Kapitola 2

Konvergence řad

I. Absolutní konvergence

Vyšetřete absolutní konvergenci řad.

I.1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Návod: Podle (limitního) podílového kritéria. Je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1-1}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k = \frac{1}{e} < 1.$$

Podle limitní verze podílového kritéria řada (absolutně) konverguje.

I.2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{k^k}$

Návod: Podle (limitního) podílového kritéria. Je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{((k+1)!)^2}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{(k!)^2}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot (k+1) = \lim_{k\to\infty} \left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k \cdot (k+1) = \frac{1}{e} \cdot (+\infty) = +\infty > 1.$$

Podle limitní verze podílového kritéria řada diverguje.

I.3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

Návod: Je

$$\frac{(k!)^2}{(2k)!} = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{2}{k+2} \cdots \frac{k}{2k} < \frac{1}{k} \cdot \frac{2}{k} \cdots \frac{k}{k} = \frac{k!}{k^k}.$$

Řada tedy konverguje podle srovnávacího kritéria a příkladu (I.1).

I.4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k k!}{k^k}$, *kde* $A \geq 0$

Návod: Podle (limitního) podílového kritéria. Je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{A^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{A^k k!}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} A\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to\infty} A\left(1-\frac{1}{k+1}\right)^k = \frac{A}{e}.$$

Pro $0 \le A < e$ řada konverguje, pro $A > e$ řada diverguje. Musíme rozhodnout případ $A = e$. Spočtěme limitu

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \left(\frac{e}{k}\right)^k k! =$$

podle Stirlingovy formule (ale stačil by i jednodušší odhad)

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{e}{k}\right)^k \sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k = +\infty,$$

a proto řada diverguje, neboť posloupnost koeficientů nejde k nule.

I.5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$, *kde* $z \in \mathbb{C}$.

Návod: Podle (limitního) podílového kritéria. Je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|z|^{2k+2}}{(2k+2)!}}{\frac{|z|^{2k}}{(2k)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|^2}{(2k+1)(2k+2)} = 0 < 1.$$

Podle llimitního poílového kritéria tedy řada konverguje pro každé $z \in \mathbb{C}$.

I.6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, *kde* $z \in \mathbb{C}$.

Návod: Podle (limitního) podílového kritéria. Je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|z|^{2k+3}}{(2k+3)!}}{\frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|^2}{(2k+2)(2k+3)} = 0 < 1.$$

Podle llimitního poílového kritéria tedy řada konverguje pro každé $z \in \mathbb{C}$.

I.7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$, *kde* $z \in \mathbb{C}$.

Návod: Postup je stejný jako u příkladu (I.5), neboť absolutní hodnota koeficientu $|a_k| = \frac{|z|^{2k}}{(2k)!}$.

I.8. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$, *kde* $z \in \mathbb{C}$.

Návod: Postup je stejný jako u příkladu (I.6), neboť absolutní hodnota koeficientu $|a_k| = \frac{|z|^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

I.9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a \ln^b k}$

Návod: Pokud $a < 1$ a $b \in \mathbb{R}$, řada diverguje, neboť existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, aby $a + \varepsilon < 1$ a tudíž řada $\sum \frac{1}{k^{a+\varepsilon}}$ diverguje a přitom druhý člen v součinu napravo

$$\frac{1}{k^a \ln^b} = \frac{1}{k^{a+\varepsilon}} \cdot \frac{k^\varepsilon}{\ln^b k}$$

poroste nadevšechny meze (podle známého pravidla, že mocnina roste rychleji než logaritmus).

Pokud $a > 1$ a $b \in \mathbb{R}$, řada konverguje (absolutně), neboť existuje číslo $\delta > 0$ tak, aby $a - \delta > 1$ a tudíž řada $\sum \frac{1}{k^{a-\delta}}$ konverguje a přitom druhý člen v součinu napravo

$$\frac{1}{k^a \ln^b} = \frac{1}{k^{a-\delta}} \cdot \frac{\ln^{-b} k}{k^\delta}$$

konverguje do nuly (a tedy je speciálně omezený), řada tak konverguje podle srovnávacího kritéria srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{k^{a-\delta}}$.

Pro případ $a = 1$ použijeme kondenzační nebo integrální kritérium. Případ $b = 0$ je triviální, řada diverguje (je harmonická). Pro $b \neq 0$ platí, že

$$\left(\frac{1}{x \ln^b x}\right)' = (x^{-1} \ln^{-b} x)' = -\frac{1}{x^2 \ln^b x} + \frac{1}{x}(-b)\frac{1}{\ln^{b+1} x}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2 \ln^b x}\left(\frac{1}{\ln^b x} - 1\right),$$

z čehož vyplývá, na nějakém okolí nekonečna spočtená derivace je záporná, příslušná funkce je monotónní, a tedy také posloupnost $\frac{1}{k \ln^b k}$ konverguje do nuly monotónně.

Potom kondenzační kritérium říká, že řada $\sum_k \frac{1}{k \ln^b k}$ konverguje, právě když konverguje řada

$$\sum_k 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln^b(2^k)} = \sum_k \frac{1}{k^b \ln^b 2}.$$

Poslední řada evidentně konverguje pro $b > 1$ a diverguje pro $b \leq 1$.

Obdobně integrální kritérium (v mírně zobecněné formě) říká, že řada $\sum_k \frac{1}{k \ln^b k}$ konverguje, právě když konverguje integrál

$$\int_M^\infty \frac{1}{x \ln^b x}\, dx$$

kde M je libovolně zvolené kladné reálné číslo. Volme jej tak, aby $\ln M > 0$. Integrál počítáme substitucí $y = \ln x$, který pro $b \neq 1$ vychází

$$\int_M^\infty \frac{1}{x \ln^b x}\, dx = \int_{\ln M}^{+\infty} \frac{dy}{y^b} = \left[\frac{y^{-b+1}}{-b+1}\right]_{\ln M}^\infty,$$

přičemž poslední výraz je konečný, pokud $b > 1$ a nekonečný, pokud $b < 1$. Pro $b = 1$ vychází

$$\int_M^\infty \frac{1}{x \ln x}\, dx = \int_{\ln M}^\infty \frac{1}{y}\, dy = [\ln y]_{\ln M}^\infty = +\infty.$$

Shrnutí: Řada konverguje pro $a > 1$, $b \in \mathbb{R}$ a $a = 1$, $b > 1$. Jinak diverguje.

I.10. $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^a \ln^b k \ln^c(\ln k)}$

Návod: Obdobnými úvahami jako v předchozím příkladu lze ukázat, že řada konvegruje pro $a > 1$, $b, c \in \mathbb{R}$ a diverguje, pokud $a < 1$, $b, c \in \mathbb{R}$.

