MA2: Řešené příklady—Funkce více proměnných: Extrémy

1. Najděte a klasifikujte lokální extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$.

2. Najděte a klasifikujte lokální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^3 - 2x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + xz - yz + 3z$.

3. Najděte globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ vzhledem k podmínce

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0.$$

4. Najděte bod v rovině dané $x+y-z = 1$, který je nejblíže k bodu $P = (0,-3,2)$, a vypočítejte jejich vzdálenost. Použijte Lagrangeovy multiplikátory.

5. Jistá přímka v 3D je dána rovnicemi

$$x + y + z = 1, \qquad 2x - y + z = 3.$$

Najděte vzdálenost mezi touto přímkou a bodem $P = (1,2,-1)$.

6. Najděte globální extrémy $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ na konečné množině M vymezené křivkami $x^2 + (y+1)^2 = 4$, $y = -1$ a $y = x + 1$.

7. Najděte globální extrémy $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x + 6y$ na disku o poloměru 2 se středem v počátku.

8. Rovnice $y^2 + 2xy = 2x - 4x^2$ definuje implicitní funkci $y(x)$. Najděte a klasifikujte její lokální extrémy.

Řešení:

1. Nejprve najdeme stacionární body. Parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + 9y^2 + 30x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 18xy + 54y.$$

Máme je položit rovny nule. Dostáváme systém

$$2x^2 + 3y^2 + 10x = 0 \qquad xy + 3y = 0.$$

Druhá rovnice vypadá slibně, protože ji umíme přepsat jako $y(x+3) = 0$. Jsou tedy dvě možnosti:

1) $y = 0$. Pak první rovnice vlastně zní $x^2 + 5x = 0$, což dává $x = 0$ a $x = -5$. Tato možnost tedy vede na body $(0,0)$ a $(-5,0)$.

2) $x = -3$. Pak první rovnice zní $y^2 = 4$, což dává $y = \pm 2$ a body $(-3,\pm 2)$.

Dostáváme tedy čtyři stacionární body: $(0,0)$, $(-5,0)$, $(-3,2)$ a $(-3,-2)$.

K jejich klasifikaci potřebujeme najít derivace druhého řádu a vytvořit Hessovu matici:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x + 30, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 18y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18x + 54$$

$$H = \begin{pmatrix} 12x+30 & 18y \\ 18y & 18x+54 \end{pmatrix}$$

Teď tedy klasifikace.

Pro $(0,0)$ dostáváme $H = \begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 54 \end{pmatrix}$. Determinanty hlavních minorů (subdeterminanty) jsou $\Delta_1 = a_{11} = 30$ a $\Delta_2 = \det(H) = 30 \cdot 54 = 1620$. Jejich znaménka jsou $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, což ukazuje, že bod $f(0,0) = 0$ je lokální minimum.

Pro $(-5,0)$ máme $H = \begin{pmatrix} -30 & 0 \\ 0 & -26 \end{pmatrix}$. Subdeterminanty jsou $\Delta_1 = -30$ a $\Delta_2 = 780$. Jejich znaménka jsou $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, což ukazuje, že bod $f(-5,0) = 125$ je lokální maximum.

Pro $(-3,-2)$ máme $H = \begin{pmatrix} -6 & -36 \\ -36 & 0 \end{pmatrix}$. Subdeterminanty jsou $\Delta_1 = -6$ a $\Delta_2 = -(-36)^2$. Jejich znaménka jsou $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, toto nevyhovuje žádnému vzoru pro lokální extrém. Z $\Delta_2 < 0$ ale usoudíme, že $f(-3,2) = 81$ je sedlový bod.

Pro $(-3,2)$ máme $H = \begin{pmatrix} -6 & -36 \\ -36 & 0 \end{pmatrix}$. Subdeterminanty jsou $\Delta_1 = -6$ a $\Delta_2 = -36^2$. Jako v předchozím případě usoudíme z $\Delta_2 < 0$, že $f(-3,-2) = 81$ je sedlový bod.

