5.4 Taylorovy (mocninné) a Laurentovy (zobecněné mocninné) řady. Klasifikace singularit.

Teorie mocninných řad (definice, jednoznačnost koeficientů, konstrukce, poloměr konvergence a vlastnosti) byla vybudována v 2. semestru. Připomeňte si sami všechna tvrzení. Nyní tuto teorii doplníme o následující tvrzení, kde využijeme Cauchyho integrální vzorec pro kruh.

Věta 5.8.

Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, $a \in \Omega$ a $B_R(a) \subset \Omega$ pro jisté $R > 0$. Buď $f \in H(\Omega)$. Pak existují jednoznačně určené $\{c_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tak, že $\forall z \in B_R(a)$:
$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m,$$
přičemž
$$c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} \frac{dz}{2\pi i} \qquad r \in (0,R) \text{ libovolné.}$$

Dk

- Jednoznačnost koeficientů byla dokázána v teorii moc. řad dříve.
- Existence. Buď $r \in (0,R)$ libovolné, pevné. Pak pro $w \in B_r(a)$ a $z \in \partial B_r(a)$ platí: $\frac{|w-a|}{|z-a|} < 1$

Tedy
$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a-(w-a)} = \frac{1}{z-a}\,\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{z-a} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^m$$

Cauchyho integrální vzorec pro kruh (viz Věta 5.) pak implikuje

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-w}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{z-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(w-a)^m}{(z-a)^m}\, dz$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} \frac{dz}{2\pi i} (w-a)^m = \sum_{m=0}^{\infty} c_m (w-a)^m.$$

stejnoměrná konvergence mocninných řad

Protože však c_m jsou jednoznačně určeny a $c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$, porovnáním dostáváme
$$f^{(m)}(a) = \frac{m!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\, dz, \text{ což .}$$

dokazuje mj. druhou část Věty 5.7. (Cauchy integrální vzorec pro řady). V tuto chvíli jsou tedy dokázány obě věty. ▨

Nyní zavedeme Laurentovy (zobecněné mocninné) řady.

Uvažujme f_1, g_1 holomorfní v $a \in \mathbb{C}$ a $g_1(a) = 0$.

Pak
$$g_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^n \quad \text{pro } |z-a| < \varrho$$
a
$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{pro } |z-a| < R.$$

Definujme dále
$$f_2(z) = g_1\left(\frac{1}{z-a} + a\right) \left(= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z-a)^n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z-a)^{-n}$$

Pak
$$f_2(z) \text{ je definována pro } |z-a| > \varrho.$$

Pokud $\varrho < R$, pak existuje oblast (= mezikruží $U_{\varrho,R}(a)$) kde obě řady $f_1(z)$ a $f_2(z)$ konvergují. Součet lze psát ve tvaru
$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$
a nazývá se <u>Laurentova řada f v a</u> (f_1 ... regulární část, f_2 ... hlavní (singulární))

Zřejmě takto zavedená f je holomorfní v $U_{\varrho,R}(a)$.

Nyní dokážeme, že platí i obrácené tvrzení.

$\boxed{\text{Věta 5.9}}$ Buď $\varrho, R \in \langle 0, \infty \rangle$, $\varrho < R$ a $f \in H(U_{\varrho,R}(a))$.

Pak $\exists! \{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$ tak, že
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad \text{v } U_{\varrho,R}(a)$$
a platí
$$c_n = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \frac{dz}{2\pi i} \quad \text{kde } r \in (\varrho, R) \text{ je libovolné.}$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

(Dk) Pro jednoduchost uvažujme $a = 0$.

$\boxed{\text{Krok 1}}$ Buď $r \in (\rho, R)$ dáno.

Volme ρ', R' tak, že

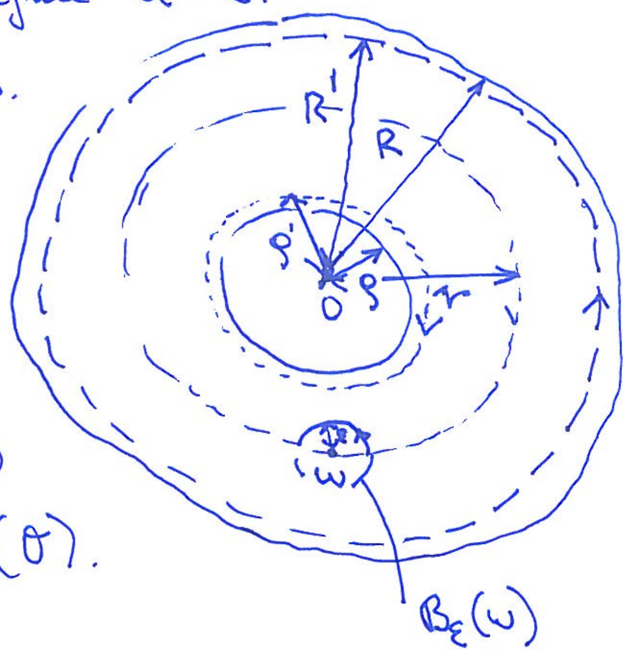
$$\rho < \rho' < r < R' < R$$

a volme $w \in \partial B_r(a)$ ~~tak~~

volme $\varepsilon > 0$ tak malé, že

$$B_\varepsilon(w) \subset U_{\rho', R'}(0)$$

Položme $U = U_{\rho', R'}(0) \setminus B_\varepsilon(w)$



$\boxed{\text{KROK 2}}$ Funkce $\dfrac{f(z)}{z-w} \in H(U)$.