Taktéž srovnáním s předchozím příkladem lze ukázat, že řada konverguje pro $a = 1$, $b > 1$, $c \in \mathbb{R}$ a diverguje pro $a = 1$, $b < 1$, $c \in \mathbb{R}$. Ukážeme například konvergenci: je-li $b > 1$, pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, aby $b - \varepsilon > 1$ a platí

$$\sum_k \frac{1}{k \ln^b k \ln^c(\ln k)} = \sum_k \frac{1}{k ln^{b-\varepsilon} k} \cdot \frac{\ln^{-c}(\ln k)}{\ln^\varepsilon k},$$

přičemž podle předchozího příkladu (I.9) víme, že $\sum \frac{1}{k \ln^{b-\varepsilon} k}$ konverguje a platí, že $\frac{\ln^{-c}(\ln k)}{\ln^\varepsilon k} \to 0$ pro $k \to \infty$ (což lze dokázat například posuzováním této limity jako limity funkce a substitucí $k = e^y$), tudíž je speciálně omezená. Konvergence plyne srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{k \ln^{b-\varepsilon} k}$.

Případ $a = 1$, $b = 1$ rozhodne kondenzační kritérium. Opět lze dokázat výpočtem derivace funkce $\frac{1}{x \ln x \ln^c(\ln x)}$, že konvergence příslušné posloupnosti do nuly je monotónní. Potom řada $\sum_k \frac{1}{k \ln k \ln^c(\ln k)}$ konverguje tehdy a jen tehdy, konverguje-li řada

$$\sum_k 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln(2^k) \ln^c(\ln 2^k)} = \sum_k \frac{1}{k \ln^c k}.$$

O řadě napravo ale víme z příkladu (**??**), že konverguje, právě pokud $c > 1$ a diverguje, pokud $c \leq 1$.

Shrnutí: Řada konverguje, pokud $a > 1$, $b, c \in \mathbb{R}$ nebo $a = 1$, $b > 1$, $c \in \mathbb{R}$ nebo $a = b = 1$, $c > 1$. Jinak diverguje.

I.11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z^k}$, *kde* $z \in \mathbb{C}$.

Návod: Podle limitního podílového kritéria. Počítejme

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{|z|^{k+1}}}{\frac{k}{|z|^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k}\frac{1}{|z|} = \frac{1}{|z|}.$$

Pro $|z| > 1$ řada absolutně konverguje, pro $|z| < 1$ řada diverguje podle limitního podílového kritéria. Pokud $|z| = 1$, potom $a_k = k$, a tedy $a_k \not\to 0$ pro $k \to \infty$ a řada diverguje taktéž, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

I.12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{2^k}$, *kde* $z \in \mathbb{C}$.

Návod: Podle limitního podílového kritéria. Počítejme

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{|z|^{(k+1)^2}}{2^{k+1}}}{\frac{|z|^{k^2}}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|z|^{2k+1}}{2}.$$

Pro $|z| > 1$ řada diverguje, pro $|z| < 1$ řada konverguje podle limitního podílového kritéria. Pokud $|z| = 1$, potom $a_k = \frac{1}{2^k}$, dostáváme tak geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1}{2}$, která je samozřejmě konvergentní.

Shrnutí: Řada absolutně konverguje pro $|z| \leq 1$, diverguje jinak.

I.13. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt[k]{k}}$

Návod: Použijeme kondenzační kritérium. Posloupnost jde k nule evidentně monotónně, a proto stačí ověřit, zda konverguje řada

$$\sum_k 2^k \cdot \frac{1}{2^k \sqrt[2^k]{2^k}} = \sum_k \frac{1}{\sqrt[2^k]{2^k}}.$$

Ale řada napravo diverguje, neboť $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$ pro $n \to \infty$, nesplňuje tak nutnou podmínku konvergence.

I.14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k}$, *kde* $x \in \mathbb{R}$.

Návod: Pokud $x > 0$, řada diverguje, neboť nesplňuje základní podmínku konvergence, $e^{kx}/k \not\to 0$ pro $k \to \infty$. Pokud $x = 0$, řada diverguje, neboť jde o harmonickou řadu. Pokud $x < 0$, řada konverguje srovnáním s geometrickou řadou, neboť $e^{kx}/k \leq e^{kx} = (e^x)^k$, přičemž kvocient $e^x < 1$.

I.15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k^2}$, *kde* $x \in \mathbb{R}$.

Návod: Pokud $x > 0$, řada diverguje, neboť nesplňuje základní podmínku konvergence, $e^{kx}/k \not\to 0$ pro $k \to \infty$. Pokud $x = 0$, řada konverguje, neboť jde o řadu $\sum \frac{1}{k^2}$. Pokud $x < 0$, řada konverguje srovnáním s geometrickou řadou, neboť $e^{kx}/k^2 \leq e^{kx} = (e^x)^k$, přičemž kvocient $e^x < 1$.

I.16. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{\ln(k+1)}}.$

Návod: Řada diverguje, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\ln(k+1)} = \lim_{k\to\infty} (\ln(k+1))^{1/k} = \lim_{k\to\infty} e^{\frac{1}{k}\ln(\ln(k+1))} = e^0 = 1,$$

a tedy nesplňuje základní podmínku konvergence.

I.17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$, *kde* $z \in \mathbb{C}$.

Návod: Podle limitního podílového kritéria

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|z|^{(k+1)!}}{|z|^{k!}} = \lim_{k\to\infty} |z|^{k\cdot k!}$$

řada konverguje, pokud $|z| < 1$ a diverguje, pokud $|z| > 1$. Pokud $|z| = 1$, řada diverguje, neboť nesplňuje základní podmínku konvergence, $z^{k!} \not\to 0$ pro $k \to \infty$.

I.18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2kx}{x^2+k^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Návod: Pokud $x = 0$, řada má nulové koeficienty a konverguje. Pokud $x \neq 0$, použijeme limitní srovnávací kritérium. Platí, že

$$\lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} = 1,$$

odkud vyplývá (substitucí $y = \frac{2kx}{x^2+k^2}$), že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{2kx}{x^2+k^2}}{\frac{2kx}{x^2+k^2}} = 1,$$

a proto řada $\sum_k \operatorname{arctg} \frac{2kx}{k^2+x^2}$ konverguje, právě když konverguje řada $\sum_k \frac{2kx}{x^2+k^2}$. Jednoduchým srovnáním ale dostaneme, že od určitého členu počínaje, kdy je $k^2 \geq x^2$, platí

$$\frac{2kx}{x^2+k^2} \geq \frac{2kx}{2k^2} = \frac{x}{k},$$

přičemž řada napravo diverguje pro každé $x \neq 0$.