Někteří lidé dávají přenost jinému přístupu, který je u rozumných derivací jednodušší, je také asi trochu organizovanější.
Nejprve si obecně spočítáme ty subdeterminanty, dostáváme $\Delta_1 = 12x + 30$ a
$\Delta_2 = (12x+30)(18x+54) - (18y)^2 = 36(6x^2 + 23x + 45 - 9y^2)$. Pak dosadíme stacionární body a učiníme závěry:

bod:	$(0,0)$	$(-5,0)$	$(-3,2)$	$(-3,-2)$
Δ_1:	$+$	$-$	$-$	$-$
Δ_2:	$+$	$+$	$-$	$-$
závěr:	lok. min.	lok. max.	sedlo	sedlo

Pak je třeba napsat odpověď: $f(0,0) = 0$ je lokální minimum, $f(-5,0) = 125$ je lokální maximum, $f(-3,2) = f(-3,-2) = 81$ jsou sedlové body.

2. Najprve najdeme stacionární body. Parciální derivace:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4x - 2y + z$, $\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x - z$, $\quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + x - y + 3$.
Máme vyřešit systém

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x - 2y + z &= 0 \\ 2y - 2x - z &= 0 \\ 2z + x - y + 3 &= 0 \end{aligned}$$

Tentokráte nemá žádná rovnice příjemný tvar součinu, takže předchozí metoda nepomůže. Další populární metoda je eliminace.
Protože máme v první rovnici x^2, zkusíme pomocí těch dalších odstranit z první rovnice y a z a pak použijeme kvadratický vzoreček. Z druhé rovnice si vyjádříme $z = 2y - 2x$ a dosadíme do první a třetí, dostaneme $3x^2 - 6x = 0$ a $3y - 3x = -3$. To je klika, v první rovnici už je jen x, třetí se také bude hodit, když si vyjádříme $y = x - 1$.
Rovnice $3x^2 - 6x = 0$ má dvě řešení: $x = 0$ a $x = 2$.
Jestliže $x = 0$, pak $y = -1$ a $z = -2$. Jestliže $x = 2$, pak $y = 1$ a $z = -2$. Máme tedy dva stacionární body, $(0,-1,-2)$ a $(2,1,-2)$.
Teď použijeme test druhou derivací. Nejprve potřebujeme parciální derivace druhého řádu uspořádané v Hessovu matici.

$$H = \begin{pmatrix} 6x-4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Počítání subdeterminantů obecně nezní moc lákavě (ale můžete tento přístup zkusit), podíváme se na každý bod zvlášť.
Pro $(0,-1,-2)$ dostáváme

$$H = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \implies \Delta_1 = -4,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -12,\ \Delta_3 = |H| = -26.$$

Protože $\Delta_2 < 0$, není ve stacionárním bodě $(0,-1,-2)$ lokální extrém, ale sedlový bod. Lepší odpověď: $f(0,-1,2) = 13$ je sedlový bod (poskytneme tak víc informací).
(Někteří autoři nepoužívají pojem sedla v případě více než dvou proměnných, prostě by řekli, že tam není lokální extrém.)

Pro $(2,1,-2)$ dostáváme

$$H = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Delta_1 = 8,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12,\ \Delta_3 = |H| = 28.$$

Protože je vždy $\Delta_i > 0$, usoudíme, že $f(2,1,-2) = -7$ je lokální minimum.
Připomeňme, že pro lokální maximum potřebujeme $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ a $\Delta_3 < 0$.

3. Zkusit si vyjádřit y z podmínky by bylo nepříjemné, takže se nabízí použít Lagrangeovy multiplikátory s $g(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y$. Máme vyřešit rovnice $\nabla f = \lambda \nabla g$ a $g = 0$ neboli

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 2x &= \lambda(2x-2) \\ 4y &= \lambda(4y+4) \\ x^2 - 2x + 2y^2 + 4y &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= \lambda(x-1) \\ y &= \lambda(y+1) \\ x^2 - 2x + 2y^2 + 4y &= 0 \end{aligned}$$