Dle Cauchyho věty

$$0 = \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{\partial B_{R'}} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \int_{\partial B_{\rho'}} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz =: I_1 + I_2 + I_3 .$$

Dle Cauchyho integrálního vzorce pro kruh je

$$I_3 = -f(w)\,2\pi i .$$

Dále

$$I_1 = \int_{\partial B_{R'}} \frac{f(z)}{z\left(1-\frac{w}{z}\right)}\,dz \underset{\left|\frac{w}{z}\right|<1}{=} \int_{\partial B_{R'}} f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}}\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_{R'}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \; w^n$$

a podobně

$$I_2 = -\int_{\partial B_{\rho'}} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \int_{\partial B_{\rho'}} \frac{f(z)}{w\left(1-\frac{z}{w}\right)}\,dz \underset{\left|\frac{w}{z}\right|<1}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\partial B_{\rho'}} \frac{f(z)}{z^{-m}}\, w^{-(m+1)}\,dz$$

$$\overset{n=-(m+1)}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{\partial B_{\rho'}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \; w^n$$

Tedy vztah

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

vede k

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\partial B_{R'}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \frac{dz}{2\pi i}\, w^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \int_{\partial B_{\rho'}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \frac{dz}{2\pi i}\, w^n .$$

Tvrzení nyní plyne z pozorování

$$\int_{\partial B_{R'}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} = \int_{\partial B_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \int_{\partial B_{\rho'}} \frac{f(z)}{z^{n+1}},$$

což jsou důsledky Cauchyho věty a $\dfrac{f(z)}{z^{n+1}} \in H(B_{\rho,R}(0))$. ∎

$\boxed{\text{Příklad}}$ Určete rozvoj $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ do Laurent. řad se středem v $\boxed{(0,0)}$ a v $\boxed{(2,0)}$.
a) b)

Řešení $f(z)$ je holomorfní mimo body 0 a 1; $f(z) = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z-1}$

$\boxed{\text{Ad a)}}$ Rozvoj v $U_{0,1}$ a $U_{1,\infty}$.

$\boxed{\text{v } U_{0,1}}$ $f(z) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} =$

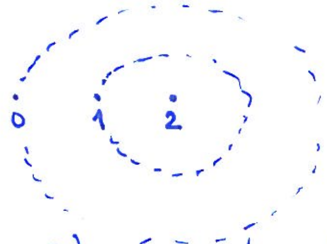
$$= -\frac{1}{z} - \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots\right) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

$\boxed{\text{v } U_{1,\infty}}$ $f(z) = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} =$

$$= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

$\boxed{\text{Ad b)}}$

3 "mezikruží", v $B_1(2)$ je f holomorfní.



$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{(z-2)+2} + \frac{1}{(z-2)+1}$$

pro každý sčítanec máme dvě varianty:

$$|z-2| > 2 \Rightarrow -\frac{1}{(z-2)+2} = -\frac{1}{\left(1+\frac{2}{z-2}\right)(z-2)} = -\frac{1}{\left(1-\frac{2}{2-z}\right)(z-2)} = -\frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (2-z)^{-n}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-2)^{n+1}}{(z-2)^n}$$

$$|z-2| < 2 \Rightarrow -\frac{1}{(z-2)+2} = \frac{1}{-2\left(1-\left(\frac{z-2}{-2}\right)\right)} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (z-2)^n$$

$$|z-2| > 1 \Rightarrow \frac{1}{(z-2)+1} = \frac{1}{(z-2)\left(1-\frac{-1}{z-2}\right)} = \frac{1}{(z-2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}$$

$$|z-2| < 1 \Rightarrow \frac{1}{(z-2)+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z-2)^n$$

$n+1 \sim -n$

Tedy

$$|z-2| < 1 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right](z-2)^n$$

$$1 < |z-2| < 2 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(z-2)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1}(z-2)^n$$

$$|z-2| > 2 \Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[(-1)^{n+1} + (-2)^{-n+1}\right](z-2)^n$$

Laurentovy řady využijeme ke klasifikaci singularit.