Závěr. Řada konverguje pro $x = 0$, jinak diverguje.

I.19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^k \frac{2kx}{x^2+k^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Návod: Použijeme odmocninové kritérium. Podle věty o limitě složené funkce platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\operatorname{arctg}^k \frac{2kx}{x^2+k^2}\right|} = \lim_{k\to\infty} \operatorname{arctg} \frac{2k|x|}{x^2+k^2} = \operatorname{arctg} 0 = 0,$$

a tudíž řada konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$.

I.20. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^k \frac{k}{k\sqrt{2}+1}$.

Návod: Použijeme odmocninové kritérium. Podle věty o limitě složené funkce platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\arcsin^k \frac{k}{k\sqrt{2}+1}} = \lim_{k\to\infty} \arcsin \frac{k}{k\sqrt{2}+1} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} < 1,$$

a tudíž řada konverguje.

I.21. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k^2} z^k}{(k+1)^{k^2}}$.

Návod: Použijeme odmocninové kritérium.

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{k^{k^2}|z|^k}{(k+1)^{k^2}}} = \lim_{k\to\infty} |z| \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{|z|}{e}.$$

Řada tedy konverguje, pokud $|z| < e$ a diverguje, pokud $|z| > e$. Pokud $|z| = e$, potom řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^{k^2} e^k}{(k+1)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^{k^2} e^k = \lim_{k\to\infty} \exp\left[k + k^2 \ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)\right] =$$

Použitím Taylorova rozvoje a věty o limitě složené funkce

$$= \lim_{k\to\infty} \exp\left[k + k^2\left(-\frac{1}{k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2} + o(k^{-2})\right)\right] = \lim_{k\to\infty} \exp\left[k - \frac{k^2}{k+1} - \frac{k^2}{2(k+1)^2} + k^2 o(k^{-2})\right] =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \exp\left[\frac{k(k+1) - k^2}{k+1} - \frac{k^2}{2(k+1)^2} + k^2 o(k^{-2})\right] = \lim_{k\to\infty} \exp\left[\frac{k}{k+1} - \frac{k^2}{2(k+1)^2} + k^2 o(k^{-2})\right] =$$

$$= \exp\left[1 - \frac{1}{2} + 0\right] = e^{1/2} \neq 0.$$

I.22. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-k \sin^{2k} x)$, *kde* $x \in \mathbb{R}$.

Návod: Pro $x = 0 + 2k\pi$ a $x = \pi + 2k\pi$ je řada evidentně konvergentní. Jinak použijeme limitní srovnávací kritérium.

Použitím odmocninového kritéria pro limity nahlédneme, že platí $\lim k \sin^{2k} x = 0$ pro $x \neq k\pi$, neboť platí

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k \sin^{2k} x} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \sin^2 x = \sin^2 x < 1.$$

Proto také platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\exp(-k \sin^{2k} x)}{=} e^0 = 1 \neq 0,$$

a tudíž řada musí divergovat, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

I.23. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{k-1}}{\sqrt{(k^2 - k + 1)^{k+1}}}$.

Návod: Upravíme

$$\frac{k^{k-1}}{\sqrt{(k^2 - k + 1)^{k+1}}} = \frac{k^{k-1}}{k^{k+1}\sqrt{(1 - 1/k + 1/k^2)^{k+1}}} = \frac{1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - 1/k + 1/k^2)^{k+1}}}.$$

Nyní stačí spočítat, že

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right)^{k+1} = \exp\left[\lim_{k\to\infty} (k+1) \ln\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}\right)\right] =$$

$$= \exp\left[\lim_{k\to\infty} (k+1)\left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + o(k^{-2})\right)\right] = e^{-1},$$

tudíž

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{(1 - 1/k + 1/k^2)^{k+1}}} = \frac{1}{e^{-1/2}} = e^{1/2},$$

a tudíž

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{(1-1/k+1/k^2)^{k+1}}}}{\frac{1}{k^2}} = e^{1/2}.$$

Řada konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (srovnáním s řadou $\sum \frac{1}{k^2}$).

I.24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+\alpha^k)}{\alpha^k}$, *kde* $\alpha > 0$.

Návod: Pokud $\alpha = 1$, potom řada diverguje, neboť má konstantní koeficient $\ln 2$.

Pokud $\alpha > 1$, potom $\alpha^k \to +\infty$ a platí, že

$$\frac{\ln(1+\alpha^k)}{\alpha^k} \leq \frac{\ln(2\alpha^k)}{\alpha^k} = \frac{\ln 2 + k\ln\alpha}{\alpha^k} = \frac{\ln 2}{\alpha^k} + \frac{k}{\alpha^k}\ln\alpha.$$

Řada $\sum \frac{\ln 2}{\alpha^k}$ konverguje, neboť je geometrická s kvocientem $\frac{1}{\alpha} < 1$. Řada $\sum \frac{k}{\alpha^k}$ konverguje například podle limitního podílového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{\alpha^{k+1}}}{\frac{k}{\alpha^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k}\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Pro $\alpha > 1$ tedy řada konverguje srovnáním se součtem dvou konvergentních řad.

Pokud $0 < \alpha < 1$, potom $\alpha^k \to 0$ pro $k \to \infty$ a platí (třeba podle l'Hopitalova pravidla), že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^x)}{\alpha^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\alpha^x}\cdot\alpha^x\ln\alpha}{\alpha^x\ln\alpha} = 1 \neq 0,$$

řada tedy musí divergovat, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

II. Konvergence obecných řad

Abel. *Konverguje-li komplexní řada $\sum_k a_k$ a je-li $\{b_k\}$ omezená (reálná) monotónní posloupnost, pak řada $\sum_k a_k b_k$ konverguje.*

Dirichlet. *Je-li posloupnost částečných součtů komplexní řady $\sum_k a_k$ omezená a má-li (reálná) monotónní posloupnost $\{b_k\}$ limitu rovnou nule, pak řada $\sum_k a_k b_k$ konverguje.*

Leibniz. *Má-li (reálná) monotónní posloupnost $\{b_k\}$ limitu rovnou nule, pak řada $\sum_k (-1)^k b_k$ konverguje.*

První fakt o „goniometrických“ řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \cos kx$$

sice divergují (mimo $x = 0$ modulo 2π u sinové řady), ale pro každé $x \in \mathbb{R}$ mají stejně omezené částečné součty.

Druhý fakt o „goniometrických“ řadách. Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}$$

konvergují absolutně pro $\alpha > 1$. Sinová řada konverguje neabsolutně pro $0 < \alpha \leq 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, absolutně však pouze pro $x = 2n\pi$, kde n je celé číslo (pak je řada nulová). Kosinová řada konverguje neabsolutně pro $x \in \mathbb{R}$ různá od $2n\pi$, kde n je celé číslo, pro $x = 2n\pi$ diverguje. Pro $\alpha \leq 0$ řady vždy divergují.