Typická strategie je eliminovat λ z prvních dvou rovnic, čímž obdržíme nějaký vztah mezi proměnnými x, y, to se pak spolu s rovnicí $g = 0$ použije k nalezení potřebných bodů.
Rádi bychom izolovali λ z první rovnice. Je možné, aby bylo $x = 1$? Pak by první rovnice zněla $1 = 0$, což není pravda. Proto určitě $x \neq 1$ a můžeme psát $\lambda = \frac{x}{x-1}$. Dosadíme do druhé rovnice, roznásobíme a dostaneme $y = -x$. To teď můžeme dosadit do podmínky, dostaneme $3x^2 - 6x = 0$ a dvě řešení, $x = 0$ a $x = 2$. Jsou tedy dva podezřelé body: $(0,0)$ a $(2,-2)$. Dosadíme je do f: $f(0,0) = 0$, $f(2,-2) = 12$. Porovnáním hodnot odhadneme, že to první je lokální minimum a to druhé je lokální maximum.
Určování globálních extrémů obvykle vyžaduje analýzu situace. Máme dva lokální extrémy, ale nevíme, jestli dávají globální extrémy. Obecně globální extrémy najdeme porovnáním hodnot v lokálních extrémech a také na „hranici“ množiny. Potřebujeme tedy vědět víc o M, množině určené podmínkou, na které zkoumáme f.
Často nastane problém s tím, že daná množina není omezená, protože pak se musíme zeptat, co se stane s f, když body M utečou někam do nekonečna. Mohlo by se stát, že x utíká do nekonečna v rámci naší množiny? Protože body M splňují $2y^2 + 4y = 2x - x^2$, tak by to nutilo výraz $2y^2 + 4y$ odejít do mínus nekonečna, ale to není možné. Podobně usoudíme, že také y nemůže jít do nekonečna, tudíž máme omezenou množinu M.
Dalším možným problémem je, když je množina M křivka s nějakými koncovými body, pak je totiž musíme prozkoumat. Jak vlastně M vypadá? Když si podmínku přepíšeme jako

$$(x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 3,$$

tak vidíme, že M je elipsa. To je uzavřená křivka bez konců, takže pokud se s hodnotami f děje něco důležitého, musí se to stát v některém bodě, který jsme měli výše. Můžeme proto usoudit, že $f(0,0) = 0$ je minimum a $f(2,-2) = 12$ je maximum f na dané množině.

4. Neznámý bod $Q = (x,y,z)$ splňuje $x + y - z = 1$, to tedy bude naše podmínka s $g(x,y,z) = x + y - z$. Funkce, kterou budeme minimalizovat, by měla být vzdálenost mezi P a Q, ale to by vedlo na odmocninu. Bude snažší, když minimalizujeme vzdálenost na druhou, což je ekvivalentní úloha (rozmyslete si to). Máme tedy $f(x,y,z) = \text{dist}(P,Q)^2 = x^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2$. Použijeme Lagrangeovy multiplikátory, rovnice $\nabla f = \lambda \nabla g$ a $g = 1$ teď dávají

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \\ g &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} 2x &= \lambda \cdot 1 \\ 2(y+3) &= \lambda \cdot 1 \\ 2(z-2) &= \lambda \cdot (-1) \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\lambda \\ y + 3 &= \tfrac{1}{2}\lambda \\ z - 2 &= -\tfrac{1}{2}\lambda \\ x + y - z &= 1 \end{aligned}$$

Zase začneme eliminováním λ z prvních tří rovnic, například dosazením za $\frac{1}{2}\lambda$ z první rovnice do dalších dvou. Pak

$$\left.\begin{aligned} y+3&=x\\ 2-z&=x\\ x+y-z&=1 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} y&=x-3\\ z&=2-x\\ x+y-z&=1 \end{aligned}\right\} \implies x+(x-3)+(2-x)=1 \implies x=2.$$