Def Řekneme, že f má v $a \in \mathbb{C}$

(1) isolovanou singularitu $\equiv$ $(\exists R>0)$ tak, že $f \in H(U_{0,R}(a))$

$\left(\text{tzn. } f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \ \forall z \in U_{0,R}\right)$

(2) odstranitelnou singularitu $\equiv$ 1) a je isolovaná sing.
2) $c_{-n} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

(3) pól (násobnosti m_0) $\equiv$ 1) a je isolovaná sing.
2) $(\exists m_0 < 0)(c_{m_0} \neq 0)$ a $\forall n < m_0$ je $c_n = 0$

(4) podstatnou singularitu $\equiv$ 1) a je isolovaná singularita
2) $(\forall m<0)(\exists n<m)\ (c_n \neq 0)$

Ukážeme, že platí následující charakterizace isolovaných singularit:

(2) $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to a} f(z)$ existuje

(3) $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$

(4) $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to a} f(z)$ neexistuje

Začneme s odstranitelnými singularitami.

Věta 5.10 (Riemannova) Buď $f \in H(U_{0,R}(a))$ s isolovanou singularitou v $a \in \mathbb{C}$. Pak jsou ekvivalentní:

(1) f má v a odstranitelnou singularitu

(2) $\lim_{z \to a} f(z)$ existuje vlastní

(3) f je omezená v $U_{0,\tilde{R}}(a)$ (pro $\forall\, \tilde{R} < R$)

Dk. $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ $\quad (1) \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ v $U_{0,R}(a)$

Pak však $\lim_{z \to a} f(z) = c_0 \in \mathbb{C}$, což je (2)

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ $\quad (2) \Rightarrow f$ dodefinovaná limitou v a je spojitá na $\overline{U_{0,\tilde{R}}(a)} \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, $f \in H(U_{0,R}(a))$

$\overline{U_{0,\tilde{R}}(a)}$ je kompaktní v $\mathbb{C} \Rightarrow f$ je na $\overline{U_{0,\tilde{R}}(a)}$ omezená.

$\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ Ukážeme, že $(3) \Rightarrow c_n = 0$ pro $\forall n < 0$.

Víme (viz Věta 5.9), že pro $r \in (0, R)$

$$c_n = \int_{\partial B_r(a)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} \frac{dz}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})\, r e^{it}}{(re^{it})^{n+1}}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\, e^{-int}\, dt.$$

Odsud a z omezenosti f v $U_{0,\tilde{R}}(a)$ plyne:

$|c_n| \leq \frac{M}{r^n}$, což konverguje k 0 pro $r \to 0$ a $n < 0$. ∎

$\boxed{\text{Intermezzo: póly versus kořeny.}}$ Víme, že $a \in \mathbb{C}$ je kořen funkce h násobnosti k (polynomu) $\overset{\text{def.}}{\equiv}$ $h(a) = \ldots = h^{(k-1)}(a) = 0$ a $h^{(k)}(a) \neq 0$

Rovněž "víme", že platí následující tvrzení.

$\boxed{\text{Tvrzení A}}$ $\boxed{h \text{ má v } a \text{ kořen násobnosti } k}$ $\Longleftrightarrow$ $\exists\, B_R(a)$ a $\exists\, \varphi \in H(B_R(a))$ tak, že $\varphi(a) \neq 0$ a $h(z) = (z-a)^k \varphi(z)$ v $B_R(a)$

Dk $\boxed{\Leftarrow}$ postupným derivováním

$\boxed{\Rightarrow}$ Rozvojem do Taylorovy řady.

$\boxed{\text{Tvrzení B}}$ Nechť platí:

- f má v a kořen násobnosti k
- g —‖— l
- h má v 0 kořen násobnosti m

Potom

- $f+g$ má v a kořen násobnosti nejméně $\min\{k, l\}$
  (pozoruj, že po daní f a $g = -f$ dostanu $f+g \equiv 0$)
- $\alpha \neq 0$, $\alpha f g$ má v a kořen násobnosti $k+l$
- $k > l \Rightarrow \frac{f}{g}$ má v a —‖— $k-l$
- $h \circ f$ má v a kořen násobnosti km

Dk sami s pomocí Tvrzení A.

Věta 5.11 Nechť f má v a izolovanou singularitu.
Jsou ekvivalentní
(a) f má v a pól násobnosti k
(b) $f(z) = \dfrac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k}$ kde $\tilde{\varphi}(z) \neq 0$ a $\tilde{\varphi} \in H(B_R(a))$
(c) $\dfrac{1}{f}$ má v a kořen násobnosti k

(Dk) Dle Tvrzení A víme:

$$(c) \iff \boxed{\frac{1}{f(z)} = (z-a)^k \varphi(z)} \quad \text{a } \varphi(a) \neq 0 \quad \text{a } \varphi \in H(B_R(a))$$

Definujme $\tilde{\varphi}(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$. Pak $\tilde{\varphi} \in H(B_R(a))$ a $\tilde{\varphi}(a) \neq 0$.