Speciálně řady $\sum_k |\sin k|/k$ a $\sum_k |\cos k|/k$ divergují.

Vyšetřete absolutní i neabsolutní konvergenci následujících řad.

II.1. $**$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k+1} \sin\frac{1}{k}$

Návod: Zkusíme dokázat, že posloupnost $\frac{k}{k+1}\sin\frac{1}{k}$ je od nějakého členu počínaje monotónní a má limitu nula. Druhé není těžké, neboť

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}\sin\frac{1}{k}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}\sin\frac{1}{x}=\lim_{y\to0+}\frac{\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+1}\sin y=\lim_{y\to0+}\frac{\sin y}{y}\cdot\frac{y}{y+1}=1\cdot0=0.$$

Monotonii dokážeme pomocí monotonie funkce $\frac{x}{x+1}\sin\frac{1}{x}$. Její derivace je rovna

$$\left(\frac{x}{x+1}\sin\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{(x+1)^2}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x+1)}\cos\frac{1}{x},$$

nule je rovna v bodech

$$\frac{1}{(x+1)^2}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x(x+1)}\cos\frac{1}{x}=0$$
$$\frac{1}{x+1}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=0$$
$$\frac{x}{x+1}=\operatorname{cotg}\frac{1}{x}.$$

Ačkoliv je rovnice transcendentní, je zřejmé, že pro $x\to\infty$ pravá strana roste nade všechny meze, zatímco levá strana konverguje k jedné. Evidentně tak na nějakém okolí nekonečna rovnice nemůže mít řešení, a protože derivace je na nějakém okolí nekonečna spojitá funkce, nemůže měnit znaménko, tudíž musí být monotónní.

Podle Leibnizova kritéria tedy řada konverguje neabsolutně.

Absolutní konvergenci můžeme vyloučit pomocí limitního srovnávacího kritéria, srovnáním s řadou $\sum\frac{1}{k+1}$. Je totiž

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k}{k+1}\sin\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}}=\lim_{k\to\infty}k\sin\frac{1}{k}=1.$$

Závěr: Řada konverguje neabsolutně, absolutně nikoliv.

Jiný návod, jak dokázat neabsolutní konvergenci. Je zřejmé, že řada s koeficienty $a_k=(-1)^k\frac{1}{k+1}$ konverguje podle Leibnizova kritéria. Protože posloupnost s koeficienty $b_k=k\sin\frac{1}{k}$ má limitu (viz výpočet výše), je nutně omezená. Tudíž vyšetřovaná řada konverguje podle Abelova kritéria, dokážeme-li monotonii posloupnosti $k\sin\frac{1}{k}$. Derivováním dostaneme

$$\left(x\sin\frac{1}{x}\right)'=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x},$$

přičemž derivace je nulová, je-li splněna rovnice

$$\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=0$$
$$\operatorname{tg}\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

Protože ale rovnice $\operatorname{tg}y=y$ nemá na pravém prstencovém okolí nuly $(0,\pi/2)$ řešení (zkuste popřemýšlet nad jednoduchým geometrickým „důkazem“ na jednotkové kružnici), je nutně derivace na nějakém okolí nekonečna spojitá a nenulová, tudíž nemění znaménko a posloupnosti je od jistého členu počínaje monotónní. Tím je monotonie dokázána.

II.2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k+1}\cos\frac{1}{k}$

Návod: Řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence. Je totiž

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{k+1}\cos\frac{1}{k}=1.$$

II.3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k}$

Návod: Řada nekonverguje absolutně srovnáním s řadou $\sum_k \frac{1}{k}$, neboť limitní srovnávací kritérium dává

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+1}\cos\frac{1}{k} = 1.$$

Zkusíme aplikovat Leibnizovo kritérium. Zřejmě $\frac{k}{k^2+1}\cos\frac{1}{k} \to 0$ pro $k\to\infty$, musíme ale ověřit monotonii této posloupnosti (alespoň od nějakého členu počínaje). Derivováním dostaneme

$$\left(\frac{x}{x^2+1}\cos\frac{1}{x}\right)' = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$$

derivace je na nějakém okolí nekonečna spojitá a je nulová, pokud splňuje rovnici

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x(x^2+1)}\sin\frac{1}{x} = 0$$

$$-\frac{x(1-x^2)}{(x^2+1)} = \operatorname{tg}\frac{1}{x}$$

Je vidět, že pro $x\to+\infty$ levá strana konverguje k nekonečnu, zatímco pravá strana k nule, a proto rovnice na nějakém okolí nekonečna nemůže mít řešení a derivace nemůže měnit znaménko. Tudíž funkce musí být na nějakém okolí nekonečna monotónní, z čehož plyne monotonie posloupnosti.

Závěr: Řada konverguje neabsolutně, absolutně nikoliv.

Poznámka: Můžeme ale postupovat sérií úvah, které výpočty značně zjednoduší: podle Leibnizova kritéria konverguje řada $\sum_k \frac{(-1)^k}{k}$. Podle Abelova kritéria, díky monotonii posloupnosti $\frac{k^2}{k^2+1}$, konverguje tudíž také řada $\sum_k \frac{(-1)^k}{k}\cdot\frac{k^2}{k^2+1} = \sum_k (-1)^k \frac{k}{k^2+1}$. A znovu podle Abelova kritéria, díky monotonii posloupnosti $\cos\frac{1}{k}$ (alespoň od jistého členu počínaje) konverguje tedy také vyšetřovaná řada.

V řadě následujících úloh lze použít ten či onen postup, budeme už ale uvádět pouze jeden, povětšinou držící se mechanického schématu. Hledání elegantnějších cest ponecháváme čtenáři.

II.4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt[k]{k}}{\ln k}$

Návod: Řada nekonverguje absolutně srovnáním s řadou $\sum_k \frac{1}{\ln k}$, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k}/\ln k}{1/\ln k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1.$$

Pokusíme se aplikovat Leibnizovou kritérium. Zřejmě $\frac{\sqrt[k]{k}}{\ln k} \to 0$ pro $k\to\infty$. Konverguje monotónně? Derivováním funkce

$$\left(\frac{x^{1/x}}{\ln x}\right)' = \left(\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}}{\ln x}\right)' = \frac{e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{\ln x}{x}\right)' - e^{\frac{\ln x}{x}}\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{x^{1/x}\frac{1-\ln x}{x^2} - x^{1/x}\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

dostaneme spojitou funkci na nějakém okolí nekonečna, která je nulová, pokud

$$\frac{x^{1/x}\frac{1-\ln x}{x^2} - x^{1/x}\frac{1}{x}}{\ln^2 x} = 0$$

$$\frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$1-\ln x = x.$$

Protože levá strana konverguje pro $x\to+\infty$ do minus nekonečna a pravá do plus nekonečna, nemůže mít tato rovnice na nějakém okolí nekonečna řešení. Tudíž derivace na tomto okolí nekonečna nemění znaménko a funkce (a tudíž posloupnost) je monotónní.