Snadno najdeme další neznámé a dostaneme podezřelý bod $Q=(2,-1,0)$. Je funkce f a tudíž i vzdálenost opravdu v bodě Q minimální a ne třeba maximální? Zkusíme jiný bod z dané roviny. Například $R=(0,1,0)$ má $\operatorname{dist}(R,P)=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}$. Na druhou stranu, vzdálenost mezi Q a P je $\operatorname{dist}(Q,P)=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}$, takže to vypadá, že máme hledané minimum.
Můžeme také argumentovat, že v rámci dané roviny je možné jít do nekonečna, snadno lze nechat $x\to\infty$ a ostatní souřadnice se pak přizpůsobí, pak jde také vzdálenost do nekonečna (což je jasné, když si situaci představíme), a proto hodnota, kterou jsme našli, nemůže být maximum.
Alternativa: První tři rovnice nabízejí možnost si snadno všechny proměnné vyjádřit pomocí λ (např. $z=2-\frac{1}{2}\lambda$). Když to uděláme a dosadíme do podmínky, vznikne rovnice s jednou neznámou λ, jmenovitě $\frac{3}{2}\lambda=6$. Odtud $\lambda=4$ a dopočítáme přesně stejné $x=2$ atd. jako předtím.

Poznámka: Namísto Lagrangeových multiplikátorů se dalo použít danou podmínku k vyjádření $x=1-y+z$ a dosadit do f, vyjde $F(y,z)=(1-y+z)^2+(y+3)^2+(z-2)^2$. Najdeme lokální extrémy:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}&=0\\ \frac{\partial F}{\partial z}&=0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} -2(1-y+z)+2(y+3)&=0\\ 2(1-y+z)+2(z-2)&=0 \end{aligned}\right\} \implies y=-1,\ z=0.$$

5. Vzdálenost mezi bodem a přímkou je dána jako vzdálenost mezi oním bodem a nejbližším bodem dotyčné přímky, takže ten musíme najít.
Máme dvě podmínky, jedna je $g(x,y,z)=x+y+z=1$, druhá $h(x,y,z)=2x-y+z=3$. Hledáme bod $Q=(x,y,z)$ splňující tyto podmínky takový, že je jeho vzdálenost od P minimální, budeme minimalizovat vzdálenost na druhou $f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2$. Teď budou dva Lagrangeovy multiplikátory, nazveme je λ a μ (je jednodušší psát g,h a λ,μ než g_1,g_2 a λ_1,λ_2 jako ve větě). Rovnice jsou $\nabla f=\lambda\nabla g+\mu\nabla h$, $g=1$ a $h=3$, tedy

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}&=\lambda\frac{\partial g}{\partial x}+\mu\frac{\partial h}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\lambda\frac{\partial g}{\partial y}+\mu\frac{\partial h}{\partial y}\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=\lambda\frac{\partial g}{\partial z}+\mu\frac{\partial h}{\partial z}\\ g&=1\\ h&=3 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 2(x-1)&=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 2\\ 2(y-2)&=\lambda\cdot 1+\mu\cdot(-1)\\ 2(z+1)&=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 1\\ x+y+z&=1\\ 2x-y+z&=3 \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} 2(x-1)&=\lambda+2\mu\\ 2(y-2)&=\lambda-\mu\\ 2(z+1)&=\lambda+\mu\\ x+y+z&=1\\ 2x-y+z&=3 \end{aligned}$$

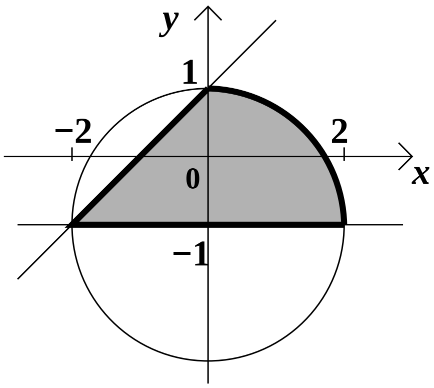
Zase zkusíme eliminovat multiplikátory z prvních tří rovnic. Když například sečteme druhou a třetí rovnici, dostaneme $\lambda=y+z-1$, po dosazení do třetí rovnice pak $\mu=z-y+3$. Když tyto λ,μ dosadíme do první rovnice, dostaneme $2x+y-3z=6$. To je typické, měli jsme 3 rovnice s 5 neznámými, po použití dvou rovnic skončíme s jednou rovnicí a jen třemi neznámými.
Teď také vezmeme v úvahu naše dvě podmínky, takže máme

$$\left.\begin{aligned} 2x+y-3z&=6\\ x+y+z&=1\\ 2x-y+z&=3 \end{aligned}\right\} \implies x=2,\ y=0,\ z=-1.$$

