2. LAPLACEOVA TRANSFORMACE

Další transformací, kterou se budeme zabývat, je transformace Laplaceova. Laplaceova transformace je další výkonný nástroj na řešení ODR a PDR, zejména lineárních.

<u>Historie</u>: Integrální transformace jsou poprvé zavedeny v pracích Eulera (1763, 1769), který je použil pro řešení lineárních ODR 2. řádu. Laplace (1812) dává veškerý kredit Eulerovi; později Spitzer (1878) připojuje jméno Laplace k výrazu

$$y = \int_a^b e^{sx}\phi(s)\,ds$$

zavedený však Eulerem. Zde $y = y(x)$ se dosadí do ODR.

Rozšíření Laplaceovy transformace do $\mathbb{C}$ bylo provedeno Poincarém a Pincherlem, a znovu objeveno Petzvalem a rozšířeno pro funkce dvou proměnných Piccardem.

První aplikace moderní Laplaceovy transformace se objevilo v pracích Batemana (1910), který transformoval rovnice z Rutherfordovy práce o radioaktivním rozpadu

$$\frac{dP}{dt} = -\lambda P$$

pomocí $p(x) = \int_0^\infty e^{-xt} P(t)\,dt$ a dostal transformovanou rovnici. Bernstein (1920) použil výraz $f(s) = \int_0^\infty e^{-su}\phi(u)\,du$ ve svých pracích o Θ-funkcích. Doetsch (1920–1938) použil L.Tr. na diferenciální, integrální a integro-diferenciální rovnice.

Oliver Heaviside vyvinul "operační kalkul" v kontextu elektrického inženýrství. (Sepsal tří svazkovou práci Electromagnetic Theory 1894, 1899, 1912). Heavisideův kalkul nebyl úplně rigorózní, ale byl vnímán jako nesmírně užitečný nástroj pro řešení úloh elektro-inženýrství.

Bromwich byl jeden z těch, kteří se snažili vyvinout rigorózní teorii a objevil inverzní Laplaceovu transformaci

$$X(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{ts} x(s)\,ds.$$

Zde γ leží nalevo od všech singularit x.

<u>Zdroj</u>: Joel Schiff, The Laplace Transform, Springer, 1999.

$\boxed{\text{Definice}}$ Buď $A := \{ f \in \overset{\text{měřitelné}}{M}(0,\infty) ;\ \exists p \in \mathbb{C} \ \int_0^\infty |f(x)| e^{-\operatorname{Re} p\, x} dx < \infty \}$

Pak Laplaceova transformace $f \in A$ je definována předpisem

$$\mathcal{L}[f](p) := \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx$$

Pozorování (1) Laplaceova transformace je definována pro f definované na intervalu $(0,\infty)$. Často v aplikacích má tento interval význam časového intervalu. Dodefinujeme-li f nulou na $(-\infty,0)$ lze vyjádřit Laplaceovu transformaci (TRALA) pomocí Fourierovy transformace (TRAFO). Platí totiž

$$\underline{\mathcal{L}[f](p)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-\operatorname{Re} p\, x} e^{-i \operatorname{Im} p\, x} = \underline{(2\pi)^{1/2} \mathcal{F}[f(x) e^{-\operatorname{Re} p\, x}](-\operatorname{Im} p)}$$

Díky přítomnosti $e^{-\operatorname{Re} p\, x}$ je Lapl. transf. obecnější (viz příklady 1 a 2 níže). Fourierovu transformaci lze (neopak) užít pro f definované na $\mathbb{R}^d$.

Příklad (1) $(p \in \mathbb{R})$

$$\mathcal{L}[1](p) = \int_0^\infty e^{-px} dx = \left[\frac{-e^{-px}}{p} \right]_0^\infty = \frac{1}{p} \quad \text{pokud } p > 0.$$

(2) $(p \in \mathbb{R})$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha x}](p) = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)x} dx = \left[\frac{-e^{-(p-\alpha)x}}{p-\alpha} \right]_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha} \quad \text{pokud } \boxed{p > \alpha}$$

$\boxed{\text{Věta}}$ 2.1 Pro každé $f \in A$ existuje ! $c_f \in \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$ tak, že

$$\mathcal{D}_{\mathcal{L}[f]} = \{ z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > c_f \} \text{ a } \mathcal{D}_{\mathcal{L}[f]} \cap \{ z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z < c_f \} = \emptyset.$$

Definiční oblast

Navíc, množina $\{ z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z = c_f \}$ je buď celá v $\mathcal{D}_{\mathcal{L}[f]}$ nebo leží celá mimo $\mathcal{D}_{\mathcal{L}[f]}$.

Dk: Je-li $f \in A$, pak $\exists\, p \in \mathbb{C}$ tak, že $\int_0^\infty |f(x)| e^{-\operatorname{Re} p\, x} < \infty$.
Odsud plyne, že každé $z \in \mathbb{C}$ takové, že $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} p$ patří do $\mathcal{D}_{\mathcal{L}[f]}$.
Tedy celá přímka $\{ z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} p \}$ patří do $\mathcal{D}_{\mathcal{L}[f]}$.
Navíc, je-li $z \in \mathbb{C}$ takové, že $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} p$, pak

$$\left| \int_0^\infty f(x) e^{-zx} dx \right| \le \int_0^\infty |f(x)| e^{-\operatorname{Re} z\, x} = \int_0^\infty |f(x)| e^{-\operatorname{Re} p\, x} \underbrace{e^{-\overbrace{(\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} p)}^{>0} x}}_{\le 1} \le \int_0^\infty |f(x)| e^{-\operatorname{Re} p\, x} dx < \infty.$$

Tedy $\mathcal{D}_{\mathcal{L}[f]} \subset \{ z \in \mathbb{C} ;\ \operatorname{Re} z \geq \operatorname{Re} p \}$

Definujme nyní
$$c_f := \inf \left\{ \operatorname{Re} p ;\ \int_0^\infty |f(x)| e^{-\operatorname{Re} p\, x} dx < \infty \right\}.$$

Tvrzení Věty 2.1 je tak dokázáno.