Závěr: Řada konverguje neabsolutně, absolutně nikoliv.

II.5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\sqrt[k]{k^9}}{\ln(\ln k)}$

Návod: Řada nekonverguje absolutně srovnáním s řadou $\sum_k \frac{1}{\ln(\ln k)}$ (jejíž divergence lehko vyplývá ze srovnání s řadou $\sum_k \frac{1}{k}$), neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{\sqrt[k]{k^9}}{\ln(\ln k)}}{\frac{1}{\ln(\ln k)}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^9} = 1^9 = 1.$$

Řada konverguje neabsolutně, dokážeme to pomocí Leibnizova kritéria. Zřejmě $\frac{\sqrt[k]{k^9}}{\ln(\ln k)} \to 0$ pro $k \to \infty$, dokazujme tedy monotonii. Derivujme funkci

$$\left(\frac{(x^9)^{1/x}}{\ln(\ln x)}\right)' = \left(\frac{(x^{9/x}}{\ln(\ln x)}\right)' = \left(\frac{e(9\ln x)/x}{\ln(\ln x)}\right)' = \frac{e^{(9\ln x)/x}((9\ln x)/x)' - e^{(9\ln x)/x}\frac{1}{\ln x}\frac{1}{x}}{\ln^2(\ln x)} = \frac{x^{9/x}\frac{9-9\ln x}{x^2} - x^{9/x}\frac{1}{x\ln x}}{\ln^2(\ln x)},$$

derivace je spojitá n nějakém okolí nekonečna a nulová, pokud je splněna rovnice

$$\frac{x^{9/x}\frac{9-9\ln x}{x^2} - x^{9/x}\frac{1}{x\ln x}}{\ln^2(\ln x)} = 0$$

$$x^{9/x}\frac{9-9\ln x}{x^2} - x^{9/x}\frac{1}{x\ln x} = 0$$

$$\frac{9-9\ln x}{x^2} = \frac{1}{x\ln x}$$

$$9 - 9\ln x = \frac{x}{\ln x}$$

přičemž nahlížíme, že levá strana pro $x \to +\infty$ konverguje do minus nekonečna a pravá strana do plus nekonečna. Rovnice tedy nemá na nějakém okolí nekonečna řešení, derivace díky spojitosti nemůže měnit znaménko a monotonie funkce (a tedy posloupnosti) je zaručena.

Závěr: Řada konverguje neabsolutně, absolutně nikoliv.

II.6. *(+)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2k+10}{3k+1}\right)^k$

Návod: Řada konverguje absolutně podle odmocninového kritéria, neboť

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k+10}{3k+1} = \frac{2}{3} < 1.$$

II.7. * $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \operatorname{arctg} k \operatorname{arccotg}\sqrt{k}$

Návod: Platí, že $\operatorname{arctg} k \to \frac{\pi}{2}$ pro $k \to \infty$ a dále platí, že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{arccotg}\sqrt{k}}{1/\sqrt{k}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\operatorname{arccotg} y}{1/y} = \lim_{z\to 0+}\frac{\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg} z)}{1/\operatorname{cotg} z} = \lim_{z\to 0+}\frac{z\cos z}{\sin z} = 1.$$

Odtud vyplývá, že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_k|}{1/\sqrt{k}} = \frac{\pi}{2}$$

a podle limitního srovnávacího kritéria nemůže být konvergence absolutní, neboť řada $\sum_k \frac{1}{\sqrt{k}}$ diverguje.

Protože posloupnost $\{\operatorname{arctg} k\}$ je omezená a monotónní, podívejme se na řadu $\sum_k (-1)^k \operatorname{arccotg}\sqrt{k}$. Pokud bude konvergentní, bude podle Abelova kritéria konvergentní také vyšetřovaná řada.
Ale řada $\sum_k (-1)^k \operatorname{arccotg}\sqrt{k}$ je konvergentní podle Leibnizova kritéria, neboť $\operatorname{arccotg}\sqrt{k}$ konverguje monotónně k nule.

Závěr: Řada je neabsolutně konvergentní, absolutně nikoliv.

II.8. ** $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k+k^{-2})}{\ln(\ln k)}$

Návod: Aplikujme součtový vzorec na čitatel, dostaneme

$$\frac{\sin(k + k^{-2})}{\ln(\ln k)} = \frac{\sin k \cos k^{-2}}{\ln(\ln k)} + \frac{\cos k \sin k^{-2}}{\ln(\ln k)}$$

Protože posloupnost se členy $b_k = 1/\ln(\ln k)$ konverguje monotónně do nuly a platí, že řady $\sum_k \cos k$ a také $\sum_k \sin k$ mají omezené částečné součty, řady

$$\sum_k \frac{\sin k}{\ln(\ln k)}, \qquad \sum_k \frac{\cos k}{\ln(\ln k)}$$

konvergují podle Dirichletova kritéria.

Je ovšem evidentní, že posloupnosti $\{\sin k^{-2}\}$ a $\{\cos k^{-2}\}$ jsou od jistého členu počínaje monotónní (neboť funkce sin a cos jsou monotónní na intervalu $(0, \pi/2)$). Z toho plyne, že podle Abelova kritéria konvergují řady

$$\sum_k \frac{\sin k}{\ln(\ln k)} \cdot \cos k^{-2}, \qquad \sum_k \frac{\cos k}{\ln(\ln k)} \cdot \sin k^{-2},$$

a tudíž konverguje (neabsolutně) i jejich součet.

Absolutní konvergenci můžeme vyloučit porovnáním s řadou $1/k$. (Třeba podle jednostranného limitního kritéria.)

II.9. $**\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin k}{k^2 + 1}$

Návod: Označme a_k obecný k-tý člen řady. Nejprve vyloučíme absolutní konvergenci porovnáním s řadou $\sum_k |\sin k|/k$. To je divergentní řada podle faktu uvedeného na začátku oddílu o konvergenci obecných řad. Přitom

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|\sin k|/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k^2+1}}{\frac{1}{k}} = 1.$$

Tudíž vyšetřovaná řada nemůže konvergovat absolutně.

