$\boxed{\text{III.2}}$ INTEGRACE DIFERENCIÁLNÍCH FOREM

(křivkový a plošný integrál)

$\boxed{\text{II.2.}}$ KŘIVKOVÝ A PLOŠNÝ INTEGRÁL

Motivace Víme po 1. semestru, že pro "rozumné" fce platí Newtonův vzorec

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

který lze po zavedení značení

$$\Omega = (a,b) \qquad \partial\Omega = \{a,b\}, \qquad f = F' = dF$$

přepsat do tvaru $\boxed{\int_\Omega dF = \int_{\partial\Omega} F}$ (znaménko bere do úvahy "orientaci" hranice: 1 odpovídá v $\{b\}$ vnější normále, -1 —"— v $\{a\}$ —"—)

Z fyziky, střední školy, zajímavostí, ... víte o následujících vztazích:

- $\langle\gamma\rangle \subset \mathbb{R}^d$ obraz křivky $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^d$ a je-li $\vec{F} = \nabla U$ pak

(1) $$\int_{\langle\gamma\rangle} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_\Omega dU = \int_{\partial\Omega} U = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0))$$

VĚTA O POTENCIÁLU

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ otevřená, souvislá s hranicí $\partial\Omega$

$\boxed{\text{Greenova věta}}$ (2) $$\int_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)}_{\text{curl}\,\vec{F}} dx_1\,dx_2 = \int_{\partial\Omega} F_1\,dx_1 + F_2\,dx_2 = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$

$$\boxed{\int_\Omega d\vec{F} = \int_{\partial\Omega} \vec{F}}$$

- $\boxed{\text{STOKESOVA VĚTA}}$ (3) $$\int_\Omega \underbrace{\text{rot}\,\vec{F}}_{\text{"}\frac{\partial}{\partial x}\times\vec{F}\text{"}}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$ $\Omega \subset \psi(\sigma)$ plocha v $\mathbb{R}^3$, $\sigma \subset \mathbb{R}^2$

- $\boxed{\text{GAUSS - OSTROGRADSKIJ}}$ $\vec{F}$ hladké vekt. pole, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

(4) $$\int_\Omega \text{div}\,\vec{F}\,dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

Cílem této kapitoly je ukázat, že všechny tyto vztahy opravdu platí. Také je cílem vyjasnit pojmy

KŘIVKOVÝ $\int$
- 1. DRUHU (hmotnost drátu umístěného v $\mathbb{R}^3$)
- 2. DRUHU (výkon sil po křivce)

PLOŠNÝ $\int$
- 1. DRUHU (hmotnost tenké slupky, fólie v $\mathbb{R}^3$)
- 2. DRUHU (výkon plošných sil, tok tepla plochou)

Lze tak učinit „případ od případu", tj. studovat křivky a vyšetřovat integraci skalárních, vektorových funkcí na nich a poté studovat plochy a vyšetřovat integraci —"— —"— na plochách. Pozor, plochy a křivky jsou v $\mathbb{R}^3$ množiny míry nula, tedy Lebesgueův $\int$ nestačí (není dostatečně citlivý).

Vztahy (1)–(4) mohou být po podobnosti s Newtonovým vzorcem:

$\boxed{\text{Integrace "kombinace" derivací objektu přes "plochu" } \Omega = \text{Integrace objektu přes } \partial\Omega}$

PTÁME SE, ZDA NELZE ZAVÉST
- OBJEKTY, KTERÉ JE MOŽNÉ INTEGROVAT A DERIVOVAT (A PLOCHY ~~[illegible]~~ ZOBECNĚNÉ) TAK, ABY
- $\boxed{\int_{\text{plocha}} \text{derivace objektu} = \int_{\text{hranice plochy}} \text{objekt}}$

Odpověď je kladná: OBJEKT ~ DIFERENCIÁLNÍ FORMA

VZOREC ~ STOKESOVA VĚTA

VZTAHY (1)–(4) ~ SPEC. PŘÍPADY STOKESOVY VĚTY

Dříve než zavedeme pojem dif. forma, budeme mluvit o formách z pohledu LA. Formy tvoří algebru: tzv. vnější resp. Grassmannova.

$\boxed{2.1}$ VNĚJŠÍ (GRASSMANNOVA) ALGEBRA

Buď $V = \{a = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha e_\alpha \,;\, a_\alpha \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}^{|M|}$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s bází $\{e_\alpha\}_{\alpha=1}^{|M|}$

- umím sčítat prvky z V (vnitřní operace)
- umím násobit — " — skalárem z $\mathbb{R}$ (vn. oper.)

$\boxed{\text{CÍL}}$
- rozšířit V na větší vektorový prostor, tak aby v tom větším měli zavedené násobení vektorů v V a (jiný vektorový) prostor byl vzhledem k násobení uzavřený. Udělejme tak, aby násobení dvou prvků bylo aby antikomutativní.

Grassmann v pol. 19. stol. zavedl součin, který zobecnil (rozšířil) skalární i vektorový součin, dával algebru a lze jej zavést v lib. dimenzi.

Příklad $V = \{e_1, e_2\} \longmapsto \Lambda^*(\mathbb{R}^2_{e}) = \Lambda^*(V) = \{e_\emptyset, e_1, e_2, e_{12}\}$ kde

$\underbrace{e_\emptyset = 1}_{\substack{\shortparallel S \\ \mathbb{R}}}$, $\underbrace{e_1, e_2}_{\substack{\shortparallel S \\ \mathbb{R}^2}}$, $\underbrace{e_{12} = e_1 \wedge e_2}_{\substack{\shortparallel S \\ \mathbb{R}}}$ $= \sum_{k=0}^{2} \Lambda^k(V) \Rightarrow \dim \Lambda^*(V) = 4$

0-formy, 1-formy, 2-forma

$\dim \Lambda^k(V) = \binom{2}{k}$

$\wedge$	$e_\emptyset$	e_1	e_2	e_{12}
$e_\emptyset$	$e_\emptyset$	e_1	e_2	e_{12}
e_1	e_1	0	e_{12}	0
e_2	e_2	$-e_{12}$	0	0
e_{12}	e_{12}	0	0	0

V následující definici důležitou roli hrají multiindexy: uspořádané (rostoucí) k-tice z n prvků přirozených čísel: $I = \{i_1, \dots, i_k\}$, $i_l \in \{1, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

Počet všech takových k-tic: $\binom{n}{k}$

$\boxed{\text{Zavedení}}$ vnějšího (exterior, wedge, outer, Grassmann) součinu a vnější (— " — ovy) algebry.

Buď V vektorový nad $\mathbb{R}$ s bází $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Pro multiindex I označme $e_I = e_{i_1 \dots i_k} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$

$$e_\emptyset = 1$$

$$e_{\{i\}} := e_i ,$$

kde součin $\wedge$ je definován vztahem

$$e_I \wedge e_J = \begin{cases} 0 & I \cap J \neq \emptyset \\ \underbrace{\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I, J \\ I \cup J \end{pmatrix}}_{} e_{I \cup J} & \end{cases}$$

$\boxed{\text{součin "}\wedge\text{" je uzavřený}}$

$= 1$ je-li počet přehozených dvojic v I, J k dosažení $I \cup J$ sudý

$= -1$ lichý

Pak zavedeme

$$\Lambda^*(V) = \Big\{ \sum_{I \in \{1, \dots, n\} \cup \emptyset} \alpha_I e_I , \ \alpha_I \in \mathbb{R} \Big\} \cong \mathbb{R}^{2^n}$$

s standardně definovaným sčítáním, násobením skalárem a výše uvedeným součinem.