Pak

$$(c) \iff f(z) = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k} \text{ a } \tilde{\varphi}(a) \neq 0, \text{ což dává (b)}$$

$\tilde{\varphi}$ je holomorfní v $B_R(a)$

$$\iff f(z) = \frac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k} = \frac{1}{(z-a)^k}\sum_{m=0}^{\infty} \tilde{c}_m (z-a)^m \quad \text{a } \tilde{c}_0 \neq 0$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{c}_m (z-a)^{m-k} = \sum_{m=-k}^{\infty} \tilde{c}_{m+k} (z-a)^m$$

$$= \sum_{m=-k}^{\infty} c_m (z-a)^m \quad \text{a} \quad c_{-k} = \tilde{c}_0 \neq 0.$$

∎

Věta 5.12 Buď $a \in \mathbb{C}$ izolovaná singularita. Jsou ekvivalentní
(1a) f má v a pól.
(1b) $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.
Také jsou ekvivalentní
(2a) f má v a podstatnou singularitu
(2b) $\lim_{z \to a} f(z)$ neexistuje
(2c) Pro $(\forall \rho > 0)\big(f(U_{0,\rho}(a))$ je hustá v $\mathbb{C}\big)$
(dense)

⌜ Buď Y Banachův prostor a $X \subset Y$. Řekneme, že X je hustý v Y právě když $(\forall y \in Y)(\exists x_n \in X)(x_n \to y \text{ v } Y)$ ⌟

Věta 5.

Dk $\boxed{(1a) \Rightarrow (1b)}$ $(1a) \Leftrightarrow f(z) = \dfrac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k}$ pro jistou $\tilde{\varphi}$ a $\tilde{\varphi}(a) \neq 0$.

Odsud ihned plyne $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{\tilde{\varphi}(z)}{(z-a)^k} = \infty$

$\boxed{(1b) \Rightarrow (1a)}$ $(1b) \Leftrightarrow \lim\limits_{z \to a} \dfrac{1}{f(z)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{f(z)}$ má v a kořen

$\Leftrightarrow f(z)$ má v a pól.

$\boxed{(2a) \Rightarrow (2c)} \Leftrightarrow \boxed{\neg(2c) \Rightarrow \neg(2a)}$

$(\exists \alpha \in \mathbb{C})$ a $(\exists B_r(\alpha))$ $B_r(\alpha) \cap f(U_{0,\varrho}(a)) = \emptyset$ (pro $\forall \varrho$)

$\Updownarrow$

$\forall z \in U_{0,\varrho}(a): \quad |f(z) - \alpha| \geq r$

Definujme $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - \alpha} \Rightarrow |g(z)| \leq \dfrac{1}{r}$

a dle Věty 5 je g po dodefinování limitou holomorfní v $B_\varrho(a)$.

Mohou nastat dvě možnosti

(i) $\boxed{g(a) \neq 0} \Rightarrow g(z) \neq 0$ na okolí a

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{g(z)} + \alpha$ a f má v a odstranitelnou singularitu

(ii) $\boxed{g(a) = 0} \Rightarrow g$ má v a kořen (nějaké násobnosti)

$\Rightarrow \dfrac{1}{g}$ má v a pól (–"–)

$\Rightarrow f = \dfrac{1}{g} + \alpha$ má v a pól ( )

tedy v obou případech platí $(\neg 2a)$.

$\boxed{(2c) \Rightarrow (2b)}$ $(2c) \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C}$ $\exists z_n \in U_{0,\varrho}(a)$ tak, že $f(z_n) \to \alpha$

$\Rightarrow f$ nemá v a limitu

$\boxed{(2b) \Rightarrow (2a)} \Leftrightarrow \boxed{\neg(2a) \Rightarrow \neg(2b)}$ což víme.

▨

Příklady

1) $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ má v 0 odstranitelnou singularitu

2) $f(z) = \dfrac{1}{z}$ má v 0 pól násobnosti 1

3) $\left.\begin{array}{l} \sin \frac{1}{z} \\ \cos \frac{1}{z} \\ \exp \frac{1}{z} \end{array}\right\}$ mají v 0 podstatnou singularitu

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{z} : \mathcal{U}_{0,\rho}(0) \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{B}_{\frac{1}{\rho}}(0)} \\ \exp : \text{libovolný pás šířky } 2\pi \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\exp \frac{1}{z} : \mathcal{U}_{0,\rho}(0) \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Tento jev platí obecně

Piccardova věta

a je podstatná sing. $\Leftrightarrow f(\mathcal{U}_{0,\rho}(a)) = \mathbb{C} \setminus \{\text{jeden bod}\}$

5.5 Reziduová věta

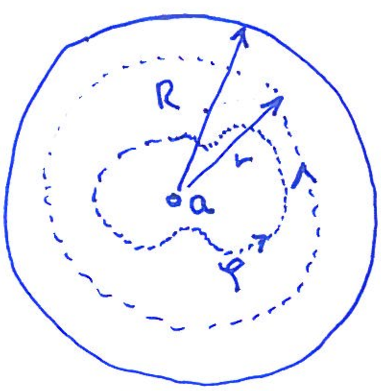
Úvaha Buď a isolovaná singularita $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pak v jistém $U_{0,R}(a)$ lze psát $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$. Pro $r \in (0,R)$ pak platí ($f \in H(U_{0,R}(a))$):

$$\int_{\partial B_r(a)} f(z)\,dz = \int_{\partial B_r(a)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n\,dz \underset{\text{mocn. řad}}{\overset{\text{stejnoměrná konvergence}}{=}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\partial B_r(a)} (z-a)^n\,dz$$

$$\underset{dz = ire^{it}dt}{\overset{z=a+re^{it}}{=}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n i r^{n+1} \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\,dt}_{\substack{=0 \text{ pro } \forall n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\} \\ =2\pi \text{ pro } n=-1}}$$

$$= 2\pi i c_{-1}$$

Povšimněme si, že totéž dostaneme i libovolnou uzavřenou křivku v $U_{0,R}(a)$, pro kterou leží a nalevo od ní (uvnitř), viz obrázek. Rozmyslete si, zda je vám to opravdu jasné.