$\boxed{\text{Věta 2.2}}$ ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI LAPLACEOVY TRANSFORMACE

Buď $f \in A$. Pak

(1) $\mathcal{L}[f] : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní na $\{ p \in \mathbb{C} ;\ \operatorname{Re} p > c_f \}$

(2) (i) $\left(\mathcal{L}[f](p) \right)^{(k)} = \mathcal{L}\left[(-x)^k f(x) \right](p)$

(ii) $\mathcal{L}[f^{(k)}](p) = p^k \mathcal{L}[f](p) - \sum_{j=0}^{k-1} p^j f^{(k-1-j)}(0)$

(3) $\mathcal{L} : A \to$ "množina zobrazení z $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$" je lineární a prosté

(4) (i) $\mathcal{L}[f](p) \to 0$ pro $\operatorname{Re} p \to +\infty$ a navíc stejnoměrně vzhledem k $\operatorname{Im} p$

(ii) $\forall \underbrace{\operatorname{Re} p}_{> c_f}$ pevné : $\mathcal{L}[f](p) \to 0$ pro $\operatorname{Im} p \to \pm\infty$.

(5) $\mathcal{L}\left[f(\alpha x) \right] = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}[f]\left(\frac{p}{\alpha} \right) \qquad (\alpha > 0)\ (\operatorname{Re} p > c_f)$

(6) Pro $a > 0$: $f_a(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ f(x-a) & x > a \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\cdot\ \mathcal{L}[f_a](p) = e^{-pa} \mathcal{L}[f](p)$

$(\alpha \in \mathbb{C})$ $\qquad \cdot\ \mathcal{L}\left[e^{\alpha x} f(x) \right](p) = \mathcal{L}[f](p-\alpha)$

(7) (i) $F(x) = \int_0^x f(s)\, ds \in A$

$c_F \leq c_f$ a $c_F \geq 0$

$\mathcal{L}[F](p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}[f](p)$

(ii) $F(x) = \int_0^{x} \left(\int_0^{x_1} \cdots \left(\int_0^{x_{k-1}} f(x_k)\, dx_k \right) dx_{k-1} \cdots \right) dx_1$

$\Rightarrow \mathcal{L}[F](p) = \frac{1}{p^k} \mathcal{L}[f](p).$

Dále také platí:

(8) $f\in A$, $\frac{f}{x}\in A \Rightarrow G(p) := -\mathcal{L}\left[\frac{f(x)}{x}\right](p)$ je primitivní k $\mathcal{L}[f](p)$ takovou, že $\lim_{\mathrm{Re}\,p\to\infty} G(p)=0$ kde

$\mathrm{Re}\,p > \max\{c_f, c_{\frac{f}{x}}\}$

(9)(i) $f_1,f_2\in A \Rightarrow$ • $f_1*f_2\in A$ kde

$$(f_1*f_2)(t) = \begin{cases}\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

• $c_{f_1*f_2} = \max\{c_{f_1}, c_{f_2}\}$

• $\mathcal{L}[f_1*f_2] = \mathcal{L}[f_1](p)\,\mathcal{L}[f_2](p)$.

(ii) $f_1,f_2\in A$ po částech hladké $\Rightarrow$ pro $p\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\,p > c_{f_1}+c_{f_2}$

$$\mathcal{L}[f_1f_2](p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\mathcal{L}[f_1](p-q)\,\mathcal{L}_2[f_2](q)\,dq$$

pro $\xi > (c_{f_1}, c_{f_2}-\mathrm{Re}\,p)$

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ Chceme ukázat (dle Věty 5.1 o Cauchy–Riemannových podmínkách) že $\mathcal{L}[f]:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ splňuje na $\{p\in\mathbb{C};\ \mathrm{Re}\,p>c_f\}$ C-R podmínky:

tj. pro každé $p=\xi+i\eta$ $(\xi>c_f)$ platí. $\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,\mathcal{L}[f](p)}{\partial\xi} = \frac{\partial\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}[f](p)}{\partial\eta}$

. $\frac{\partial\,\mathrm{Im}\,\mathcal{L}[f](p)}{\partial\xi} = -\frac{\partial\,\mathrm{Re}\,\mathcal{L}[f](p)}{\partial\eta}$

a navíc $\mathcal{L}[f](\xi,\eta)$ musí být diferencovatelné jako funkce z $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$.

Avšak: $\frac{\partial}{\partial\xi}\mathcal{L}[f](p) = \frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\infty f(x)e^{-(\xi+i\eta)x}dx = -\int_0^\infty x f(x)e^{-(\xi+i\eta)x}$

a $\frac{\partial}{\partial\eta}\mathcal{L}[f](p) = \frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^\infty f(x)e^{-(\xi+i\eta)x}dx = -i\int_0^\infty xf(x)e^{-(\xi+i\eta)x}dx$

Tedy $\frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{Re}\,\mathcal{L}[f](p) = -\int_0^\infty x f(x)e^{-\xi x}\cos\eta x\,dx = -\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^\infty f(x)e^{-\xi x}\sin\eta x\,dx$

$= \frac{\partial}{\partial\eta}\mathrm{Im}\,\mathcal{L}[f](p)$

a

podobně $\frac{\partial}{\partial\xi}\mathrm{Im}\,\mathcal{L}[f](p) = \frac{\partial}{\partial\xi}\left[-\int_0^\infty f(x)e^{-\xi x}\sin\eta x\right] = +\int_0^\infty x f(x)e^{-\xi x}\sin\eta x$

$= \frac{\partial}{\partial\eta}-\int_0^\infty f(x)e^{-\xi x}\cos\eta x$

$= -\frac{\partial}{\partial\eta}\mathrm{Re}\,\mathcal{L}[f](p)$.

Zbývá ověřit diferencovatelnost.

Avšak pro lib. $p=\xi+i\eta$ $(\mathrm{Re}\,p=\xi>c_f)$ víme, že $\int_0^\infty |f(x)|e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}dx<\infty$.

Pak po derivaci integrandu máme:

$|f(x)e^{-(\xi+i\eta)x}x| = x|f(x)|e^{-\xi x} = \underbrace{|f(x)|e^{-(\xi-\varepsilon)x}}_{\in L^1(0,\infty)}\ \underline{xe^{-\varepsilon x}}$ je omezená na $(0,\infty)$ pro dostatečně malá $\varepsilon>0$.