Upravíme nyní člen řady na tvar

$$(-1)^k \frac{k \sin k}{k^2 + 1} = (-1)^k \frac{\sin k}{k} \cdot \frac{k^2}{k^2 + 1}.$$

Dokážeme-li nyní konvergenci řady $\sum_k (-1)^k \frac{\sin k}{k}$, pak, vzhledem k tomu, že posloupnost $\{\frac{k^2}{k^2+1}\}$ je evidentně omezená (má limitu) a monotónní, z Abelova kritéria bude vyplývat také neabsolutní konvergence vyšetřované řady.

Nyní použijeme **triku** rozdělení řady na dvě, na řadu sudých a lichých členů.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin k}{k} \overset{?}{=} \sum_{k=1,3,5,\dots} (-1)^k \frac{\sin k}{k} + \sum_{k=2,4,6,\dots} (-1)^k \frac{\sin k}{k}$$

což po úpravě dává

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin k}{k} \overset{?}{=} \sum_{k=1,3,5,\dots} -\frac{\sin k}{k} + \sum_{k=2,4,6,\dots} \frac{\sin k}{k}$$

Z následující poznámky plyne, že pokud dokážeme konvergenci řad na pravé straně, pak konverguje také řada na straně levé a rovnost s otazníkem platí.

Avšak konvergence obou řad na pravé straně plyne z Dirichletova kritéria. Protože $\frac{1}{k} \to 0$ monotónně, stačí ověřit stejnou omezenost částečných součtů řad $\sum_k \sin k$ sčítaných přes sudé a liché členy.

Řada $\sum_k \sin kx$ má totiž omezené částečné součty pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Položením $x = 2$ tedy zjišťujeme, že řada $\sum_k \sin(2k) = \sum_{k=2,4,\dots} \sin k$ má omezené částečné součty. A protože

$$\left| \sum_{k=1,3,5,\dots}^{N} \sin k \right| = \left| \sum_{k=1}^{N} \sin k - \sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} \sin k \right| \le \left| \sum_{k=1}^{N} \sin k \right| + \left| \sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} \sin k \right|$$

a obě řady napravo mají stejně omezené částečné součty, plyne odtud stejná omezenost částečných součtů i pro řadu lichých členů.

Tím je neabsolutní konvergence vyšetřované řady dokázána.

Tady mohou vzniknout oprávněné pochyby, zda sčítáním po sudých a lichých členech dostaneme totéž. Ano, klíčový je ale předpoklad **konvergence řad sudých a lichých členů** (jinak bychom našli snadné protipříklady, např. $\sum_k (-1)^k/k$). Předpokládejme tedy, že řada lichých členů a řada sudých členů konverguje. Zřejmě platí rovnost částečných součtů

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{liché čl.}}}^{n} a_k + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{sudé čl.}}}^{n} a_k$$

V částečném součtu totiž díky komutativitě sčítání samozřejmě přerovnávat můžeme. Potom podle věty o aritmetice limit platí rovnost, neboť pravá strana má smysl

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{liché čl.}}}^{n} a_k + \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ \text{sudé čl.}}}^{n} a_k$$

a podle předpokladu konvergence řad na pravé straně

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{liché čl.}}}^{\infty} a_k + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{sudé čl.}}}^{\infty} a_k.$$

Z toho plyne, že i pro neabsolutně konvergentní řadu, kterou nelze libovolně přerovnávat, platí tvrzení, že konverguje-li řada lichých a sudých členů, pak konverguje také řada všech členů, a to k součtu řad lichých a sudých členů.

II.10. $** \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin^2 k}{k^2+1}$

Návod: Ukážeme, že řada nekonverguje absolutně. K tomu stačí dokázat divergenci řady $\sum_k \frac{\sin^2 k}{k}$ a použít limitní srovnávací kritérium. Nyní platí, že $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ a tudíž

$$\sum_k \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_k \frac{1-\cos 2k}{k} = \sum_k \frac{1}{k} - \sum \frac{\cos 2k}{k},$$

přičemž poslední řada napravo $\sum_k \frac{\cos 2k}{k}$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\frac{1}{k} \to 0$ monotónně a $\sum_k \cos kx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbb{R}$, tedy speciálně také pro $x = 2$. Tudíž součet řady $\sum_k \frac{\cos 2k}{k} = S$ je reálné číslo, a protože harmonická řada diverguje do $+\infty$, platí

$$\sum_k \frac{\sin^2 k}{k} = \sum_k \frac{1-\cos 2k}{k} = \sum_k \frac{1}{k} - \sum \frac{\cos 2k}{k} = +\infty - S = +\infty.$$

Ukážeme, že řada konverguje neabsolutně. Za tímto účelem řadu roztrhněme na dvě:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \sin^2 k}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k(1-\cos 2k)/2}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2} \frac{k}{k^2+1} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \cos 2k}{k^2+1}.$$

První z řad napravo konverguje podle Leibnizova kritéria. Pro druhou lze použít analogický postup jako v minulém příkladě (II.9).

II.11. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos^2 k}{\ln k}$

Návod: Řada nekonverguje absolutně, neboť

$$\sum_k \frac{\cos^2 k}{\ln k} = \sum_k \frac{1+\cos 2k}{2\ln k} = \underbrace{\sum_k \frac{1}{2\ln k}}_{=+\infty} + \underbrace{\sum_k \frac{\cos 2k}{2\ln k}}_{\text{konverg. řada}} = +\infty,$$

neboť druhá z řad je konvergentní podle Dirichletova kritéria díky omezenosti částečných součtů řady $\sum_k \cos 2k$ (plyne z prvního faktu o „goniometrických“ řadách v úvodu oddílu o konvergenci obecných řad).

Řada konverguje neabsolutně, neboť

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos^2 k}{\ln k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1+\cos 2k}{2\ln k} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2\ln k} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos 2k}{2\ln k},$$

přičemž první z řad napravo konverguje podle Leibnizova kritéria a pro druhou lze užít analogický postup jako v příkladu (II.9) – rozdělení na sudé a liché členy (tím zmizí $(-1)^k$) a použití Dirichletova kritéria.

II.12. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}$

Návod: Připomeňme, že

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2k)}$$

Indukcí dokážeme, že

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} > \frac{1}{2k+1}$$

Nerovnost zřejmě platí pro $k=1$. Indukční krok je

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{2k+1}{2k+3} > \frac{1}{2k+1}\frac{2k+1}{2k+3} = \frac{1}{2k+3}.$$

Z toho plyne, že řada nekonverguje absolutně.

Ukážeme naopak, že

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$$

Nerovnost zřejmě platí pro $k=1$. Indukční krok je

$$\frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!!} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{2k+1}{2k+3} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}\frac{2k+1}{2k+3} = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+3} < \frac{\sqrt{2k+3}}{2k+3} = \frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Z tohoto odhadu vyplývá, že řada konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria; neboť je evidentní, že posloupnost $\{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\}$ je monotónní a podle tohoto odhadu konverguje k nule.