Návod: Pro situaci na obrázku platí (z Cauchyho věty)

$$\int_{\partial B_r(a)} f(z)\,dz = \int_{\langle\varphi\rangle} f(z)\,dz.$$

Vidíme, že koeficient c_{-1} Laurent. řady má mimořádnou cenu v určení hodnoty integrálu kolem isolované singularity a. Je to jediný koeficient, který zbude z celé mocninné řady.

Def Má-li f v $a \in \mathbb{C}$ isolovanou singularitu (tzn. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ v jistém prstencovém okolí a, pak c_{-1} se nazývá residuum f v a $\equiv \mathrm{res}_a f$.

$\boxed{\text{Věta 5.13}}$ (Residuová věta) Buď $\Omega \subset \mathbb{C}$ otevřená, jednoduše souvislá.
Buď $f \in H(\Omega \setminus A)$, kde A je konečná množina <u>isolovaných</u> singularit. Pak pro libovolnou U takovou, že

$$U \subset \overline{U} \subset \Omega \quad \text{a} \quad \partial U \cap A = \emptyset \quad \text{platí}$$

$$\int_{\partial U} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a \in A \cap U} \operatorname{res}_a f$$

Dk. Nejdříve kolem každého $a \in A \cap U$ (viz obrázek) vyřízneme kroužek o poloměru $\varepsilon > 0$, kde ε je tak malé, aby $B_\varepsilon(a) \subset U$. Pak je f holomorfní na $\underbrace{U \setminus \bigcup_{a \in A \cap U} B_\varepsilon(a)}_{U'}$, tj. U' ... jednoduše souvislé

$f \in H\left(U \setminus \bigcup_{a \in A \cap U} B_\varepsilon(a)\right)$. Dle Cauchyho věty

$$0 = \int_{\partial U'} f(z)\,dz = \int_{\partial U} f(z)\,dz - \sum_{a \in U \cap A} \int_{B_\varepsilon(a)} f(z)\,dz$$

úvaha před větou

$$= \int_{\partial U} f(z)\,dz - 2\pi i \sum_{a \in U \cap A} \operatorname{res}_a f,$$

což dává tvrzení věty. ∎

<u>Definice</u> $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je meromorfní v $\Omega \subset \mathbb{C}$ (otevř.) $\equiv \exists A \subset \Omega$ konečná množina isolovaných singularit taková, že $f \in H(\Omega \setminus A)$ a f má v $a \in A$ odstranitelnou singularitu nebo pól.

Příklad Buď $f(z)=\dfrac{z^2}{(z-1)(z+1)^2}$. Spočtěte $\int_{\partial\sigma} f(z)\,dz$, kde σ obsahuje (i) bod $a=1$ a (ii) body $a=1, a=-1$.

Řešení $\boxed{\text{Ad (i)}}$ $\int_{\partial\sigma} f(z)\,dz \underset{\text{rez. věta}}{=} 2\pi i \operatorname{res}_1 f$

$\boxed{v\ \overline{U_{0,r}(1)}}$ $f(z)=\dfrac{1}{z-1}\left(\dfrac{z^2}{(z+1)^2}\right) = \dfrac{1}{z-1}\sum_{m=0}^{\infty} a_m (z-1)^m$, $\quad a_m = \dfrac{f^{(m)}(1)}{m!}$

$r\in(0,2)$ $\qquad \dfrac{z^2}{(z+1)^2} \in H(B_r(1))$

Tedy $\operatorname{res}_1 f = a_0 = \left.\dfrac{z^2}{(z+1)^2}\right|_{z=1} = \dfrac{1}{4}$ a $\boxed{\int_{\partial\sigma} f(z) = \dfrac{\pi}{2} i}$

$\boxed{\text{Ad (ii)}}$ $\int_{\partial\sigma} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname{res}_1 f + \operatorname{res}_{-1} f\right] = (*)$.

Zbývá spočítat $\operatorname{res}_{-1} f$.