Našli jsme tedy majorantu pro "zderivovanou" funkci a zámenu derivace a integrálu lze provést.

Zároveň jsme ukázali, že platí

$$\left(\mathcal{L}[f]\right)'(p) = \mathcal{L}[-xf(x)](p), \qquad (V1)$$

$\boxed{\text{Ad (2)}}\boxed{(i)}$ Pro $k=1$ je to právě vzorec (V1). Pro $k>1$ dokážeme tvrzení analogicky.

$\boxed{ii}$ Pro $k=1$ máme

$$\mathcal{L}[f'](p) = \int_0^\infty f'(x)e^{-px}dx \underset{\text{per partes}}{=} p\int_0^\infty f(x)e^{-px}dx - \left[f(x)e^{-px}\right]_0^\infty$$

$$= p\,\mathcal{L}[f](p) - f(0)$$

Pro $k>1$ indukcí.

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ Pro $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ a $f_1,f_2\in A$ platí

$$\mathcal{L}[\alpha f_1+\beta f_2](p) = \int_0^\infty[\alpha f_1(x)+\beta f_2(x)]e^{-px}dx = \alpha\int_0^\infty f_1(x)e^{-px}dx + \beta\int_0^\infty f_2(x)e^{-px}dx$$

$$= \alpha\,\mathcal{L}[f_1](p) + \beta\,\mathcal{L}[f_2](p)$$

což je <u>linearita</u> Laplaceovy transformace.

Díky linearitě stačí po ověření, že $\boxed{\mathcal{L}[\cdot] \text{ je prosté zobrazení}}$, ukázat, že $\boxed{\mathcal{L}[f]=0 \Rightarrow f=0}$

To není hned zřejmé. Použijeme si Důsledek Tvrzení 2 na konci minulé kapitoly. Víme

$$0 = \mathcal{L}[f](p) = \int_0^\infty f(x)e^{-\operatorname{Re}p\,x}e^{i(-\operatorname{Im}p)x}dx = (2\pi)^{d/2}\mathcal{F}\left[f(x)e^{-\operatorname{Re}p\,x}\right](-\operatorname{Im}p)$$

a tedy dle Tvrzení 2 a jeho důsledku

$$\underset{\text{s.v. v } (0,\infty)}{f(x)e^{-\operatorname{Re}p\,x}=0} \Rightarrow f(x)=0 \text{ pro s.v. } x\in(0,\infty). \quad \square$$

$\boxed{\text{Ad (4)}}$ (i) $$|\mathcal{L}[f](p)| = \left|\int_0^\infty f(x)e^{-\operatorname{Re}p\,x}e^{-i\operatorname{Im}p\,x}dx\right| \leq \int_0^\infty |f(x)|e^{-\operatorname{Re}p\,x}dx \xrightarrow[\operatorname{Re}p\to\infty]{} 0.$$

a navíc stejnoměrně vzhledem k $\operatorname{Im}p$.

(ii) Plyne z Věty 1.2 (iii) a z přepisu Lapl. transformace pomocí Four. transformace.

Ad (5) $\mathcal{L}[f(\alpha x)](p) = \int_0^\infty f(\underbrace{\alpha x}_{y})\, e^{-px}\,dx \underset{\substack{y=\alpha x\\ dy=\alpha\, dx}}{=} \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(y)\, e^{-\frac{p}{\alpha}y}\,dy = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}[f]\left(\frac{p}{\alpha}\right)$,

což platí pro $\alpha>0$ a $\mathrm{Re}\,p > c_f$.

Ad (6) $\mathcal{L}[f_a](p) = \int_0^\infty f_a(x)\, e^{-px}\,dx = \int_a^\infty f(x-a)\, e^{-px}\,dx \underset{\substack{y=x-a\\ dy=dx}}{=} e^{-ax}\int_0^\infty f(y)\, e^{-py}\,dy = e^{-ax}\mathcal{L}[f](p)$

f_a je nenulové pro $x \geq a$

Také $\mathcal{L}[e^{\alpha x} f(x)](p) = \int_0^\infty f(x)\, e^{-(p-\alpha)x}\,dx = \mathcal{L}[f](p-\alpha)$

$\alpha \in \mathbb{C}$

$\mathrm{Re}\,p > c_f + \mathrm{Re}\,\alpha$

Ad (7) Nejdříve ukážeme, že platí implikace: $\boxed{\text{je-li } f\in A \text{ pak } F\in A}$ neboli $\boxed{\int_0^\infty |f(x)|\, e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}\,dx < \infty}$ implikuje $\boxed{\int_0^\infty |F(x)|\, e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}\,dx < \infty.}$

Připomeň $F(x) := \int_0^x f(s)\,ds.$

Dk implikace

$$\int_0^\infty |F(x)|\, e^{-\mathrm{Re}\,p\,x} = \int_0^\infty \left|\int_0^x f(s)\,ds\right| e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}\,dx \le \int_0^\infty \int_0^x |f(s)|\,dx\; e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}\,dx$$

$|f(x)|$ $\qquad -\frac{e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}}{\mathrm{Re}\,p}$

$$\underset{\text{per partes}}{\overset{\text{integrace}}{=}} \frac{1}{\mathrm{Re}\,p}\int_0^\infty |f(x)|\, e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}\,dx + \left[\int_0^x |f(s)|\,ds\, \frac{e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}}{\mathrm{Re}\,p}\right]_0^\infty$$

$$\le \frac{1}{|\mathrm{Re}\,p|}\int_0^\infty |f(x)|\, e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}\,dx + \frac{1}{|\mathrm{Re}\,p|}\int_0^x |f(s)|\,ds\; e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}$$

$$= \text{—''—} + \frac{1}{|\mathrm{Re}\,p|}\int_0^x |f(s)|\, e^{-\mathrm{Re}\,p\,s}\underbrace{e^{\mathrm{Re}\,p\,s}}_{\le e^{\mathrm{Re}\,p\,x} \text{ na } (0,\infty)}\,ds\; e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}$$

$$\le \frac{2}{|\mathrm{Re}\,p|}\int_0^\infty |f(x)|\, e^{-\mathrm{Re}\,p\,x}\,dx$$

(pro $\mathrm{Re}\,p \neq 0$; pokud $\mathrm{Re}\,p = 0$, pak je důkaz přímý a jednodušší)

Z dokázané implikace plyne nejen $\boxed{F\in A}$, ale také $\boxed{c_F \le c_f}$.

