a $f_n \nearrow 0$ v $\mathbb{R}$, ale NEPLATÍ $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ neboť $f_n \notin L$.

⑤ Pomocí Leviho věty pro řady můžeme elegantně spočítat

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}$$

Platí:

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1} = \int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \int_0^\infty \sum_{n=1}^\infty xe^{-nx} \overset{\text{Levi}}{=} \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \underset{\downarrow\,1}{x}\,\underset{\downarrow\,-\frac{e^{-nx}}{n}}{e^{-nx}}$$

$$\underset{\text{per partes}}{=} \sum_{n=1}^\infty \left[-\frac{xe^{-nx}}{n} - \frac{e^{-nx}}{n^2}\right]_0^\infty = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Použití Leviho věty plyne z pozorování:

$$\int \sum_{n=1}^{k} xe^{-nx} \le \sum_{1}^{k} \int_0^\infty xe^{-nx} = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$