$\boxed{v\ \overline{U_{0,r}(-1)}}$ $f(z)=\overbrace{\left(\dfrac{z^2}{z-1}\right)}^{g(z)}\dfrac{1}{(z+1)^2} = \dfrac{1}{(z-(-1))^2}\sum_{m=0}^{\infty} b_m (z-(-1))^m$

$\dfrac{z^2}{z-1}\in H(B_r(-1))$

$$= \frac{1}{(z+1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(m)}(-1)}{m!}(z+1)^m$$

Tedy $\boxed{\operatorname{res}_{-1} f = \dfrac{g'(-1)}{1!} = b_1}$

což dává

$$\operatorname{res}_{-1} f = \left[\left(\frac{z^2}{z-1}\right)'\right]_{z=-1} = \left[\frac{2z(z-1)-z^2}{(z-1)^2}\right]_{z=-1} = \frac{3}{4}.$$

Tedy $(*) = 2\pi i\left[\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\right] = \underline{\underline{2\pi i}}$

▨

Pozorování a řešení příkladu se dají zobecnit. Platí následující tvrzení.

$\boxed{\text{Věta 5.14}}$ (1) Je-li $f \in H(B_r(a))$, pak $\operatorname{res}_a f = 0$

(2) Jsou-li f a $g \in H(B_r(a))$ a g má v a kořen násobnosti 1, pak $\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}$

(3) Je-li $f \in H(B_r(a))$, g má v a pól násobnosti 1, pak $\operatorname{res}_a fg = f(a) \operatorname{res}_a g$

(4) Má-li $f \in H(U_{0,r}(a))$ v a pól násobnosti (nejvýš) k, pak $\operatorname{res}_a f = \lim_{z \to a} \left[f(z)(z-a)^k \right]^{(k-1)} \frac{1}{(k-1)!}$.

Dk $\boxed{\text{Ad (1)}}$ $f \in H(B_r(a)) \Leftrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$, což implikuje $c_{-1} = 0$.

$\boxed{\text{Ad (2)}}$ $g(z) \underset{\substack{\uparrow \\ g'(a) \neq 0}}{=} g'(a)(z-a) + \frac{g''(a)}{2!}(z-a)^2 + \dots = g'(a)(z-a)h(z)$, kde $h \in H(B_r(a))$ a $h(a) = 1$.

Tedy $\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \operatorname{res}_a \left(\frac{f}{g'(a)\, h(z)\, (z-a)} \right)$ holomorfní v $B_r(a)$

viz příklad před Větou

$$= \frac{f(a)}{g'(a)\, h(a)} = \underline{\frac{f(a)}{g'(a)}}$$

$\boxed{\text{Ad (3)}}$ $g(z) = \frac{\operatorname{res}_a g}{z-a} + h(z)$, kde $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \in H(B_r(a))$

Protože také $f \in H(B_r(a))$, tzn. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z-a)^n$, tak

$$\operatorname{res}_a fg = \operatorname{res}_a \left(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z-a)^n \left(\frac{\operatorname{res}_a g}{z-a} + h(z) \right) \right)$$

$$= \beta_0 \operatorname{res}_a g = f(a) \operatorname{res}_a g.$$

$\boxed{\text{Ad (4)}}$ Dle předpokladu

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{c_{-(k-1)}}{(z-a)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-a)^j$$

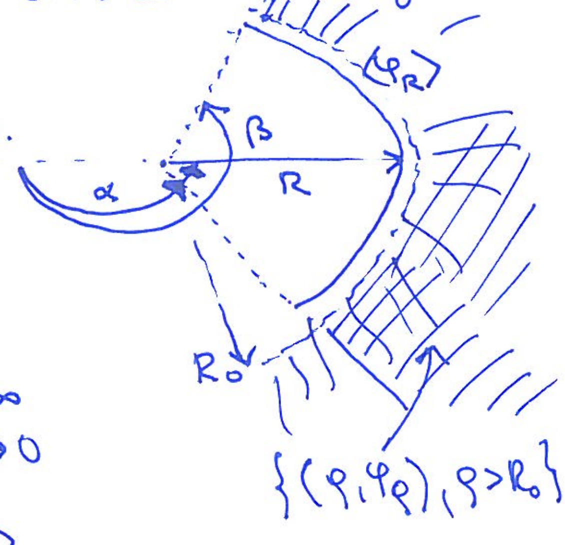
$$f(z)(z-a)^k = c_{-k} + c_{-(k-1)}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{k-1} + \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z-a)^{k+j}$$

$$\left[f(z)(z-a)^k \right]^{(k-1)} = c_{-1}(k-1)! + \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m (z-a)^m$$

$$\operatorname{res}_a f = c_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \left\{ f(z)(z-a)^k \right\}^{(k-1)} \Big|_{z=a}$$

∎

Při výpočtech budeme často postupovat dle následujících tvrzení pokud budeme integrovat po částech kružnice velkého poloměru.



Lemma A (Jordanovo)

Buď $\langle\varphi_R\rangle = \{Re^{it},\ t\in\langle\alpha,\beta\rangle\},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha<\beta$.

Buď f spojité na $\{(\varrho,\varphi_\varrho),\ \varrho>R_0\}$.

Buď $M_R = \max\limits_{z\in\varphi_R} f(z)$.