II.13. $**\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arccotg}^a k \sin k,\ kde\ a\in\mathbb{R}.$

Návod: Připomeňme, že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{arccotg} k}{\frac{1}{k}} = 1.$$

Tedy posloupnost $(\operatorname{arccotg} k)$ se chová přibližně jako posloupnost $(1/k)$.

Z toho snadno plyne, že pro $a>1$ řada konverguje absolutně pomocí limitního srovnávacího kritéria srovnáním s řadou $\sum\frac{1}{k^a}$.

Pro $a\le 0$ řada diverguje, neboť nesplňuje základní podmínku konvergence, limita $a_k \not\to 0$, to je snadné nahlédnout jak pro $a=0$, tak pro $a<0$, neboť v tomto případě $\lim_k \operatorname{arccotg}^a k = +\infty$ vzhledem k tomu, že funkce arccotg je kladná na svém definičním oboru a v nekonečnu konverguje k nule.

Zbývá rozhodnout pro $1\ge a>0$. V takovém případě z monotonie funkce $\operatorname{arccotg} x$ plyne, že $\operatorname{arccotg}^a k$ konverguje monotónně k nule. A protože řada $\sum_k \sin k$ má omezené částečné součty, konverguje v tomto případě řada neabsolutně podle Dirichletova kritéria.

Pro $1\ge a>0$ řada nekonverguje absolutně, jak plyne srovnáním s divergentní řadou $\sum_k|\sin k|/k^a$.

II.14. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{arctg}^a \frac{1}{k}\cos k,\ kde\ a\in\mathbb{R}.$

Návod: Platí (například podle Heineho věty a l'Hopitalova pravidla), že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1.$$

Z toho vyplývá samozřejmě pro $a \in \mathbb{R}$ (včetně nuly), že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}^a \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^a}} = 1.$$

Z toho ihned plyne, že pro $a > 1$ konverguje vyšetřovaná řada absolutně.

Pro $a \leq 0$ řada diverguje, neboť nesplňuje základní podmínku konvergence, její koeficienty nejdou k nule.

Pro $1 \geq a > 0$ řada konverguje Dirichletova kritéria, neboť $(\operatorname{arctg}^a \frac{1}{k})$ konverguje monotónně k nule a řada $\sum \cos k$ má omezené částečné součty.

Pro $1 \geq a > 0$ řada nekonverguje absolutně; to plyne srovnáním s divergentní řadou $\sum_k |\cos k|/k^a$.

II.15. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \arccos^a \frac{k}{k+1} \sin k,$ *kde* $a \in \mathbb{R}$.

Návod: Podle Heineho věty a l'Hopitalova pravidla platí, že (ZKONTROLOVAT PROGRAMEM)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\arccos \frac{k}{k+1}}{\frac{1}{\sqrt{k}}} = \lim_{y\to 0+} \frac{\arccos \frac{1}{y+1}}{\sqrt{y}} = \lim_{y\to 0+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{y+1})^2}} \cdot \frac{1}{(y+1)^2}}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} =$$

$$= \lim_{y\to 0+} \frac{2\sqrt{y}}{\sqrt{y^2+2y}} \cdot \frac{1}{(y+1)} = \lim_{y\to 0+} \frac{2}{\sqrt{y+2}} \cdot \frac{1}{(y+1)} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Z toho plyne, že

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\arccos^a \frac{k}{k+1}}{\frac{1}{k^{a/2}}} = \sqrt{2}.$$

Tudíž $\arccos^a \frac{k}{k+1}$ se chová obdobně jako $\frac{1}{k^{a/2}}$. Z toho vyplývá:

Pro $a > 2$ konverguje řada absolutně, podle limitního srovnávacího kritéria (srovnáním s řadou $\sum_k 1/(k^{a/2})$ – viz výpočet výše.

Pro $a \leq 0$ řada diverguje – nesplňuje nutnou podmínku konvergence, koeficienty řady nejdou k nule.

Pro $2 \geq a > 0$ řada nekonverguje absolutně, podle limitního srovnávacího kritéria (srovnáním s řadou $\sum_k 1/(k^{a/2})$ – viz výpočet výše.

Pro $2 \geq a > 0$ řada konverguje neabsolutně. Zřejmě $\frac{k}{k+1} \nearrow 1$, a protože funkce arccos je monotónní, je také $\arccos \frac{k}{k+1} \to 0$ monotónně, a tedy také $\arccos^a \frac{k}{k+1} \to 0$ monotónně (pro $a > 0$). Protože řada $\sum_k \sin k$ má omezené částečné součty, lze použít Dirichletovo kritérium.

II.16. *(+)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{A^k+1} \sin k,$ *kde* $A > 0$.

Návod: Pokud $A > 1$, potom řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence; její koeficienty nekonvergují k nule. Pokud $A = 1$, platí totéž.

Pokud $0 < A < 1$, potom

$$\frac{A^k}{A^k+1} |\sin k| \leq \frac{A^k}{1+A^k} \leq \frac{A^k}{1} = A^k,$$

a protože $\sum A^k$ je absolutně konvergentní (geometrická) řada, řada konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

II.17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{e^{ak}}{e^{ak}+1} \operatorname{arccotg}^b k,$ *kde* $a, b \in \mathbb{R}$.

Návod: Připomeňme, že (viz např. (II.7)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg} k}{\frac{1}{k}} = 1.$$

Pro libovolné $b \in \mathbb{R}$ tedy platí (podle věty o limitě složené funkce a spojitosti mocniny, nulu lze snadno posoudit zvlášť)

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^b k}{\frac{1}{k^b}} = 1.$$

1. Diskutujme nejprve případ, kdy je $a < 0$. Potom platí

$$\left|(-1)^k \frac{e^{ak}}{e^{ak}+1} \operatorname{arccotg}^b k\right| \le |(-1)^k| \cdot \left|\frac{e^{ak}}{1}\right| \cdot |\operatorname{arccotg}^b k| \le Ce^{ak},$$

přičemž poslední odhad plyne z toho, že funkce $\operatorname{arccotg} x$, a tedy také $\operatorname{arccotg}^b x$ je omezená vhodnou konstantnou C na celém svém definičním oboru. Řada $\sum e^{ak}$ je pro $a < 0$ konvergentní, a proto pro $a < 0$ vyšetřovaná řada konverguje absolutně.

2. Buď nyní $a = 0$, vyšetřujeme tedy řadu

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arccotg}^b k$$

Protože pro libovolné $b \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^b k}{\frac{1}{k^b}} = 1,$$

máme ihned, že pro $b > 1$ řada konverguje absolutně podle limitního srovnávacího kritéria a pokud $0 < b \le 1$, potom řada nekonverguje absolutně, opět podle limitního srovnávacího kritéria.