Nakonec spočítáme vzdálenost od $Q=(2,0,-1)$ k P: $\operatorname{dist}(P,Q)=\sqrt{5}$. Abychom se ujistili, že máme minimum, zkusíme jiný bod z přímky. Například $R=(0,-1,2)$ obě dané rovnice splňuje a $\operatorname{dist}(P,R)=\sqrt{19}$.

Poznámka: Kdyby otázka výslovně nežádala Lagrangeovy multiplikátory, tak jsme také mohli dané dvě rovnice použít k závěru, že řekněme $y = \frac{x}{2} + 1$, $z = 2 - \frac{3}{2}x$, dosadit do f a pak to minimalizovat, dostali bychom $x = 2$.

6. Nejprve si načrtneme množinu M. Máme dvě přímky a kružnici, ty rozloží rovinu na několik částí. Jen jedna z nich je ale omezená a zároveň vymezená všemi třemi křivkami.



Máme uzavřenou omezenou množinu s neprázdným vnitřkem a hranicí skládající se ze tří částí. Teorie zaručuje, že se globální extrémy vyskytují buď uvnitř, pak jsou to i lokální extrémy, nebo na hranici. Tím je určen klasický algoritmus, najdeme všechny možné kandidáty a na konci porovnáme hodnoty.

1) Nejprve se podíváme na vnitřek M, kde extrémy jsou v bodech lokálních extrémů. Není třeba je klasifikovat, hlavní je podívat se na všechny kandidáty neboli na stacionární body.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0\end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l}2x = 0\\ 8y = 0\end{array}\right\} \implies x = y = 0.$$

Protože $(0,0) \in M$, máme prvního kandidáta: $f(0,0) = 0$.

2) Teď se podíváme na hranici. Má tři části a všechny jsou stejného typu, je to křivka, která je na koncích odříznutá. Pro každou část tedy dostáváme stejný postup, globální extrémy nastávají buď v koncových bodech nebo v bodech, které jsou lokálními extrémy vzhledem k uvažované křivce. Tím jsou směřovány naše další kroky.

2a) Začneme s čtvrtkruhem. Je to křivka určená $g(x,y) = x^2 + (y+1)^2 = 4$ a podmínkami $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$. Má dva koncové body, takže se na ně podíváme: $f(2,-1) = 8$ a $f(0,1) = 4$ jsou kandidáti.

Pak musíme najít lokální extrémy f vzhledem k podmínce $g(x,y) = 4$, to by mělo jít pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Rovnice $\nabla f = \lambda \nabla g$ a $g = 4$ znamenají

$$\left.\begin{array}{c}\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial g}\\ g = 4\end{array}\right\} \implies \begin{array}{l}2x = \lambda 2x\\ 8y = \lambda 2(y+1)\\ x^2 + (y+1)^2 = 4\end{array}$$

První rovnice nás zve ke krácení, ale je třeba být opatrný. Mohlo by se stát, že $x = 0$? Pak třetí rovnice dává $y = 1$ a druhá $\lambda = 2$. Dostáváme kandidáta $(0,1)$, ale na toho už jsme se dívali, je tedy v seznamu.

K nalezení dalších bodů budeme předpokládat, že $x \neq 0$, pak první rovnice dává $\lambda = 1$, po dosazení do druhé dostáváme $y = \frac{1}{3}$ a třetí rovnice dává $x = \frac{2}{3}\sqrt{5}$. Máme dalšího kandidáta, $f\big(\frac{2}{3}\sqrt{5}, \frac{1}{3}\big) = \frac{8}{3}$.

Mimochodem, porovnáním hodnot v našich třech bodech odhadneme, že $f\big(\frac{2}{3}\sqrt{5}, \frac{1}{3}\big) = \frac{8}{3}$ je lokální minimum f vzhledem k vyšetřovanému oblouku.