Nyní aplikujeme $\boxed{(2)(i)}$ na $F' = f$, což implikuje

$$\mathcal{L}[f](p) = \mathcal{L}[F'](p) = p\,\mathcal{L}[F](p) - \underset{0}{F(0)} = p\,\mathcal{L}[F](p),$$

tedy $\boxed{\mathcal{L}[F](p) = \frac{\mathcal{L}[f](p)}{p}}$, což jsme chtěli ukázat.

Tvrzení (7),(ii) plyne z (7)(i).

$\boxed{\text{Ad (8)}}$ Dle (1) jsou $\mathcal{L}[f(x)]$ a $\mathcal{L}[\frac{f(x)}{x}]$ holomorfní v polorovině $\{p \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_{\frac{f}{x}}\}\}$. Pro libovolná ~~p~~ taková p, která leží na reálné ose (tj. pro $p = \operatorname{Re} p > \max\{c_f, c_{\frac{f}{x}}\}$) máme (dle věty o derivování $\int$ podle parametru) pro

$G(p) := -\mathcal{L}[\frac{f(x)}{x}](p)$:

$$\underline{G'(p)} = \left(-\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} e^{-px} dx\right)' = \frac{d}{dp}\left(-\int_0^\infty \frac{f(x)}{x} e^{-px} dx\right) = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx = \underline{\mathcal{L}[f](p)}$$

(derivace dle reálného parametru)

Protože $G'(p)$ a $\mathcal{L}[f](p)$ jsou holomorfní a splňují vztah $G'(p) = \mathcal{L}[f](p)$ pro reálná p, z Věty o jednoznačnosti holomorfních funkcí plyne, že $\left(-\mathcal{L}[\frac{f(x)}{x}](p)\right)' = \mathcal{L}[f](p)$ na průniku def. oborů obou Laplaceových transformací.

$\boxed{\text{Ad (9)(i)}}$ Připomeňme si nejdříve, že v teorii Laplaceovy transformace ztotožňujeme $f \in L^1(0,\infty)$ s $\tilde{f} \in L^1(\mathbb{R})$, kde

$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$ Tedy $(f_1 * f_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-s) f_2(s)\, ds = \begin{cases} \int_0^t f_1(t-s) f_2(s)\, ds & \text{pro } t > 0 \\ 0 & \text{pro } t \leq 0. \end{cases}$

Dále: pokud $\underline{f_1(x) e^{-cx} \in L^1}$ a $\underline{f_2(x) e^{-cx} \in L^1}$, pak dle Věty 1.1 o konvoluci víme, že $\underline{f_1(x) e^{-cx} * f_2(x) e^{-cx} \in L^1}$. My však potřebujeme ukázat, že $\underline{(f_1 * f_2)(x) e^{-cx} \in L^1}$

To však plyne z následující rovnosti:

$$LS := \left(f_1(x) e^{-cx}\right) * \left(f_2(x) e^{-cx}\right)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y) e^{-c(x-y)} f_2(y) e^{-cy}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) f_2(y)\, dy\, e^{-cx} = (f_1 * f_2)(x) e^{-cx} =: RS$$

Protože $LS \in L^1$, tak $RS \in L^1$, což jsme chtěli ukázat.

Víme tedy, že $f_1, f_2 \in A \Rightarrow (f_1 * f_2) \in A$.

Zbývá ověřit platnost vzorečku přímým výpočtem. Platí:

$$\mathcal{L}[f_1 * f_2](p) = \int_0^\infty (f_1 * f_2)(x) e^{-px} dx = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y) f_2(y) dy\, e^{-px} dx$$

rozšíření 0 na $(0, +\infty)$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-y) e^{-px} f_2(y)\, dy\, dx$$

$$\underset{\substack{z = x-y \\ dz = dx}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(z) f_2(y) e^{-py} e^{-pz} dy\, dz$$

$$= \mathcal{L}[f_2](p)\, \mathcal{L}[f_1](p).$$

$\boxed{\text{Ad } 9 \text{ (ii)}}$ Výpočet (důkaz) povedeme převodem na Fourierovu transformaci. Platí:

$$\mathcal{L}[f_1(t) f_2(t)](p) = (2\pi)^{1/2} \mathcal{F}[f_1(t) f_2(t) e^{-(\mathrm{Re}\, p)t}](-\mathrm{Im}\, p)$$

$$= (2\pi)^{1/2} \mathcal{F}[f_1(t) e^{-\xi t} f_2(t) e^{-(\mathrm{Re}\, p - \xi)t}](-\mathrm{Im}\, p)$$

kde $\xi > c_{f_1}$ a zároveň platí $\mathrm{Re}\, p - \xi > c_{f_2}$, tedy $\xi \in (c_{f_1}, c_{f_2} - \mathrm{Re}\, p)$, přičemž $p \in \mathbb{C}$ splňuje $\mathrm{Re}\, p > c_{f_1} + c_{f_2}$.

Využijeme-li vzorec $\mathcal{F}[g_1(t) g_2(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}[g_1(t)] * \mathcal{F}[g_2(t)]$ dostáváme

$$\mathcal{L}[f_1(t) f_2(t)](p) = \mathcal{F}[f_1(t) e^{-\xi t}] * \mathcal{F}[f_2(t) e^{-(\mathrm{Re}\, p - \xi)t}](-\mathrm{Im}\, p)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}[f_1(t) e^{-\xi t}](s)\, \mathcal{F}[f_2(t) e^{-(\mathrm{Re}\, p - \xi)t}](-\mathrm{Im}\, p - s)\, ds$$

(přechod od $\mathcal{F}$ k $\mathcal{L}$)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}[f_1(t)](\xi - is)\, \mathcal{F}[f_2(t)]\underbrace{(\mathrm{Re}\, p - \xi + i(\mathrm{Im}\, p + s))}_{p - (\xi - is)} ds =$$

Substituce $q = \xi - is$, $dq = -i\, ds$;

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\xi + i\infty}^{\xi - i\infty} \mathcal{L}[f_1(t)](q)\, \mathcal{L}[f_2(t)](p-q)\, dq$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \mathcal{L}[f_1(t)](q)\, \mathcal{L}[f_2(t)](p-q)\, dq.$$

Důkaz věty 2.2 je dokončen. ☐

Nyní spočítáme několik příkladů.