Platí:

$$\Lambda^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \quad \text{kde } \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \text{ jsou tzv. } k\text{-formy}$$

$$" \Big\{ \sum_{|I|=k} \alpha_I e_I \, ; \, \alpha_I \in \mathbb{R} \Big\} "$$

Protože $e_\emptyset = 1 \in \Lambda^*(\mathbb{R}^n)$ je jednotka v operaci násobení, neboť

$$e_I \wedge e_\emptyset = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \ \emptyset \\ I \cup \emptyset \end{pmatrix} e_{I \cup \emptyset} = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix} e_I = e_I$$

$$e_\emptyset \wedge e_I = \quad — " — \quad = e_I ,$$

Snadné ukázat, že "$\wedge$" je asociativní.

Všimněte si, že $\Lambda^0(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}$, $\Lambda^1(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^n$, ...

Ačkoliv $\mathbb{R}^{2^n} \cong \Lambda^*(V)$ je mezi těmito vektorovými prostory velký rozdíl: $\mathbb{R}^{2^n}$ není algebra, $\Lambda^*(V)$ jak ukážeme následně algebrou je.

• Rozložte daný vektor do tvaru $v_1\wedge\dots\wedge v_k$:

a) $(ae_{13}+be_{24})\wedge(ce_{13}+de_{24}) \in \Lambda^4(\mathbb{R}^4)$: $-(ad+bc)\,e_{1234}$

b) $e_{123}+e_{124}+e_{234} \in \Lambda^3(\mathbb{R}^4)$: $(e_1+e_4)\wedge e_2\wedge(e_3+e_4)$

Věta 2.1 Základní vlastnosti vnějšího součinu

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s bází $e_1,\dots,e_n$. Nechť $k,l\in\{1,\dots,n\}$ lib. Pak

(i) $\dim\Lambda^k(V)=\binom{n}{k}$ a $\dim\Lambda^*(V)=\sum_{k=0}^{n}\dim\Lambda^k(V)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

(ii) "$\wedge$" je asociativní

(iii) $\omega\in\Lambda^k(V)$ a $\eta\in\Lambda^l(V)$ pak $\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}\,\eta\wedge\omega$ — Obecně, není $\wedge$ antikomutativní, je antikomutativní pro $k=l=1$.

(iv) Buď $v_1,\dots,v_n\in V$ a $v_i=\sum_{\alpha=1}^{n}v_i^\alpha e_\alpha$, kde $v_i^\alpha\in\mathbb{R}$. Pak

$$v_1\wedge\dots\wedge v_n=\det(v_i^\alpha)\,e_1\wedge\dots\wedge e_n$$

Obecněji: $v_1,\dots,v_k\in V$ ve tvaru $v_i=\sum_{\alpha=1}^{n}v_i^\alpha e_\alpha$, $1\le i\le k$, $1\le\alpha\le n$. Pak pro $\forall$ k-prvkovou $I\subset\{1,\dots,n\}$ označ $V_I:=(v_i^j)_{1\le i\le k,\ j\in I}$ matici $k\times k$, která vznikne z matice $W=(v_i^\alpha)_{i\in\{1,\dots,k\},\ \alpha\in\{1,\dots,n\}}$ vynecháním sloupců s indexem, který není v I. Pak

$$v_1\wedge\dots\wedge v_k=\sum_{I\subset\{1,\dots,n\},\ |I|=k}(\det V_I)\,e_I$$

(Dk) Ad (i) provedeno.

Ad (ii). Stačí ukázat pro prvky báze:

$$(*)\qquad \boxed{e_I\wedge(e_J\wedge e_K)=(e_I\wedge e_J)\wedge e_K}$$

Protože

$$e_I\wedge(e_J\wedge e_K)=e_I\wedge\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}J,K\\ J\cup K\end{pmatrix}e_{J\cup K}=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}J,K\\ J\cup K\end{pmatrix}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}I,J\cup K\\ I\cup J\cup K\end{pmatrix}e_{I\cup J\cup K}$$

tvrzení (*) bude ukázáno pokud platí

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}J,K\\ J\cup K\end{pmatrix}\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}I,J\cup K\\ I\cup J\cup K\end{pmatrix}=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}I,J,K\\ I\cup J\cup K\end{pmatrix}.$$

Tato rovnost plyne přímo z definice:

(RHS) $(-1)^{\text{počet dvojic}}$ potřebných k přehození I,J,K tak, abychom dostali postupný multiindex $I\cup J\cup K$

(LHS) $(-1)^{\text{počet dvojic}}$ —||— J,K —||— $J\cup K$

$\times\ (-1)^{\text{počet dvojic}}$ $I,J\cup K$ —||— $I\cup J\cup K$.

pokud si uvědomíme, že přehazování dvojic na RHS lze dělat přímo v pořadí jako na (LHS).

Ad (iii). Stačí také dokázat pro prvky báze: e_I $(|I|=k)$ a e_J $(|J|=l)$

Avšak: $e_I\wedge e_J=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}I,J\\ I\cup J\end{pmatrix}e_{I\cup J}$ kde $I\cup J$ značí postupný multiindex.

a $e_J\wedge e_I=\operatorname{sgn}\begin{pmatrix}J,I\\ I\cup J\end{pmatrix}e_{I\cup J}$ Spočítejme, kolik takových dvojic je potřeba, abychom dostali z (J,I) tvar (I,J). Přesně ~~[illegible]~~ $k\times l$ takových, což dává důkaz.

Ad (iv). Výpočet
$$v_1\wedge\dots\wedge v_m = \Big(\sum_{i_1=1}^m v_1^{i_1} e_{i_1}\Big)\wedge\dots\wedge\Big(\sum_{i_m=1}^m v_m^{i_m} e_{i_m}\Big)$$
$$= \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^m v_1^{i_1}\cdots v_m^{i_m}\, e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_m}$$
$$= e_1\wedge\dots\wedge e_m \sum_{i_1,\dots,i_m=1}^m v_1^{i_1}\cdots v_m^{i_m}\,\mathrm{sgn}\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m\\ 1 & \dots & m\end{pmatrix}$$
$$= \det\big(v_i^{j}\big)\, e_{1\dots m}\text{, dává tvrz.}$$

- Sami: $v_1\wedge\dots\wedge v_k$ = (využijte, že některé součty jsou nula pokud se index opakuje). ☒

2.2 DIFERENCIÁLNÍ FORMY V $\mathbb{R}^d$

Def. Označme $T^*(\mathbb{R}^d)$ vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ s bází $dx_1,\dots,dx_d$
$$= \Big\{\sum_{i=1}^d \alpha_i\, dx_i\ ;\ \alpha_i\in\mathbb{R}\Big\}$$

Def. Buď $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ otevřená. Řekneme, že $\omega:\Omega\to\Lambda^k(T^*)$ je *diferencovatelná k-forma*, pokud existují $\omega_I:\Omega\to\mathbb{R}$ hladké (tj. $\omega_I\in C^\infty(\overline{\Omega})$) taková, že
$$\omega(x)=\sum_{|I|=k}\omega_I(x)\,(dx)_I$$