2b) Další část k prozkoumání je šikmá úsečka daná $y = x + 1$, $-2 \le x \le 0$. Má dva koncové body, $(0,1)$ už je v seznamu a ten druhý je $f(-2,-1) = 8$, další kandidát na extrém na M.

Abychom viděli, co se stane uprostřed této křivky, použijeme zase Lagrangeovy multiplikátory, tentokráte aplikovány na $g(x,y) = y - x = 1$:

$$\left.\begin{aligned} 2x &= -\lambda \\ 8y &= \lambda \\ y - x &= 1 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 4y &= -x \\ y - x &= 1 \end{aligned}\right\} \implies 5y = 1 \implies y = \tfrac{1}{5},$$

pak $x = -\frac{4}{5}$. Máme dalšího kandidáta, $f\big(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\big) = \frac{4}{5}$ (což vypadá jako lokální minimum f vzhledem k té šikmé přímce).

Protože je ta podmínka tak snadná, svádí to k prostému dosazení $y = x + 1$ do f, vyjde

$$\varphi(x) = f(x, x+1) = x^2 + 4(x+1)^2 = 5x^2 + 8x + 4.$$

Pak se dají použít obvyklé nástroje kalkulu jedné proměnné k nalezení kandidátů na extrémy na intervalu $\langle -2, 0\rangle$, dojde se ke stejným kandidátům jako předtím.

2c) Nakonec se podíváme na vodorovnou úsečku, která je dána $y = -1$, $-2 \le x \le 2$. Zase jsou jako kandidáti koncové body, ale už jsme je zahrnuli výše, a lokální extrémy z prostředka. Tady bude asi nejjednodušší dosadit, zajímají nás extrémy $\varphi(x) = f(x, -1) = x^2 + 4$ na $-2 \le x \le 2$. Koncové body jsou už hotovy, lokální extrémy jsou dány podmínkou $\varphi'(x) = 0$, což dává $x = 0$. Máme dalšího kandidáta k uvážení, $f(0, -1) = 4$.

Teď to všechno dáme dohromady. Kandidáti jsou $f(0,0) = 0$, $f(2,-1) = 8$, $f(0,1) = 4$, $f(-2,-1) = 8$, $f\big(\frac{2}{3}\sqrt{5}, \frac{1}{3}\big) = \frac{8}{3}$, $f\big(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\big) = \frac{4}{5}$ a $f(0,-1) = 4$. Porovnáním hodnot dospějeme k závěru: Globální maximum f na M je $f(-2,-1) = f(2,-1) = 8$, globální minimum je $f(0,0) = 0$.

Jen tak pro zajímavost, globální minimum vzhledem k celé hranici je $f\big(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\big) = \frac{4}{5}$.

Poznámka: Pokud bychom chtěli vyjádřit M pomocí množinového značení, tak bychom mohli začít s kruhem daným první podmínkou a proniknout jej s dvěma polorovinami danými těmi přímkami:

$$M = \{(x,y) \in I\!R^2;\ x^2 + (y+1)^2 \le 4 \ \text{ a } \ y \ge -1 \ \text{ a } \ y \le x + 1\}.$$

7. Množinu M lze popsat jako $M = \{(x,y) \in I\!R^2;\ x^2 + y^2 \le 4\}$. Abychom našli globální extrémy, nejprve se podíváme, co se děje vevnitř, takže najdeme stacionární body f:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \tfrac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 2x - 6 &= 0 \\ 2y + 6 &= 0 \end{aligned}\right\} \implies x = 3,\ y = -3.$$

Bod $(3,-3)$ ale není v M, a proto jej vyřadíme.