Pak

(a) Jestliže $RM_R \xrightarrow{R\to\infty} 0$, potom $\int\limits_{\langle\varphi_R\rangle} f(z)\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$

(b) Jestliže $M_R \xrightarrow{R\to\infty} 0$ a $\langle\alpha,\beta\rangle\subset\langle 0,\pi\rangle$,

potom $\int\limits_{\langle\varphi_R\rangle} e^{i\gamma z} f(z)\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0$ pro $\gamma>0$.

Dk

$\boxed{\text{Ad (a)}}$ $\int\limits_{\langle\varphi_R\rangle} f(z)\,dz = iR\int\limits_\alpha^\beta f(Re^{it})e^{it}\,dt$

Tedy $\left|\int\limits_{\langle\varphi_R\rangle} f(z)\,dz\right| \le M_R R(\beta-\alpha) \xrightarrow{R\to\infty} 0$ dle předp.

$\boxed{\text{Ad (b)}}$ $\int\limits_{\langle\varphi_R\rangle} e^{i\gamma z} f(z)\,dz = iR\int\limits_\alpha^\beta e^{i\gamma R\cos t}\, e^{-\gamma R\sin t} f(Re^{it})\, e^{it}\,dt$

Tedy
$I := \left|\int\limits_{\langle\varphi_R\rangle} e^{i\gamma z} f(z)\right|dz \le RM_R\int\limits_\alpha^\beta e^{-\gamma R\sin t}\,dt \le \underbrace{RM_R\int\limits_0^\pi e^{-\gamma R\sin t}\,dt}_{\textstyle = 2RM_R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\gamma R\sin t}\,dt}$

Protože na $\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$: $\frac{2}{\pi}t \le \sin t$
$\Updownarrow$
$-\sin t \le -\frac{2}{\pi}t$

což implikuje $e^{-\gamma R\sin t} \le e^{-\frac{2\gamma R}{\pi}t}$.

Tedy $I \le 2RM_R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2\gamma R}{\pi}t} = -\frac{2RM_R\pi}{2\gamma R}\left[e^{-\frac{2\gamma R}{\pi}t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{M_R\pi}{\gamma}\left[1-e^{-\gamma R}\right]$,

což jde k 0 (pro $R\to\infty$) pokud $M_R\to 0$ (pro $R\to\infty$).

$\boxtimes$

Další lemma řeší situaci, kdy obcházíme jednonásobný pól po části smršťující se kružnice.

$\boxed{\text{Lemma B}}$ (O obcházení pólu násobnosti jedna)

Nechť f je meromorfní s jednonásobným pólem v bodě $a \in \mathbb{C}$. Pak

$$\lim_{\rho \to 0+} \int_{\langle \varphi_\rho \rangle} f(z)\,dz = i(\beta - \alpha)\, \mathrm{res}_a f$$

kde $\langle \varphi_\rho \rangle := \{ z = a + \rho e^{it}, t \in \langle \alpha, \beta \rangle \}$, $\alpha < \beta$.

Dk. Na jistém prstencovém okolí a platí:

$$f(z) = \frac{\mathrm{res}_a f}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

Tedy

$$\int_{\langle \varphi_\rho \rangle} f(z)\,dz = \mathrm{res}_a f \int_{\langle \varphi_\rho \rangle} \frac{dz}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{\langle \varphi_\rho \rangle} (z-a)^n$$

neboli

$$\int_{\langle \varphi_\rho \rangle} f(z)\,dz = i\,\mathrm{res}_a f\,(\beta - \alpha) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^{n+1} \frac{e^{i(n+1)\beta} - e^{i(n+1)\alpha}}{(n+1)}$$

$$\le \rho\, 2 \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n}_{<\infty} \to 0 \quad \text{pro } \rho \to 0+$$

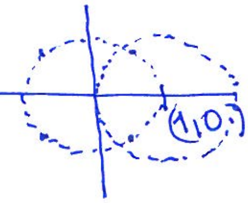
neboť mocninné řady konvergují na jistém prstencovém okolí. ■

$\boxed{\text{Příklad}}$

Spočtěte $\displaystyle\int_{\partial\sigma} \frac{dz}{z^4+1}$ kde $\sigma = \{ z = x + iy \,;\, \underbrace{x^2 + y^2 \le 2x}_{(x-1)^2 + y^2 \le 1} \}$

$z^4 + 1 = 0$ má 4 kořeny $z_k := \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)(2k+1)}, \quad k = 0,1,2,3$$



Dle reziduové věty č.13:

$$\int_{\partial\sigma} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left[\mathrm{Res}_{z_0} f + \mathrm{res}_{z_3} f \right]$$

$$\overset{\text{Věta 5.14,(ii)}}{=} 2\pi i \left[\frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_0} + \frac{1}{4z^3}\Big|_{z=z_3} \right]$$

neb $z_0^4 = -1$, $z_3^4 = -1$

$$= \frac{2\pi i}{4} \left[-z_0 - z_3 \right] = \frac{-\pi i}{\sqrt{2}}$$

■

$\boxed{\text{Singularity a reziduum v } \infty}$ $\mathbb{C}$ vs $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Def. f má v ∞ isolovanou singularitu $\equiv \exists R>0$ takové, že f je holomorfní na $\{z \in \mathbb{C} ; |z|>R\}$