$\mathcal{E}^k(\Omega)=\mathcal{E}^k$ .... množina všech diferencovatelných k-forem

$\mathcal{E}^*(\Omega)=\mathcal{E}^* = \bigoplus_{k=0}^d \mathcal{E}^k$ ... množina všech dif. forem

Speciálně:

$$\mathcal{E}^0(\Omega)\cong C^\infty(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{R} \text{ hladkých}\}\qquad dx_\emptyset=1$$
$$\mathcal{E}^1(\Omega)\cong [C^\infty(\Omega)]^d=\{\omega=f_1(x)dx_1+\dots+f_d(x)dx_d,\ f_i\in C^\infty(\Omega)\}$$

Pokud $\vec f=(f_1,\dots,f_d)=\nabla g$, pak $\underline{\omega=dg}$?

$$\mathcal{E}^{d-1}(\Omega)\cong[C^\infty(\Omega)]^d=\Big\{\omega=\sum_{i=1}^d f_i(x)(-1)^{i+1}dx_1\wedge\dots\wedge\widehat{dx_i}\wedge\dots\wedge dx_d,\ f_i\in C^\infty(\Omega)\Big\}$$

$d=3$
$\mathcal{E}^2=\{\omega=f_1(x)\,dx_2\wedge dx_3 - f_2(x)\,dx_1\wedge dx_3 + f_3(x)\,dx_1\wedge dx_2$
$= f_1(x)\,dx_2\wedge dx_3 + f_2(x)\,dx_3\wedge dx_1 + f_3(x)\,dx_1\wedge dx_2\}$

$$\mathcal{E}^d(\Omega)\cong C^\infty(\Omega)\ \text{... pseudoskalár}$$
$$=\{\omega=f(x)\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_d\}.$$

motivuje následující definici vnějšího diferenciálu.

Def. (vnější diferenciál) Vnější diferenciál d je zobrazení z $\mathcal{E}^k(\Omega)$ do $\mathcal{E}^{k+1}(\Omega)$ dané těmito pravidly:

(1) $f \in \mathcal{E}^0(\Omega) \longmapsto df(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i$

(2) $f \in \mathcal{E}^k(\Omega) \longmapsto df \in \mathcal{E}^{k+1}(\Omega): \quad df(x) = \sum_{|I|=k} df_I(x) \wedge dx_I$

" $\sum_{|I|=k} f_I(x)\, dx_I$

Př. (1) $d\Big(\underbrace{x_2\,dx_1 - x_1 \sin x_2\, dx_2}_{\mathcal{E}^1(\mathbb{R}^2)}\Big) = \underbrace{dx_2 \wedge dx_1 - \sin x_2\, dx_1 \wedge dx_2}_{\mathcal{E}^2(\mathbb{R}^2)} - x_1 \cos x_2\, dx_2 \wedge dx_2$

$= \underline{-(1 + \sin x_2)\, dx_1 \wedge dx_2}$

(2) $d(x_1 x_2\, dx_1 \wedge dx_3) = -x_1\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$

(3) $d(x^2\, dy \wedge dz + yz\, dx \wedge dz) = 2x\, dx \wedge dy \wedge dz + z\, dy \wedge dx \wedge dz + y \underbrace{dz \wedge dx \wedge dz}_{=0}$

$= \underline{\underline{(2x - z)\, dx \wedge dy \wedge dz}}$

Věta 2.2 Buď $p, q \in \{0, 1, \dots, d\}$. Pak

(1) $\forall \omega, \tau \in \mathcal{E}^*(\Omega): \quad d(\omega + \tau) = d\omega + d\tau$

(2) $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega),\ \tau \in \mathcal{E}^q(\Omega): \quad d(\omega \wedge \tau) = d\omega \wedge \tau + (-1)^p\, \omega \wedge d\tau$

(3) $\forall \omega \in \mathcal{E}^p(\Omega): \quad d(d\omega) = 0.$

Dk. Ad (1) SAMI

Ad (2) ukážeme pro $\omega = \omega_I\, dx_I$, $\tau = \tau_J\, dx_J$, $|I| = p$, $|J| = q$, $I, J \subset \{1, \dots, d\}$

$$
\begin{aligned}
d(\omega \wedge \tau) &= d(\omega_I \tau_J\, dx_I \wedge dx_J) \\
&= d(\omega_I \tau_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \Big(\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial(\omega_I \tau_J)}{\partial x_i}\, dx_i \Big) \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} \tau_J\, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i} \omega_I\, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I \wedge \tau_J\, dx_J + \sum_{i=1}^{d} \omega_I \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_I \wedge dx_J \\
&= \quad -\!\!\shortparallel\!\!- \quad + (-1)^p\, \omega_I\, dx_I \wedge \sum \frac{\partial \tau_J}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_J \\
&= d(\omega_I\, dx_I) \wedge \tau_J\, dx_J + (-1)^p (\omega_I\, dx_I) \wedge d(\tau_J\, dx_J) \\
&= d\omega \wedge \tau + (-1)^p\, \omega \wedge d\tau
\end{aligned}
$$

k dokončení důkazu využijte linearity pro obecné

Stačí dokázat pro $\omega = \omega_I \, dx_I \in \mathcal{E}^p(\Omega)$

Ad (3) Indukce: $\omega = f \, dx_\emptyset = f \in \mathcal{E}^0(\Omega)$

$$\Rightarrow d(df) = d\left(\sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, dx_i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_j \wedge dx_i\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\, dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\, dx_2 \wedge dx_1 +$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}\, dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1}\, dx_3 \wedge dx_1 +$$
$$\dots\dots = 0.$$

Indukční krok: nechť tvrzení platí pro $\omega = \omega_I \, dx_I \in \mathcal{E}^{p-1}$ a uvažujme $\omega = \omega_I \, dx_I \in \mathcal{E}^p$, $I = \{i_1, \dots, i_p\}$, $1 \le i_1 \le \dots \le i_p \le d$.

$$d(d\omega) = d\left(d(\omega_I \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p})\right) = d\left(d\omega_I \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}\right)$$
$$\overset{(2)}{=} \underbrace{d(d\omega_I \wedge \dots \wedge dx_{i_{p-1}})}_{=0} \wedge dx_{i_p} + (-1)^p (d\omega_I \wedge \dots dx_{i_{p-1}}) \wedge \underbrace{d(dx_{i_p})}_{=0}$$

dle indukčního předp.

Definice Říkáme, že
- $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ je uzavřená, pokud $d\omega = 0$
- $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$ je exaktní, pokud existuje $\tau \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$ takže $\boxed{d\tau = \omega}$

Pozorování

(1) Dle V 2.2, část (3) vidíme, že platí: "exaktní" $\Rightarrow$ "uzavřená"

Naopak obecně neplatí (viz kapitola o fcích více proměnných: Ω jednoduše souvislá oblast; $\vec{T} = (T_1, \dots, T_m)$ má potenciál $\Leftrightarrow \mathrm{rot}\,\vec{T} = \vec{0}$.)

Protipříklad:

Poincarého lemma: Buď Ω koule v $\mathbb{R}^n$ (nebo hvězdicovitá oblast). Pak uzavřená ~~forma~~ forma je exaktní.