Teď bychom se měli podívat na hranici, máme tedy najít extrémy f vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 4$. To volá po Lagrangeových multiplikátorech:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \tfrac{\partial g}{\partial x} \\ \tfrac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \tfrac{\partial g}{\partial y} \\ g &= 4 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} 2x - 6 &= \lambda \cdot 2x \\ 2y + 6 &= \lambda \cdot 2y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} x - 3 &= \lambda x \\ y + 3 &= \lambda y \\ x^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

Teď bychom rádi eliminovali λ z prvních dvou rovnic. Mohlo by se stát, že $x = 0$? Pak by první rovnice říkala $-3 = 0$, to nejde; podobně máme $y \ne 0$. Můžeme si tedy vyjádřit λ z první rovnice, dosadit do druhé a nakonec dostaneme $y = -x$. Když to dáme do podmínky, dostaneme $x = \pm\sqrt{2}$. Jsou tedy dva kandidáti, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ a $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Dosadíme je do f: $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 4 - 12\sqrt{2}$, $f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 4 + 12\sqrt{2}$, takže to vypadá, že první je minimum, druhý maximum.

8. Abychom našli extrémy, musíme znát $y'(x)$. Relativně snadno to najdeme pomocí implicitního derivování. Derivujeme danou rovnici vzhledem k x, je důležité si přitom pamatovat, že také y je funkce x:

$$[y^2+2xy]'=[2x-4x^2]' \implies 2yy'+2y+2xy'=2-8x \qquad (*) \qquad \implies \qquad y'=\tfrac{2-8x-2y}{2y+2x}.$$

Kritické body jsou charakterizovány vlastností $y'(x)=0$:

$$y'=\tfrac{2-8x-2y}{2y+2x}=0 \implies 2-8x-2y=0 \implies y=1-4x.$$

Kritické body také musí splňovat danou rovnici (leží na té křivce), takže do ní dosadíme právě získanou podmínku:

$$(1-4x)^2+2x(1-4x)=2x-4x^2 \qquad \implies \qquad 12x^2-8x+1=0 \qquad \implies \qquad x=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{6}.$$

Dostali jsme kandidáty $x=\frac{1}{2}$, $y=-1$; a $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{3}$. Pro oba z nich máme $y'=0$ (to se ještě bude hodit).

Abychom je klasifikovali, potřebujeme druhou derivaci, takže derivujeme rovnici $(*)$:

$$2y'y'+2yy''+2y'+2y'+2xy''=-8 \qquad \implies \qquad y''=\tfrac{2y'+(y')^2-4}{y+x}.$$

Dosadíme první bod, tedy $x=\frac{1}{2}$, $y=-1$ a $y'=0$, dostáváme $y''\big(\frac{1}{2}\big)=8>0$. Takže $y\big(\frac{1}{2}\big)=-1$ je lokální minimum.

Dosadíme druhý bod, tedy $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{3}$ a $y'=0$, dostáváme $y''\big(\frac{1}{6}\big)=-8<0$. Takže $y\big(\frac{1}{6}\big)=\frac{1}{3}$ je lokální maximum.

Alternativní řešení jsou možná, například lze získat y'' tak, že přímo derivujeme vzorec získaný pro y'.

Poznámka pro zvědavé (a pokročilé) studenty: Problém jsme řešili obvyklým postupem, ale pečlivého čtenáře možná napadlo, jestli jsme opravdu našli všechny kritické body. Ty jsou totiž definovány jako body, kde $y'=0$ nebo y' neexistuje. Jsou v našem případě nějaké takové body? Vzorec pro derivaci má problém, když $2y+2x=0$, tedy pro $y=-x$. Zase dosadíme do dané rovnice a dostaneme $3x^2-2x=0$, čili $x=0$ nebo $x=\frac{2}{3}$. I toto jsou kritické body, ale protože v nich neexistuje derivace, tak k jejich klasifikaci nemůžeme použít test druhou derivací.

Co se tam děje? Když se graf blíží k bodu $(0,0)$ nebo k bodu $\big(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\big)$, pak vzorec pro y' jde do nekonečna. To ukazuje, že skutečný důvod, proč tam nemůžeme najít derivaci, je způsoben tím, že křivka má v daném bodě svislou tečnu, pak tam ovšem ani není lokální extrém. Toto je typické, když je implicitní funkce dána pěknou diferencovatelnou funkcí, tak se problémy objevují jen tam, kde je derivace nevlastní. Neuděláme proto chybu, když se soustředíme jen na body, kde $y'=0$.