Je-li ∞ isolovaná singularita, pak

∞ je $\begin{cases} \text{odstranitelná sing.} \\ \text{pól} \\ \text{podstatná sing} \end{cases} \iff f\left(\frac{1}{z}\right)$ má v 0 $\begin{cases} \text{odst. singularitu} \\ \text{pól} \\ \text{podstatnou singularitu} \end{cases}$

$\Updownarrow$

S pozorováním

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \iff f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\frac{1}{z}\right)^n$$

na $\{z \in \mathbb{C} ; |z| > R\}$

∞ je $\begin{cases} \text{podstatná sing.} & \forall n>0\ \exists m>n \quad c_m \neq 0 \\ \text{pól} & \exists n_0>0\ \forall n>n_0 \quad c_n = 0 \\ \text{odst. sing.} & c_n = 0 \text{ pro } \forall n>0 \end{cases}$

Víme: je-li $a \in \mathbb{C}$ izol. sing. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$

a navíc $c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varrho(a)} f(z)\,dz$

Definice Buď ∞ isol. singularita. Potom

$$\operatorname{res}_\infty f \overset{df}{=} -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} f(z)\,dz$$

Znaménko $-$ je tde z důvodu, že ∞ leží vždy vpravo od křivky, po které integruji.

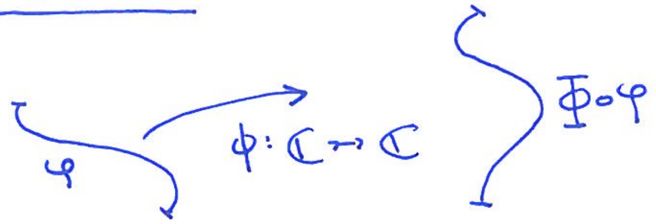
$\boxed{\text{Věta}}$ 5.15 Je-li $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ Laur. řada f v ∞. Potom $\operatorname{res}_\infty f = -c_{-1}$.

Dk Platí:

$$\operatorname{res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\partial B_R(0)} z^n\,dz = -c_{-1}.$$

$\boxtimes$

Pozorování



Pak (věta o substituci): $\displaystyle\int_{\langle \Phi\circ\varphi\rangle} f(z)\,dz = \int_{\langle\varphi\rangle} (f\circ\phi)(z)\,\phi'(z)\,dz$

Buď $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ Laurentova ř. f v ∞:

$$\boxed{\phi = \frac{1}{z}} \qquad \int_{\partial B_R(0)} f(w)\,dw = \int_{\partial B_{\frac{1}{R}}(0)} f\left(\frac{1}{z}\right) d\left(\frac{1}{z}\right) = -\int_{\partial B_{\frac{1}{R}}(0)} f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}\,dz$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_{\partial B_{\frac{1}{R}}(0)} \left(\frac{1}{z}\right)^{n+2} dz$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, i \int_0^{2\pi} R^{n+2}\,\frac{1}{R}\, e^{-i(n+2)t} e^{it}\,dt$$

$$= -\sum c_n R^{n+1}\, i \int_0^{2\pi} e^{-i(n+1)t}\,dt$$

$$= -c_{-1}\, 2\pi i$$

Tedy: $\boxed{\operatorname{res}_\infty f = -\operatorname{res}_0 f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2}}$

Věta 5.16 (O součtu residuí v $\mathbb{C}^*$)
Buď $f \in H(\mathbb{C} \setminus A)$, kde A je konečná množ. isolovaných singularit f. Potom

$$\sum_{a\in A\cup\{\infty\}} \operatorname{res}_a f = 0$$

Dk: A je konečná množ. isol. singularit $\Rightarrow$ ∞ je také isolovaná singularita. Dle residuové věty 5.13:

$$2\pi i \sum_{a\in A} \operatorname{res}_a f \underset{\text{pro } R \text{ dostatečně velká}}{=} \int_{\partial B_R(0)} f(z)\,dz \underset{\text{definice } \operatorname{res}_\infty f}{=} -2\pi i \operatorname{res}_\infty f,$$

což dává tvrzení. ∎

$\boxed{\text{Příklad}}$ Spočtěte $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^6}{1+z^7}$.

<u>Řešení</u> $1+z^7$ má 7 jednonásobných kořenů na jednotkové kružnici.

Pomocí $\operatorname{res}_\infty f$ a poslední věty víme:

$$\int_{|z|=2} \frac{z^6}{1+z^7} = -2\pi i \operatorname{res}_\infty \frac{z^6}{1+z^7} = +2\pi i \operatorname{res}_0 \frac{1}{z^2}\,\frac{\cancel{z}}{1+z^7}$$

$$= +2\pi i \operatorname{res}_0 \frac{1}{z}\,\frac{1}{1+z^4} = \underline{\underline{+2\pi i}}$$