(2) $$\mathcal{E}^0(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(\Omega) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(\Omega) \to \dots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^d(\Omega)$$ de Rhamův komplex

komplex: složení dvou po sobě následujících zobrazení je triviální $d(d\omega) = 0$.

$\boxed{2.3}$ Přenos dif. forem

- Máme $\Phi : \mathcal{U} \xrightarrow{na} \Omega$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ otev., $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otev. $\quad \Phi(u) = x \quad$ neboli $\vec{\Phi}(u_1, \dots, u_k) = \vec{x}$

neboli
$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(u_1, \dots, u_k) \\ &\vdots \\ x_d &= \phi_d(u_1, \dots, u_k) \end{aligned}}$$

- $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$ $\quad \omega = \sum_{|I|=p} \omega_I e_I \iff \omega(x) = \sum_{|I|=p} \omega_I(x) e_I$ $\qquad I \doteq i_1 < i_2 < \dots < i_p$

Def $\phi^* : \mathcal{E}^p(\Omega) \to \mathcal{E}^p(\Omega)$ předpisem

$$\phi^*(\omega)(u) = \sum_{|I|=p} (\omega_I \circ \phi)(u) \, (d\phi)_I$$

$$= \sum_{|I|=p} (\omega_I \circ \phi)(u) \, d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_p}$$

kde $\quad d\phi_{i_s} = \sum_{j_s=1}^{k} \frac{\partial \phi_{i_s}(u)}{\partial u_{j_s}} du_{j_s}$

$\boxed{\text{Věta 2.3}}$ Buď $\omega \in \mathcal{E}^p(\Omega)$, $\Omega, \mathcal{U}, \Phi$ jako výše a $\tau \in \mathcal{E}^q(\Omega)$. Pak

(1) $\phi^*(\omega + \tau) = \phi^*(\omega) + \phi^*(\tau)$ pokud $p = q$

(2) $\phi^*(\omega \wedge \tau) = \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\tau)$ (p, q lib.)

(3) $\phi^*(d\omega) = d(\phi^*(\omega))$

(4) Je-li $\psi : V \to \mathcal{U}$, kde $V \subset \mathbb{R}^s$ otev., pak $(\phi \circ \psi)^*(\omega) = \psi^*(\phi^*(\omega))$

(5) Je-li $k = d$, $\omega \in \mathcal{E}^d(\Omega)$ tj $\omega(x) = f(x) \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$, $x = \phi(u)$

Pak
$$\phi^*(\omega)(u) = \det \left(\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_d)}{\partial(u_1, \dots, u_d)} \right) (f \circ \phi)(u) \, du_1 \wedge \dots \wedge du_d.$$

Dk Ad (1) plyne z věty o der. součtu

Ad (2) Uvaž nejdříve $\quad \omega(x) = \omega_I(x) \, dx_I \quad$ a $\quad \tau(x) = \tau_J(x) \, dx_J$

Pak
$$\phi^*(\omega \wedge \tau) = \phi^*(\omega_I(x) \tau_J(x) \, dx_I \wedge dx_J) = \phi^*(\omega_I(x) \tau_J(x) \, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q})$$

$$= (\omega_I \circ \phi)(u) (\tau_J \circ \phi)(u) \, d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge (d\phi)_{i_p} \wedge d\phi_{j_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{j_q}$$

$$= (\omega_I \circ \phi)(u) \underbrace{d\phi_{i_1} \wedge \dots \wedge (d\phi)_{i_p}}_{(d\Phi)_I} \wedge (\tau_J \circ \phi) (d\Phi)_J$$

$$= \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\tau)$$

Pokud obecně: $\quad \omega = \sum_{|I|=p} \omega_I \, dx_I$, $\quad \tau = \sum_{|J|=q} \tau_J \, dx_J \implies$

$$\phi^*(\omega \wedge \tau) = \phi^*\Big(\sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \omega_I \tau_J \, dx_I \wedge dx_J \Big) \overset{(1)}{=} \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} (\omega_I \circ \phi)(\tau_J \circ \phi) \, d\Phi_I \wedge d\phi_J$$

$$= \sum_{|I|=p, |J|=q} \phi^*(\omega_I \, dx_I \wedge \tau_J \, dx_J) = \sum_{|I|=p} \phi^*(\omega_I \, dx_I) \wedge \sum_{|J|=q} \phi^*(\tau_J \, dx_J) \overset{(1)}{=} \phi^*(\omega) \wedge \phi^*(\tau)$$

Ad (3) $\boxed{\omega = \omega_I \, dx_I}$ $|I| = p$

- $\phi^*(d\omega) = \phi^*\left(\sum_{s=1}^{d} \frac{\partial \omega_I}{\partial x_s} dx_s \wedge dx_I\right) = \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial(\omega_I \circ \phi)(u)}{\partial x_s} (d\phi)_s \wedge (d\phi)_{i_1} \wedge \dots \wedge (d\phi)_{i_p}$

- $d(\phi^*(\omega)) = d\left((\omega_I \circ \phi) \, d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\phi_{i_p}\right) = \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial(\omega_I \circ \phi)}{\partial u_l} (du)_l \wedge d\Phi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\Phi_{i_p}$

Zbývá tedy dokázat:

$$\sum_{s=1}^{d} \frac{\partial(\omega_I \circ \phi)}{\partial x_s} d\Phi_s \overset{?}{=} \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial(\omega_I \circ \phi)}{\partial u_l} (du_l)$$

Avšak: $\sum_{l=1}^{k} \frac{\partial(\omega_I \circ \phi)}{\partial u_l} du_l = \sum_{l=1}^{k} \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial(\omega_I \circ \phi)}{\partial x_s} \frac{\partial \Phi_s(u)}{\partial u_l} du_l = \sum_{s=1}^{d} \frac{\partial(\omega_I \circ \phi)}{\partial x_s} \underbrace{\sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \phi_s(u)}{\partial u_l} du_l}_{d\Phi_s}$ = c.b.d.

Ad (4)

$$(\phi \circ \psi)^*(\omega) = (\omega_I \circ \phi \circ \psi)(y) \, d(\phi \circ \psi)_I = (\omega_I \circ \phi \circ \psi)(y) \frac{\partial(\phi \circ \psi)_{i_1}}{\partial y_{j_1}} dy_{j_1} \dots = \text{A}$$

$$\psi^*(\phi^*(\omega)) = \psi^*\left((\omega_I \circ \phi)(d\Phi)_I\right) = \psi^*\left((\omega_I \circ \phi)\left(\frac{\partial \Phi_{i_1}}{\partial u_{j_1}} du_{j_1}\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial \phi_{i_p}}{\partial u_{j_p}} du_{j_p}\right)\right)$$

$$= (\omega_I \circ \phi \circ \psi)\left(\frac{\partial(\phi_{i_1} \circ \psi)}{\partial u_{j_1}} d\psi_{j_1}\right) \wedge \left(\frac{\partial \phi}{-}\right) \wedge \frac{\partial(\phi_{i_p} \circ \psi)}{\partial u_{j_p}} d\psi_{j_p} = \text{A}$$

Ad (5)

$$\phi^*(\omega)(x) = (f \circ \phi)(u) \, (d\phi)_1 \wedge \dots \wedge (d\phi)_d \overset{\text{V 2.1 (iv)}}{=} (f \circ \Phi)(u) \left(\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_d)}{\partial(u_1, \dots, u_d)}\right) du_1 \wedge \dots \wedge du_d$$