Př. ③ Spočtěte Laplaceovu transformaci funkce $t^m e^{\alpha t}$.

Řešení: $\mathcal{L}[t^m e^{\alpha t}](p) = \int_0^\infty t^m e^{-(p-\alpha)t}\,dt \underset{\uparrow}{=} \frac{m}{p-\alpha}\int_0^\infty t^{m-1} e^{-(p-\alpha)t}\,dt$

$\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha$ (per partes)

$\overset{=}{(m-1)\times} \underline{\underline{\frac{m!}{(p-\alpha)^{m+1}}}}$

Speciálně: $\mathcal{L}[t^m](p) = \frac{m!}{p^{m+1}}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$

$\mathcal{L}[1](p) = \frac{1}{p}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$

$\mathcal{L}[e^{\alpha t}](p) = \frac{1}{p-\alpha}$ $(\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}\alpha)$.

Př. ④ Najděte řešení poč. úlohy
$$\boxed{\begin{aligned} y'(t) &= -\lambda y(t) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned} &\lambda > 0 \\ &y_0 \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

POČ. PODMÍNKA $\rightarrow$ ÚLOHA; DATA

Řeš. Použiji Lapl. transformaci a zavedu označení $Y(p) := \mathcal{L}[y](p) = \mathcal{L}[y(t)](p)$

Protože $\mathcal{L}[y'(t)](p) = pY(p) - y(0)$, dostáváme
$$pY(p) - y_0 = -\lambda Y(p) \iff Y(p) = \frac{y_0}{p+\lambda}$$

Protože dle př. ③: $\mathcal{L}[y_0 e^{-\lambda t}](p) = \frac{y_0}{p+\lambda}$

a dle našeho výpočtu: $\mathcal{L}[y(t)](p) = \frac{y_0}{p+\lambda}$

a protože je Lapl. transformace jednoznačné (prosté) zobrazení,

tak $\boxed{y(t) = y_0 e^{-\lambda t}}$

Přímým důsledkem příkladu ③, linearity Laplaceovy transformace a skutečnosti, že Laplaceova transformace je prosté zobrazení, je následující věta.

$\boxed{\text{Věta 2.3}}$ (O vzorech racionálních funkcí)

Buď $\mathcal{M}$ množina konečných lineárních kombinací funkcí typu $t^m e^{\alpha t}$, kde $m \in \mathbb{N}_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, tj. $\mathcal{M} = \operatorname{span}\{t^m e^{\alpha t}\}_{m \in \mathbb{N}_0}^{\alpha \in \mathbb{C}}$.

Pak
- $\mathcal{M} \subset A$
- $\mathcal{L} : \mathcal{M} \xrightarrow{\text{na}} \mathcal{N}$, kde $\mathcal{N} := \left\{ R;\ R(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},\ P, Q \text{ polynomy},\ \text{st} P < \text{st} Q. \right\}$

Podrobněji:

$\boxed{\mathcal{L} : \mathcal{M} \text{ do } \mathcal{N}}$ $\mathcal{L}: f(t) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\nu_j} a_{jn} t^{n-1} e^{p_j t} \longmapsto \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\nu_j} a_{jn} \frac{(n-1)!}{(p-p_j)^n}$

(plyne z linearity a Př. 3)

Obráceně

$\boxed{\mathcal{L}^{-1} : \mathcal{N} \text{ do } \mathcal{M}}$ $\mathcal{L}^{-1}: R(p) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\nu_j} a_{jn} \frac{1}{(p-p_j)^n} \longmapsto \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\nu_j} a_{jn} \frac{t^{n-1} e^{p_j t}}{(n-1)!}$

(plyne z prostoty $\mathcal{L}$, linearity $\mathcal{L}$, Př. 3).

Dk: Viz komentář před zněním věty

Příklad 5 Z příkladu 3, speciálně, plyne $\mathcal{L}[e^{i\omega t}] = \frac{1}{p - i\omega}$ pro $\operatorname{Re} p > -\operatorname{Im}\omega$

a $\mathcal{L}[e^{-i\omega t}] = \frac{1}{p + i\omega}$ pro $\operatorname{Re} p > \operatorname{Im}\omega$

Odtud plyne

▷ $\mathcal{L}[\cos \omega t](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}\right](p) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$,

▷ $\mathcal{L}[\sin \omega t](p) = \mathcal{L}\left[\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}\right](p) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$,

pro $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im}\omega|$.

Příklad 6 $F_1(p) := \int_0^T e^{-pt} f(t)\,dt$, kde f je periodická s periodou T.

Ukažte, že pak $\mathcal{L}[f(t)](p) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}}$.

Dk
$$\mathcal{L}[f(t)](p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\,dt = \int_0^T f(t) e^{-pt}\,dt + \int_T^\infty f(t) e^{-pt}\,dt$$
substituce $t = T + \tau$
$$= F_1(p) + e^{-pT} \int_0^\infty f(\tau + T) e^{-p\tau}\,d\tau$$
$$= F_1(p) + e^{-pT} \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau}\,d\tau = F_1(p) + e^{-pT} \mathcal{L}[f(t)](p),$$

f je T periodická

což implikuje tvrzení.

Příklad (7) Spočtěte $\mathcal{L}[\sin^2\omega t](p)$.