☒

2.4 INTEGRACE DIFERENCIÁLNÍCH FOREM.

Definice (i) $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otev., $\omega(x) = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$

$$\int_\Omega \omega \overset{\text{df.}}{=} (\mathcal{L}) \int_\Omega f \quad \left(= (\mathcal{L}) \int_\Omega f(x) \, dx_1 \dots dx_d\right)$$ pokud Lebesgueův $\int$ existuje

(ii) $\Phi : U \subset \mathbb{R}^k \to \Omega$ hladké a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$

$$\int_\Omega \omega \overset{\text{df.}}{=} \int_U \phi^*(\omega)$$

Př. $\omega \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^d)$ $\quad \omega(x) = f_1(x) dx_1 + \dots + f_d(x) dx_d$ $\quad \phi : (a,b) \to \mathbb{R}^d$ křivka v $\mathbb{R}^d$

$$\int_{\langle\phi\rangle} \omega = \int_{(a,b)} \phi^*(\omega) = \int_a^b \left[(f_1 \circ \phi) \phi_1'(t) + \dots + (f_d \circ \phi) \phi_d'(t)\right] dt = \text{křivkový integrál II. druhu}$$

$$\int_{\langle\phi\rangle} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\langle\phi\rangle} F_1 dx_1 + \dots F_d dx_d = \int_a^b \sum_{i=1}^{d} (F_i \circ \phi) \phi_i'(t) \, dt$$

$\omega = x\,dy - y\,dx \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^2)$, $\Omega = \partial B_1(0)$ $\quad \phi : \langle 0, 2\pi) \xrightarrow{\text{na}} \Omega : t \mapsto (\cos t, \sin t)$

$t \mapsto (-\cos t, -\sin t)$

$$\int_\Omega \omega = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \, dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

$\int \omega = -2\pi$

Výsledek nezávisí na → počtu oběhů křivky, → orientaci

② $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad d=3 \qquad \phi : U^{\subset \mathbb{R}^2} \longrightarrow \Omega$

$$\phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v), \phi_3(u,v))$$

$$\omega = \omega_1 \, dx_2 \wedge dx_3$$

$$\int_{\langle\phi\rangle} \omega \underset{\text{def.(ii)}}{\overset{\text{dle}}{=}} \int_U \omega_1(\phi(u,v)) \, d\phi_2 \wedge d\phi_3$$

$$= \int_U \omega_1(\phi(u,v)) \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial u} du + \frac{\partial \phi_2}{\partial v} dv\right] \wedge \left[\frac{\partial \phi_3}{\partial u} du + \frac{\partial \phi_3}{\partial v} dv\right]$$

$$= \int_U \omega_1(\phi(u,v)) \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial u}\frac{\partial \phi_3}{\partial v} - \frac{\partial \phi_3}{\partial u}\frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right] du \wedge dv$$

$$\underset{\text{def.(i)}}{\overset{\text{dle}}{=}} \int_U \omega_1(\phi(u,v)) \det\left(\frac{\partial(\phi_2,\phi_3)}{\partial(u,v)}\right) du \wedge dv$$

$$= (\mathcal{L}) \int_U \omega_1(\phi(u,v)) \det\left(\frac{\partial(\phi_2,\phi_3)}{\partial(u,v)}\right) du\, dv$$

Plošný integrál 2. druhu

$$\phi(\sigma,\tau) = (\cos\sigma\cos\tau, \cos\sigma\sin\tau, \sin\sigma) : \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, 2\pi) \overset{\text{na}}{\longrightarrow} \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$$

$$\tilde{\phi}(\sigma,\tau) \overset{\text{def.}}{=} \phi(\tau,\sigma) \quad \text{pak} \quad \det\left(\frac{\partial(\tilde{\phi}_2,\tilde{\phi}_3)}{\partial(\tau,\sigma)}\right) = -\det\left(\frac{\partial(\phi_2,\phi_3)}{\partial(\tau,\sigma)}\right)$$

$$\det\left(\frac{\partial(\phi_2,\phi_3)}{\partial(\sigma,\tau)}\right) = \det\begin{pmatrix} -\sin\sigma\sin\tau & \cos\sigma \\ \cos\sigma\cos\tau & 0 \end{pmatrix} = -\cos^2\sigma\cos\tau$$

$$\det\left(\frac{\partial(\tilde{\phi}_2,\tilde{\phi}_3)}{\partial(\sigma,\tau)}\right) = \det\begin{pmatrix} +\cos\sigma\cos\tau & 0 \\ -\sin\sigma\sin\tau & \cos\sigma \end{pmatrix} = \cos^2\sigma\cos\tau$$

$$\Rightarrow \int_{\langle\tilde{\phi}\rangle} \omega = -\int_{\langle\phi\rangle} \omega$$

Hodnota integrálu závisí na volbě parametrizace

Problémy:
- změna orientace → $\det\left(\frac{\partial(\phi_2,\phi_3)}{\partial(u,v)}\right)$ nemění znaménko
- několikanásobné obíhání → prostota ϕ

(Řešení)

Def. $\varphi : U' \to U$, $U', U \subset \mathbb{R}^k$ otevřené

φ je difeomorfismus $\stackrel{df.}{\equiv}$ $\varphi : U' \to U$ je prosté, na, hladké a φ^{-1} je hladké ($\in C^\infty$)

Def.
- Parametrizace plochy S v $\mathbb{R}^d$ $\equiv$ hladké zobrazení $\phi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ tak, že $\phi(U) = S$
- Parametrizace je regulární na U $\equiv$ $\dfrac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_d)}{\partial(u_1, \dots, u_k)}$ má hodnost k
- Dvě parametrizace $\phi : U \to \mathbb{R}^d$, $\phi(U) = S$ a $\phi' : U' \to \mathbb{R}^d$, $\phi(U') = S$ jsou souhlasně orientované, píšeme $\phi \sim \phi'$ $\equiv$ $\exists\, \alpha : U' \to U$ difeomorfismus tak, že $\det J_\alpha > 0$ na U', $\phi' = \phi \circ \alpha$
- Pokud $\exists\, \alpha : U' \to U$ difeomorfism tak, že $\phi' = \phi \circ \alpha$ a $\det J_\alpha < 0$ pak ϕ a ϕ' jsou nesouhlasně orient.

Věta 2.4 (Nezávislost integrace diff. forem na parametrizaci až na znaménko)
Buď $\phi \sim \phi'$ (resp. $\phi \not\sim \phi'$) dvě souhlasné (resp. nesouhlasné) parametrizace S a $U \in \mathbb{R}^k$ resp. $U' \subset \mathbb{R}^k$. Buď $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Pak
$$\int_{\langle\phi\rangle} \omega = \int_{\langle\phi'\rangle} \omega \quad \left(\text{resp. } \int_{\langle\phi\rangle} \omega = -\int_{\langle\phi'\rangle} \omega\right)$$

Nejdříve pomocné práce:

Def: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ~~...~~ souvislé $\equiv$ $(\forall x, y \in \Omega)$ $\exists$ spoj. zobr. $\varphi : (a,b) \to \Omega$ $\varphi(a) = x$, $\varphi(b) = y$

Lemmátko: Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ souvislé a $F : \Omega \to$ spoj. $\Rightarrow$ $F(\Omega)$ ~~...~~ souvislé

Lemma: Buď U' souvislé, $\alpha : U' \to U$ difeomorfismus. Pak $\det J_\alpha$ má konstantní znaménko na U' (sgn $\det J_\alpha$ = konst.)

(Dk) Založen na 4 pozorováních

(1) $\alpha \in C^\infty(U') \Rightarrow \det J_\alpha \in C^\infty(U')$

(2) $\alpha^{-1} \in C^\infty(U) \Rightarrow \det J_{\alpha^{-1}} \in C^\infty$

(3) $\alpha \circ \alpha^{-1} = Id \Rightarrow \det J_\alpha \det J_{\alpha^{-1}} = 1 \Rightarrow \det J_\alpha \neq 0$

(4) $\underset{\text{spoj.}}{\det J_\alpha} : \underset{\text{souvislé}}{U'} \xrightarrow{\text{do}} (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \stackrel{\text{lemmátko}}{\Rightarrow} \det J_\alpha$ je buď záporný všude v U' nebo kladný všude v U.

$\boxed{\text{Dk V2.4}}$ $\omega = \sum_{|I|=k} \omega_I(x)(dx)_I$

[1] $\int_{\langle\phi\rangle} \omega \overset{\text{Df.(ii)}}{=} \int_U \phi^*(\omega) = \int_U (\omega_I \circ \phi)(d\phi)_I \underset{\text{k-forma v } \mathbb{R}^k}{=} \int_U f(u)\, du_1 \wedge \dots \wedge du_k$

$\overset{\text{Df.(i)}}{=} (\mathcal{L}) \int_U f(u)\, du_1 \dots du_k \underset{\text{subst.}}{\overset{\text{věta o}}{=}} \int_{U'} (f\circ\alpha)(u')\,|\det J_\alpha|\, du_1' \dots du_k'$

[2] Protože $\phi \sim \phi'$ (nebo $\phi \nsim \phi'$) existuje $\alpha: U' \to U$ takové, že $\phi' = \phi\circ\alpha$, $\det J_\alpha > 0$ (resp. < 0)

Dle V 2.3

$$\boxed{(\phi')^*(\omega) = (\alpha^* \circ \phi^*)(\omega) \quad (*)}$$

Dle výše uvedeného $\phi^*(\omega)(u) = f(u)\, du_1 \wedge \dots \wedge du_k$

a podobně $(\phi')^*(\omega)(u') = \underline{g(u')\, du_1' \wedge \dots \wedge du_k'}$

a dále $(\phi')^*(\omega)(u') \overset{(*)}{=} (\alpha^*\circ\phi^*)(\omega) = \alpha^*(\phi^*(\omega))$

$= (f\circ\alpha)(u')\, d\alpha_1 \wedge \dots \wedge d\alpha_k$

$\overset{\text{V2.3}}{=} \underline{(f\circ\alpha)(u') \det J_\alpha\, du_1' \wedge \dots \wedge du_k'}$

Porovnáním podtržených $g(u') = (f\circ\alpha)(u') \det J_\alpha$

[3] $\int_{\langle\phi'\rangle} \omega \overset{\text{Df.(ii)}}{=} \int_{U'} (\phi')^*(\omega) = \int_{U'} g(u')\, du_1' \wedge \dots \wedge du_k' = \int (f\circ\alpha)(u') \det J_\alpha\, du_1' \wedge \dots \wedge du_k'$

a porovnáním s výsledkem kroku [1] dostáváme výsledek. $\boxed{\text{QED}}$

Def. $\boxed{S \subseteq \mathbb{R}^d \text{ je plocha dimenze nejvýše } k}$ $\equiv$ $\exists\, U \subseteq \mathbb{R}^k$ oblast (otevřená a souvislá)
a $\exists\, \phi: U \to \mathbb{R}^d$ hladké takové, že $\phi(U) = S$
(neboli ϕ je parametrizace S)

$\boxed{S \subseteq \mathbb{R}^d \text{ je regulární plocha dimenze } k}$ $\equiv$ $\exists\, I \subseteq \mathbb{R}^k$ interval (což je určitě oblast)
a $\exists\, \phi: I^o \to \mathbb{R}^d$ takové, že

- ϕ je hladké ($\phi \in C^\infty$)
- $\phi(I^o) = S$
- ϕ je prosté
- ϕ $\frac{\partial(\phi_1, \dots, \phi_m)}{\partial(u_1, \dots, u_k)}$ má hodnost k $\forall\, u \in I^o$

Φ je regulární parametrizace S definovaná na vnitřku intervalu I^o

Věta 2.5 Existují právě dvě třídy ekvivalence regulárních parametrizací regulárních ploch dimenze k v $\mathbb{R}^d$.

Dk Buď $S \subset \mathbb{R}^d$ libovolná, ale pevná regulární plocha dimenze k.

KROK 1 Uvědomíme si, že stačí ukázat:

(*) Pro libovolné dvě regulární parametrizace S, a to $\varphi : I^0 \to \mathbb{R}^d$ ($I^0 \subset \mathbb{R}^k$) a $\varphi' : I_0' \to \mathbb{R}^d$ s $\langle\varphi\rangle = \langle\varphi'\rangle = S$, existuje difeomorfismus $\alpha : (I_0^0)' \to I^0$ tak, že $\varphi' = \varphi \circ \alpha$

Vskutku, jakmile (*) platí, pak φ je buď souhlasně orient. s φ' (a to pokud $\det J_\alpha > 0$ v I_0') nebo nesouhlasně orient. s φ' (a to pokud $\det J_\alpha < 0$ v I_0')

Víme, že se znaménko $\det J_\alpha$ v I_0' nemění.

KROK 2 Důkaz (*) Definuj $\alpha : \varphi^{-1} \circ \varphi'$. S použitím věty o inverzním zobrazení, věty o derivování slož. fce a s využitím vlastností φ a φ' chceme nahlédnout ~~již poměrně snadno~~, ~~že~~ ~~[illegible]~~ že α je hledaný difeomorfismus.

Není úplně triviální, neb nevíme na $\varphi'((I_0^0)') = S$, jak diferencovat.

Protože je φ regulární (tak $\forall u \in I^0$ je hodnost $\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_d)}{\partial(u_1, \dots, u_k)}$ rovna k) tak pro $\forall u \in I^0$ existují $\{i_1, \dots, i_k\}$ tak, že $\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_k})}{\partial(u_1, \dots, u_k)}(u) \neq 0$

Označme $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ (projekci, která $(\mu_1, \dots, \mu_d)$ převádí $(\mu_{i_1}, \dots, \mu_{i_k})$)

Pak $\pi \circ \varphi$ má nenulový determinant v $u \in I^0$ a dle věty o inverzním zobrazení existuje $(\pi \circ \varphi)^{-1}$ na okolí $\pi(\varphi(u))$

Avšak $\varphi^{-1} \circ \varphi' = (\pi \circ \varphi)^{-1} \circ (\pi \circ \varphi')$ je hladké zobrazení v bodě $(\varphi')^{-1} \circ \varphi(u)$

Podobně: $(\varphi')^{-1}$ je hladké a tedy $(\varphi')^{-1} \circ \varphi = \alpha^{-1}$ (čímž ukážeme existenci hladké inverze), které musí být prosté a pro na.