Řešení: Použijeme vzorec pro derivaci f : $\mathcal{L}[f'(t)](p) = p\mathcal{L}[f(t)](p) - f(0)$ pro $f(t) = \sin^2\omega t$. Pak $f'(t) = 2\omega\sin\omega t\cos\omega t = \omega\sin 2\omega t$ a $f(0)=0$. Tedy

$$\mathcal{L}[\sin^2\omega t](p) = \frac{\omega}{p}\mathcal{L}[\sin 2\omega t] \underset{\text{Př. (5)}}{=} \underline{\underline{\frac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}}}$$

Př. (8) Ukažte, že platí:

$$\mathcal{L}[\sinh\alpha t](p) = \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2} \qquad \alpha\in\mathbb{C}, \ \operatorname{Re}p > |\operatorname{Re}\alpha|$$

$$\mathcal{L}[\cosh\alpha t](p) = \frac{p}{p^2-\alpha}$$

Návod: užijte definici sinh, cosh, linearitu; viz též příklad (5)

Př. (9) Podobně jako v Př. (5) s použitím Př. (3) ukažte (ověřte), platnost vztahů

$$\mathcal{L}[t^n\sin\omega t](p) = \frac{1}{2i}\, n!\, \frac{(p+i\omega)^{n+1}-(p-i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}} \quad \text{pro } \operatorname{Re}p > |\operatorname{Im}\omega|$$

$$\mathcal{L}[t^n\cos\omega t](p) = \frac{1}{2}\, n!\, \frac{(p+i\omega)^{n+1}+(p-i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}} \quad \text{pro } \operatorname{Re}p > |\operatorname{Im}\omega|$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\sin\omega t](p) = \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2} \quad \text{pro } \operatorname{Re}p > |\operatorname{Im}\omega|$$

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\cos\omega t](p) = \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2} \quad \text{pro } \operatorname{Re}p > |\operatorname{Im}\omega|$$

Poznámka: Lze též využít vlastnost

$f(t)$	parametry	$\mathcal{L}(f)(p)$	definiční obor $\mathcal{L}(f)(p)$
1		$\frac{1}{p}$	$\{\operatorname{Re}p > 0\}$
t^ν	$\nu\in(-1,+\infty)$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}}$	$\{\operatorname{Re}p > 0\}$
t^n	$n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\{\operatorname{Re}p > 0\}$
$e^{\alpha t}$	$\alpha\in\mathbb{C}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$\{\operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\alpha\}$
$\sin(\omega t)$	$\omega\in\mathbb{C}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\{\operatorname{Re}p > \vert\operatorname{Im}\omega\vert\}$
$\cos(\omega t)$	$\omega\in\mathbb{C}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\{\operatorname{Re}p > \vert\operatorname{Im}\omega\vert\}$
$\sinh(\alpha t)$	$\alpha\in\mathbb{C}$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\{\operatorname{Re}p > \vert\operatorname{Re}\alpha\vert\}$
$\cosh(\alpha t)$	$\alpha\in\mathbb{C}$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$	$\{\operatorname{Re}p > \vert\operatorname{Re}\alpha\vert\}$
$t^n e^{\alpha t}$	$n\in\mathbb{N},\ \alpha\in\mathbb{C}$	$\frac{n!}{(p-\alpha)^{n+1}}$	$\{\operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\alpha\}$
$t^n\sin(\omega t)$	$n\in\mathbb{N},\ \omega\in\mathbb{C}$	$\frac{1}{2i}n!\frac{(p+i\omega)^{n+1}-(p-i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$	$\{\operatorname{Re}p > \vert\operatorname{Im}\omega\vert\}$
$t^n\cos(\omega t)$	$n\in\mathbb{N},\ \omega\in\mathbb{C}$	$\frac{1}{2}n!\frac{(p+i\omega)^{n+1}+(p-i\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$	$\{\operatorname{Re}p > \vert\operatorname{Im}\omega\vert\}$
$e^{\alpha t}\sin(\omega t)$	$\alpha\in\mathbb{C},\ \omega\in\mathbb{C}$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	$\{\operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\alpha + \vert\operatorname{Im}\omega\vert\}$
$e^{\alpha t}\cos(\omega t)$	$\alpha\in\mathbb{C},\ \omega\in\mathbb{C}$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	$\{\operatorname{Re}p > \operatorname{Re}\alpha + \vert\operatorname{Im}\omega\vert\}$
$\frac{\sin(\omega t)}{t}$	$\omega\in\mathbb{C}, \operatorname{Re}\omega\neq 0$	$\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}(\operatorname{Re}\omega) - \arctan(\frac{p}{\omega})$	$\{\operatorname{Re}p > \vert\operatorname{Im}\omega\vert\}$

VYSTŘIHNUTO Z ČERNÝ, POKORNÝ: MAF V, str. 29.

Příklady 10 Na $(0,+\infty)$ vyřešte úlohu
$$\boxed{\begin{gathered} y'''' + 2y'' + y = 0 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,\ y'''(0) = 1 \end{gathered}}$$

Řešení: provedeno na přednášce, viz Černý + Pokorný, MAF V str. 32.

11 Na $(0,+\infty)$ najděte řešení úlohy
$$\boxed{\begin{gathered} y'''' + 2y'' + y = e^{\alpha t} \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0 \end{gathered}}$$

Řešení: Černý + Pokorný, MAF V, str. 33.

12 Na $(0,+\infty)$ vyřešte úlohu
$$\boxed{\begin{gathered} y'' + ty' - 2y = 4 \\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0 \end{gathered}}$$

Řešení Označme $Y(p) := \mathcal{L}[y(t)](p)$ a povšimněme si, že
$$\mathcal{L}[ty'(t)](p) = \int_0^\infty t y'(t) e^{-pt}\,dt = -\frac{d}{dp}\left(\int_0^\infty y'(t) e^{-pt}\,dt\right)$$
$$= -\frac{d}{dp}\left(\mathcal{L}[y'(t)](p)\right) = -\frac{d}{dp}\left(pY(p) - y(0)\right) =$$
$$= -Y(p) - pY'(p).$$

Protože $\mathcal{L}[y''(t)](p) = p^2 Y(p) - y'(0) - py(0) = p^2 Y(p) + p$

a $\mathcal{L}[4](p) = 4\mathcal{L}[1](p) = \frac{4}{p}$,

dostáváme, použitím Laplaceovy transf. na naši úlohu,
$$Y'(p) + \left(\frac{3}{p} - p\right) Y(p) = -\frac{4}{p^2} + 1$$

Integrační faktor pro tuto ODR je $e^{3\ln p - \frac{p^2}{2}} = p^3 e^{-\frac{p^2}{2}}$.

Tedy
$$\left(Y(p)\, p^3 e^{-\frac{p^2}{2}}\right)' = -4pe^{-\frac{p^2}{2}} + p^3 e^{-\frac{p^2}{2}}$$

Metodami mateřské školky zjistíme
$$Y(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{1}{p} + \frac{C}{p^3} e^{p^2/2}$$

Protože $Y(p) \to 0$ pro $p \to +\infty$ (vlastnost Lapl. transf.)

tak $C = 0$. Pomocí tabulky
$$\boxed{y(t) = t^2 - 1}$$

Věta 2.4 (O bodové pomoci pro Laplaceovu transformaci)

Buď $f \in A$ po částech spojitě diferencovatelná. Pak pro $p \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\, p > c_f$ a pro $\xi > c_f$ platí:

$$\frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}\, dp$$

Definice tohoto objektu vyplyne z důkazu věty.

Vztah platí pro $x > 0$. Je-li $x_0 = 0$, pak $f(0-) = 0$ a vztah platí.
Je-li $x = 0$, pak $LS = 0$.

Dk. Uvažme nejdříve $\to p = \xi + i\eta$, $\xi = \mathrm{Re}\, p > c_f$

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-\xi x} f(x)\, e^{-i\eta x}\, dx = \mathcal{F}\left[\sqrt{2\pi}\, e^{-\xi x} f(x)\right](-\eta) =: F_\xi(\eta)$$

Z (nedokázaného) Tvrzení 1 kapitoly 1 plyne:

$$\frac{1}{2}\left[g(x+) + g(x-)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[\mathcal{F}[g]\right](x)$$

Uvažujme $g(x) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi x} f(x)$ a povšimněme si, že předpoklady Tvrzení 1 plynou z toho, že f je po částech spojitě diferencovatelná.

Tedy

$$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\, e^{-\xi x}\left[f(x+) + f(x-)\right] = \mathcal{F}^{-1}\left[F_\xi(-\eta)\right](x)$$

neboť dosazuji F_ξ za $\mathcal{F}[g](\eta)$

neboli

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\xi x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_\xi(\eta)\, e^{-ix\eta}\, d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left[\sqrt{2\pi}\, e^{-\xi x} f(x)\right](\eta)\, e^{(\xi - i\eta)x}\, d\eta$$

$\eta' = -\eta$, $d\eta' = -d\eta$, $\eta' \in (+\infty, -\infty)$ $(\eta = \eta')$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\mathcal{F}\left[\sqrt{2\pi}\, e^{-\xi x} f(x)\right](-\eta)}_{\mathcal{L}[f](p)}\, \underbrace{e^{(\xi + i\eta)x}}_{e^{px}}\, d\eta$$

Parametrizace $p = \xi + i\eta$, dostáváme vztah mezi těmito členy

$$\overset{\text{OZN}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}\, dp$$

$\boxed{\text{Je-li } \xi' \neq \mathrm{Re}\, p \text{ avšak } \xi' > c_f, \text{ pak porovnáme } \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \dots \text{ s } \int_{\xi' - i\infty}^{\xi' + i\infty} \dots \text{ pomocí Cauchyho věty. Zde } \dots \text{ stojí pro } \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}.}$

Terminologie: $\frac{1}{2\pi}\int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}\, dx$ se nazývá Fourier-Mellinova transformace

Přímka $\{z \in \mathbb{C}\,;\, z = \xi + i\eta,\ \eta \in (-\infty, +\infty)\}$ se nazývá BROMWICHOVA PŘÍMKA.

Důsledek Věty 2.4. Je-li $f \in A \cap C([0,\infty))$, $f(0)=0$. Pak

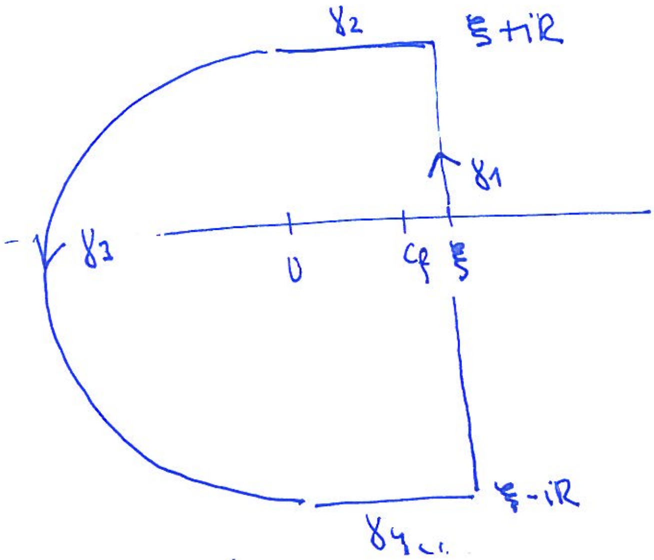
(IL) $$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}\, dp}$$ kde $\xi > c_f$, $\operatorname{Re} p > c_f$.

Zkusme $\underbrace{\text{Laplaceovu}}_{}$ inverzní transformaci (IL) spočítat za předpokladu, že:

(L1) $\mathcal{L}[f](p)$ má konečně mnoho pólů v $\{p \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} p \leq c_f\}$:
označme je $z_1, z_2, \dots, z_N$;

(L2) $\exists R_0 > 0$ $\exists q > 0$ $\exists M > 0$: $\left|\mathcal{L}[f](p)\right| \leq \dfrac{M}{|p|^q}$ $\forall p \in \mathbb{C}$, $|p| \geq R_0$.