$\Rightarrow$ α je difeomorfismus

Def. • S je orientovaná (plocha pokud S je) regulární plocha dimense k v $\mathbb{R}^d$ a k S je přiřazena jedna třída ekvivalentních reg. parametrizací

• Jakékoliv dvě parametrizace z této třídy jsou definice kladně orientované parametrizace.

• Je-li S orientovaná plocha, pak $-S$ označuje tutéž plochu opatřenou druhou třídou ekvivalence regulárních parametrizací.

$\boxed{\text{Def.}}$ • S orientovaná plocha dimense k, $S \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$
• $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$

$$\left.\right\} \Rightarrow \int_S \omega = \int_{\langle\varphi\rangle} \omega = \int_{\langle U\rangle} \varphi^*(\omega)$$

kde φ je lib. regulární parametrizace

$\boxed{\text{Věta 2.6}}$ Buď S orientovaná plocha dimense k a $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Pak $\int_S \omega$ nezávisí na volbě φ.

Dk: Buď φ, φ' dvě regulární parametrizace S. Protože S je orientovaná tak, $\varphi \sim \varphi'$ a dle věty 2.4 $\int_{\langle\varphi\rangle} \omega = \int_{\langle\varphi'\rangle} \omega$. ☐

Př. ① $t \in [1,2] \to \varphi(t) = (t, 2t)$
$t \in [-2,-1] \to \tilde\varphi(t) = (-t, -2t)$ $\Rightarrow \langle\tilde\varphi\rangle = -\langle\varphi\rangle$

② $S = \varphi(t,\theta) = (\cos t \cos\theta, \sin t \cos\theta, \sin\theta) : \underbrace{(0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}_{U}$

$\tilde\Phi(t,\theta) = \varphi(\theta,t) = (\cos\theta \cos t, \sin\theta \cos t, \sin t) : \underbrace{\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\times(0,2\pi)}_{U'}$

$\alpha : U' \to U : (\theta, t) \to (t,\theta)$
$\det J_\alpha = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$ $\Big\} \Rightarrow \varphi \not\sim \varphi'$

$\tilde S := \langle\Phi\rangle = -S$

VŠIMNI, ŽE NEINTEGRUJEME PŘES CELOU SFÉRU

③ Orientace ploch vs orientace vektorového prostoru

V ... 2 báze souhlasně orientovány pokud determinant matice přechodu je kladný

(i) • konvence: kanonické báze v $\mathbb{R}^d$ jsou kladně orientovány

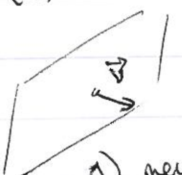
dim 1 zleva doprava

2 v_2, v_1 $\theta < \pi$

3 v_2, v_1 pravidlo pravé ruky

(ii) • $\dim W = d-1$ $\dim V = d$ $W \subset V$ s bází $\{w_1, \dots, w_{d-1}\}$

W je kladně orientovaná plocha - jeli $\{w_1, \dots, w_{d-1}, v\}$ kladně orient. báze v $\mathbb{R}^d$.



Problém 1) neumíme integrovat kompaktní množ.
2) umět integrovat přes hranici Ω nebo alespoň přes hranici intervalu

$\boxed{\text{Def.}}$ Zobecnění plochy

Buď $M \subseteq \mathbb{R}^d$, a $M_1, \dots, M_s \subseteq \mathbb{R}^d$ regulární plochy dimenze k a $N \subseteq \mathbb{R}^d$ taková, že

(1) $M = N \cup \bigcup_{i=1}^{s} M_i$

(2) $\exists N_1, \dots, N_r$ plochy dimenze $k-1$ taková, že $N \subset \bigcup_{i=1}^{r} N_i$

Pak $\{M_i, N\}$ nazveme přípustný rozklad M a M je zobecněná plocha dimenze k

Orientovat $M \overset{def}{\equiv}$ orientovat M_i

Rozklady $\{M_i, N\}_{i=1}^{s}$ a $\{M'_i, N'\}_{i=1}^{s'}$ jsou souhlasně orientované $\equiv \forall (i,j)$, $i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{1, \dots, s'\}$ plochy M_i a M'_j jsou souhlasně orientovány na $M_i \cap M'_j$

Kladně orientovaný rozklad $\equiv$ každý rozklad souhlasně orientovaný s rozkladem, jehož části M_i jsou kladně orientované.

$\boxed{\text{Definice}}$ Buď M zobecněná orientovaná plocha dimenze k v $\mathbb{R}^d$, $M \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Pak $\int_M \omega \equiv \sum_{i=1}^{s} \int_{M_i} \omega$

$\boxed{\text{Věta 2.7}}$ $\int_M \omega$ nezávisí na volbě rozkladu.

Dk. $\dim M = k$. Buď $\{M_i, N\}$, $\{M'_i, N'\}$ dva souhlasně orientované rozklady. Pak pro $\forall (i,j)$ $\exists \phi_i, \phi'_j$ taková, že $\phi_i : I_i^0 \xrightarrow{na} M_i$ a $\phi'_j : I_j^0 \xrightarrow{na} M'_j$. Určitě platí

$$M_i = (M_i \cap M'_1) \cup (M_i \cap M'_2) \cup \dots \cup (M_i \cap M'_{s'}) \cup (M_i \cap N')$$
$$M'_j = (M'_j \cap M_1) \cup (M'_j \cap M_2) \cup \dots \cup (M'_j \cap M_s) \cup (M'_j \cap N)$$

a počítejme

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{s} \int_{M_i} \omega = \sum_{i=1}^{s} \int_{I_i} \phi_i^*(\omega) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{s'} \int_{\phi_i^{-1}(M_i \cap M'_j)} \phi_i^*(\omega) + \sum_{i=1}^{s} \underbrace{\int_{\phi_i^{-1}(M_i \cap N')} \phi_i^*(\omega)}$$

a také

$$\int_M \omega = \sum_{j=1}^{s'} \int_{M'_j} \omega = \sum_{j=1}^{s'} \int_{I'_j} (\phi'_j)^*(\omega) = \sum_{j=1}^{s'} \sum_{i=1}^{s} \int_{\phi'^{-1}_j(M'_j \cap M_i)} (\phi'_j)^*(\omega) + \sum_{j=1}^{s'} \underbrace{\int_{\phi'^{-1}_j(M'_j \cap N)} (\phi'_j)^*(\omega)}$$

množina míry nula

Avšak $\phi'_j \sim \phi_i$ na $M_i \cap M'_j$ dle definice souhlasně orientovaných rozkladů a tak, dle Věty 2.6

$$\int_{(\phi'_j)^{-1}(M'_j \cap M_i)} (\phi'_j)^*(\omega) = \int_{\phi_i^{-1}(M_i \cap M'_j)} \phi_i^*(\omega).$$

Tvrzení je dokázáno.

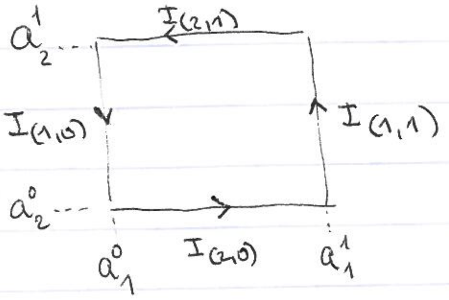
Definice Buď $I \subset \mathbb{R}^d$ interval, $I = \langle a_1^0, a_1^1) \times \dots \times \langle a_m^0, a_m^1)$

Označme $I_{(i,\alpha)} : (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_d) \longmapsto (u_1, \dots, u_{i-1}, a_i^\alpha, u_{i+1}, \dots, u_d)$ kde $\alpha = 0$ nebo 1.

Pak

$$\partial I = \sum_{j=1}^{d} (-1)^j \left(I_{(j,0)} - I_{(j,1)} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{j+\alpha} I_{(j,\alpha)}$$



Je-li M regulární plocha dimenze k, pak $\partial M = \varphi \circ \partial I$ $\quad \varphi : I^0 \to M$

je-li M obecná plocha dimenze k, pak $\partial M = \sum_{i=1}^{s} \partial M_i$

Věta 2.8 (STOKESOVA VĚTA)

Buď M obecná plocha dimenze k, $M \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Buď $\omega \in \mathcal{E}^k(\Omega)$. Pak

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Dk **Krok ①** Uvažujme nejdříve situaci: $M = I \subseteq \mathbb{R}^d$, $\omega \in \mathcal{E}^{d-1}(\Omega)$, $I \subset M$

$\left(\begin{array}{l} d=2 \\ \omega = f_1(x)\,dx_2 - f_2(x)\,dx_1 \end{array} \right)$

Pak $\omega = \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j+1} f_j(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_d$

a

$$d\omega = \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j+1} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d = \sum_{j=1}^{d} \underbrace{(-1)^{j+1+j-1}}_{=1} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$$

$$= \operatorname{div} \vec{f} \; dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d \in \mathcal{E}^d(\Omega) \text{ předpokladem}$$

Tedy

$$\int_M d\omega = (\mathcal{L}) \int_I \sum \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_1 \dots dx_d$$

Naopak, výpočet ~~...~~ pravé strany dává:

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial I} \omega = \sum_{j=1}^{d} \sum_{\alpha=0}^{1} \int_{I_{(j,\alpha)}} (-1)^{j+\alpha} \omega = \sum_{j=1}^{d} \sum_{\alpha=0}^{1} \sum_{i=1}^{d} \int_{I_{(j,\alpha)}} (-1)^{j+i+\alpha+1} f_i(x)\, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_d$$

$$= \sum_{j=1}^{d} \sum_{i=1}^{d} \sum_{\alpha=0}^{1} \int_{I_i^{d-1}} (-1)^{j+i+\alpha+1} (f_i \circ I_{(j,\alpha)}) \left(dI_{(j,\alpha)}\right)_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\left(dI_{(j,\alpha)}\right)_i} \wedge \dots \wedge \left(dI_{(j,\alpha)}\right)_d$$

$d(I_{(j,\alpha)})_i = du_i \quad j \in \{1, \dots, j-1\}$

$d(I_{(j,\alpha)})_i = 0 \quad j = j$

$d(I_{(j,\alpha)})_i = du_{i-1} \quad j \in \{j+1, \dots, m\}$

$$= \sum_{j=1}^{d} \sum_{\alpha=0}^{1} \int_{I_i^{d-1}} (-1)^{\alpha+1} (f_i \circ I_{(i,\alpha)})\, du_1 \wedge \dots \wedge du_{d-1}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int_{I_i^{d-1}} \left[f_i(u_1, \dots, u_{i-1}, a_i^1, u_{i+1}, \dots, u_d) - f_i(u_1, \dots, u_{i-1}, a_i^0, u_{i+1}, \dots, u_d) \right] du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du_i} \wedge \dots \wedge du_d$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int_{I_i^{d-1}} \left[\int_{a_i^0}^{a_i^1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_d)\, du_i \right] du_1 \wedge \dots \wedge \widehat{du_i} \wedge \dots \wedge du_d$$

$$= (\mathcal{L}) \int_{I^{d}} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)\, dx_1 \dots du_d$$

a rovnost je dokázána

$\boxed{\text{krok ②}}$ Je-li M regulární plocha dim k, $\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(\Omega)$, $M \subset \Omega$. Pak existují

$$\phi : \bar{I} \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d, \quad \Phi(I^\circ) = M \quad \text{a} \quad \partial M = \phi \circ \partial I$$

a platí:

$$\int_{\underset{\phi(I^\circ)}{M}} d\omega = \int_I \phi^*(d\omega) \underset{V2.3}{=} \int_{I \subset \mathbb{R}^k} d\underbrace{(\phi^*(\omega))}_{\in \mathcal{E}^{k-1}} \overset{\text{krok ①}}{=} \int_{\partial I} \phi^*(\omega) = \int_{\partial M} \omega$$

$\boxed{\text{krok ③}}$ Je-li M zobecněná plocha dim. k: $M = \left(\bigcup_{i}^{s} M_i\right) \cup N$, pak

$$\int_M d\omega = \sum_i \int_{M_i} d\omega \overset{\text{krok ②}}{=} \sum_i \int_{\partial M_i} \omega = \int_{\partial M} \omega$$

Důsledky Stokesovy věty

Ⅰ $\boxed{d=2}$ $\boxed{k=1}$ $f \in \mathcal{E}^0 \Rightarrow \int_M \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(\phi(b)) - f(\phi(a))$

věta o potenciálu

obecněji

$d \in \mathbb{N}$, $k=1$ křivka, $f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \int_M \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_d} dx_d = f(\phi(b)) - f(\phi(a))$

Ⅱ $\boxed{d=2}$ $\boxed{k=2}$ $\omega \in \mathcal{E}^1$ $\quad \omega = E_1 dx_1 + E_2 dx_2$

$$\int_M \underbrace{\left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2}\right)}_{\text{curl } \vec{E} \text{ (prostor)}} dx_1 \wedge dx_2 = \int_{\partial M} E_1 dx_1 + E_2 dx_2$$

Greenova věta

Ⅲ $\boxed{d=3}$ $k=1$ $\omega \in \mathcal{E}^0$ viz výše

$k=2$ $\omega \in \mathcal{E}^1$ tzn. $\omega = E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3$

$$d\omega = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_2} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3$$

Stokesova věta

$$\int_M \text{rot}\, \vec{E} \cdot \underbrace{(dx_1 \wedge dx_2, dx_3 \wedge dx_1, dx_2 \wedge dx_3)}_{\vec{dx}} = \int_{\partial M} E_1 dx_1 + E_2 dx_2 + E_3 dx_3 = \int_{\partial M} \vec{E} \cdot \vec{dx}$$

$k=3$ $\omega = E_1 dx_2 \wedge dx_3 + E_2 dx_3 \wedge dx_1 + E_3 dx_1 \wedge dx_2$ $\quad$ 2-forma

Gauss-Ostrogradskij

$$\int_M \underbrace{\left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right)}_{\text{div } \vec{E}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = \int_{\partial M} \vec{E} \cdot \widehat{dx}$$

Speciálně

$$\vec{E} = (f, 0, 0) \Rightarrow \int_M \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_1 \dots dx_d = \int f \, \widehat{dx_1} = \int f \nu_i \, dS = \int f (\vec{dS})_i$$