K výpočtu (IL) použijeme Residuovou větu,
kde integrujeme podél křivky zobrazené na obrázku:



Pak, pro dostatečně velké R, platí:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4} \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}\, dp = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{res}_{z_k} \left(\mathcal{L}[f](p)\, e^{px} \right)$$

Vyšetřujme nyní chování $\int_{\gamma_i} \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}\, dp$ pro $R \to \infty$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Zřejmě $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}\, dp \xrightarrow{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}\, dp.$$

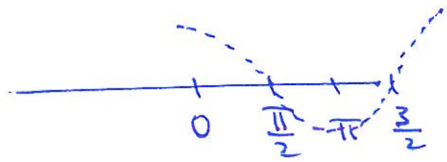
Dále
$$\left| \int_{\gamma_2} \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}\, dp \right| = \left| \int_{\xi}^{0} \mathcal{L}[f](t + iR)\, e^{tx} e^{iR}\, dt \right|$$
$$\leq M \int_0^{\xi} \frac{1}{|t + iR|^q} e^{tx}\, dt \leq e^{+\xi}\, \xi\, \frac{1}{|R|^q} \to 0 \text{ pro } R \to \infty$$

Totéž pro γ_4.

$\boxed{\gamma_3}$

$$\left|\int_{\gamma_3} \mathcal{L}[f](p)\, e^{px}\, dp\right| \le \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{M}{|R|^{q-1}}\, e^{R(\cos t)x}\, dt \qquad p = Re^{it} \quad t \in \left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3}{2}\pi\right)$$

cos



$$= \frac{M}{|R|^{q-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R(\sin t)x}\, dt$$

$$\le \frac{M}{R^{q-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rtx}\, dt$$

$$= \frac{M}{R^{q-1}} \left[-\frac{e^{-Rtx}}{Rx}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{M}{R^{q}} \left[\frac{1 - e^{-R\frac{\pi}{2}x}}{x}\right] \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

Věta 2.4 nám dala návod jak lze zavést inverzní Laplaceovu transformaci. Ukázali jsme si, jak ji lze spočítat pro komplexní funkce s konečně póly v polorovině $\{z;\ |z| \le c_f\}$. Nedostatkem Věty 2.4 je skutečnost, že klade požadavky (předpoklady) na f, kterou hledáme. Následující věta (Věta o inverzi Laplaceovy transformace) bude klást požadavky jen na $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ke které budeme hledat vzor. Platí:

Věta 2.5 (o inverzi Laplaceovy transformace):

Buď $F = F(p)$ taková, že $(\exists c > 0)(\exists M > 0)(\exists R_0 > 0)$:

$$|F(p)| \le \frac{M}{|p|^2} \quad \forall |p| \ge R_0 \text{ a } \operatorname{Re} p > c$$

Nechť F je holomorfní na $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > c\}$. Zvolme $\xi > c$.

Potom

$$(*) \quad \boxed{f(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} F(p)\, e^{pt}\, dp}$$

je vzorem $F(p)$, tzn.

$$\boxed{F(p) = \mathcal{L}[f(t)](p)} \quad \text{a} \quad \boxed{f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)](t).}$$

Důkaz Věty 2.5 **KROK 1** Uvažujme f danou předpisem $(*)$ a podívejme se, jaké má vlastnosti. Pro $p = \xi + i\eta$ platí

$$|f(t)| \le \frac{1}{2\pi} e^{\xi t} M \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi^2+\eta^2}\, d\eta = \frac{M}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)\right]_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\xi t}}{\xi}$$

$$= \frac{M}{2}\,\frac{e^{\xi t}}{\xi}$$

(singularita pravé strany v $\xi = 0$ je dána jen naší manipulací a využitím $|F(p)| \le \frac{M}{|p|^2}$, který ale uvažujeme pro $|p| \ge R_0$. Pro $|p| < R$ je f holomorfní, tedy omezená.)

Vidíme tedy, že

(i) $f(t) < +\infty$ pro $\forall\, t \in \mathbb{R}$ a $f(t) = 0$ pro $t < 0$

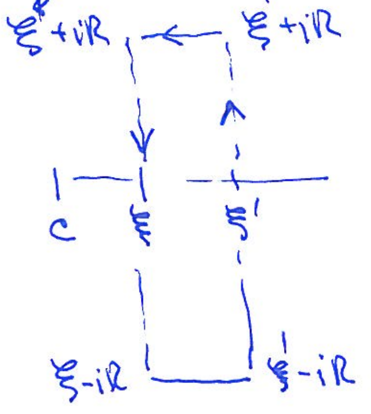
(ii) f je nejvýš exponenciálního růstu — neb majoranta $e^{\xi t} \to 0$ pro $\xi \to \infty$.

(iii) f je spojitá (z věty o spojité závislosti integrálu na parametru)

KROK 2 Z Cauchyho věty a výpočtů podobných těm před Větou 2.5 plyne, že definice f nezávisí na volbě ξ. Je-li totiž pro $\xi' > c$ a $\xi' \neq \xi$, pak

$$\int_{\xi - iR}^{\xi + iR} F(p)\, e^{pt}\, dp = \int_{\xi' - iR}^{\xi' + iR} F(p)\, dp\,,$$

což plyne z integrace podél křivky na obrázku



$\boxed{\text{KROK 3}}$ Ukážeme, že $\mathcal{L}[f(t)](p) = F(p)$.

Dk Buď $p = \xi + i\eta$, $p' = \xi' + i\eta'$, $\xi > \xi' > c$.

$$\underline{\mathcal{L}[f(t)](p)} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-pt} \int_{\xi'-i\infty}^{\xi'+i\infty} F(p') e^{p't} \, dp' \, dt$$

Fubini

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi'-i\infty}^{\xi'+i\infty} F(p') \int_0^\infty e^{-(p-p')t} \, dt \, dp'$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi'-i\infty}^{\xi'+i\infty} F(p') \left[-\frac{e^{-(p-p')t}}{p-p'} \right]_0^\infty dp'$$

Pokud $\boxed{\operatorname{Re} p - \operatorname{Re} p' > 0}$ což předpokládáme.

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi'-i\infty}^{\xi'+i\infty} \frac{F(p')}{p-p'} \, dp'$$

Residuová věta, holomorfnost F, integrací podél

$$= \underline{\underline{F(p)}}$$

$\boxed{3}$

Příklad 13 Najděte $\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-a\sqrt{p}}\right)$, kde $\sqrt{p} = \varrho^{\frac{1}{2}} e^{\frac{is}{2}}$, $\varrho > 0$, $s \in (-\pi, \pi)$.

Řešení: cvičení.