Pokud ale $0 < b \le 1$, pak řada konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria, neboť $\operatorname{arccotg}^b k$ konverguje k nule monotónně (díky monotonii funkce arccotg).

Pokud $b \le 0$, řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence, její koeficienty nekonvergují k nule.

3. Buď nyní $a > 0$. Potom

$$\frac{e^{ak}}{e^{ak}+1} = \frac{1}{1+e^{-ak}} \nearrow 1.$$

Speciálně tedy posloupnost $\left(\frac{e^{ak}}{e^{ak}+1}\right)$ je omezená a monotónní.

Víme z předchozího vyšetřování, kdy bylo $a = 0$, že řada $\sum_k (-1)^k \operatorname{arccotg}^b k$ konverguje absolutně, pokud $b > 1$. Přenásobení omezenou posloupností na tom nic nemění; formálně můžeme použít limitní srovnávací kritérium a porovnávat třeba s řadou $\sum_k \operatorname{arccotg}^b k$.

V platnosti také zůstává, že pokud $b \le 0$, potom řada diverguje, neboť její koeficienty nekonvergují k nule a není tak splněna základní podmínka konvergence.

Nyní, pokud $0 < b \le 1$, pak víme, že řada $\sum_k (-1)^k \operatorname{arccotg}^b k$ nekonverguje absolutně. Přenásobení omezenou posloupností na tom nic nemění; formálně můžeme opět použít limitní srovnávací kritérium a porovnávat s řadou $\sum_k \operatorname{arccotg}^b k$.

Pokud $0 < b \le 1$, pak také víme, že řada $\sum_k (-1)^k \operatorname{arccotg}^b k$ konverguje neabsolutně. Z toho plyne podle Abelova kritéria, že řada $\sum_k (-1)^k \operatorname{arccotg}^b k \cdot \frac{e^{ak}}{e^{ak}+1}$ konverguje (neabsolutně), díky monotonii posloupnosti $\left(\frac{e^{ak}}{e^{ak}+1}\right)$.

Shrnutí: Řada konverguje absolutně, pokud $a < 0$ nebo $b > 1$. Řada konverguje neabsolutně, avšak ne absolutně, pokud $a \ge 0$ a zároveň $0 < b \le 1$. Jinak diverguje.

II.18. *(+)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{x^{2k}+1} \cos k,$ *kde* $x \in \mathbb{R}$.

Návod: 1. Buď nejprve $|x| < 1$. Potom

$$\left|\frac{x^k}{x^{2k}+1} \cos k\right| \le |x^k| \cdot |\cos k| \le |x|^k,$$

a tudíž řada konverguje absolutně.

2. Buď nyní $x = 1$. Potom vyšetřujeme řadu $\sum_k \frac{1}{2}\cos k$, která diverguje, neboť její koeficienty nejdou k nule.

3. Buď nyní $x > 1$. Potom platí, že

$$\left|\frac{x^k}{x^{2k}+1}\cos k\right| \le \left|\frac{x^k}{x^{2k}+1}\right| = \left|\frac{1}{x^k+\frac{1}{x^k}}\right| \le \left|\frac{1}{x^k}\right| = \left(\frac{1}{x}\right)^k,$$

přičemž řada $\sum_k (1/x)^k$ konverguje, neboť $(1/x) < 1$. Tudíž řada konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

4. Buď nyní $x = -1$. Potom vyšetřujeme řadu $\sum_k \frac{(-1)^k}{2}\cos k$, která diverguje, neboť její koeficienty nejdou k nule.

5. Buď nyní $x < -1$. Potom platí, že

$$\left|\frac{x^k}{x^{2k}+1}\cos k\right| \le \left|\frac{x^k}{x^{2k}+1}\right| = \left|\frac{(-1)^k|x|^k}{|x|^{2k}+1}\right| = \left|\frac{|x|^k}{|x|^{2k}+1}\right| = \left|\frac{1}{|x|^k+\frac{1}{|x|^k}}\right| \le \left|\frac{1}{|x|^k}\right| = \left(\frac{1}{|x|}\right)^k,$$

přičemž řada $\sum_k (1/|x|)^k$ konverguje, neboť $(1/|x|) < 1$. Tudíž řada konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria.

II.19. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\cos k.$

Návod: Platí, že

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{k})}{\frac{1}{k}} = \lim_{y\to 0+}\frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

Odtud vyplývá, že řada nemůže konvergovat absolutně podle limitního srovnávacího kritéria, srovnáním s řadou $\sum_k \frac{1}{k}$.

Je zřejmé, že řada $\sum_k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\cos k$ konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\ln(1+\frac{1}{k})$ konverguje monotónně k nule a řada $\sum_k \cos k$ má omezené částečné součty.

To nám napovídá, že konvergenci vyšetřované řady můžeme dostat jejím rozdělením na liché a sudé členy, čímž se zbavíme členu $(-1)^k$ v předpisu.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\cos k \overset{?}{=} -\sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\cos k + \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\cos k$$

a po úpravě

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\cos k \overset{?}{=} -\sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\cos(2k-1) + \sum_{k=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)\cos 2k$$

Řada sudých členů (napravo) konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\ln(1+\frac{1}{2k})$ konverguje monotónně k nule a řada $\sum_k \cos 2k$ má stejně omezené částečné součty (platí to podle faktu v úvodu oddílu o konvergence obecných řad obecně pro řadu $\sum_k \cos kx$, stačí položit $x = 2$).

Řada sudých členů (napravo) konverguje podle Dirichletova kritéria, neboť $\ln(1+\frac{1}{2k})$ konverguje monotónně k nule a řada $\sum_k \cos(2k-1)$ má stejně omezené částečné součty, což plyne například odhadem

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\cos(2k-1)\right| = \left|\sum_{k=1}^{2N}\cos k - \sum_{k=1}^{N}\cos 2k\right| \le \left|\sum_{k=1}^{2N}\cos k\right| + \left|\sum_{k=1}^{N}\cos 2k\right|,$$

přičemž částečný součet řady lichých členů jsme vyjádřili jako částečný součet řady všech členů minus sudých členů a použili trojúhelníkovou nerovnost. Obě řady napravo ale stejně omezené částečné součty mají: platí to podle faktu v úvodu oddílu o konvergence obecných řad obecně pro řadu $\sum_k \cos kx$, stačí položit $x = 1$, respektive $x = 2$.

Protože jak řada lichých, tak řada sudých členů konverguje, konverguje také řada všech členů (a rovnost s otazníkem platí, viz příklad (II.9)).

II.20. *(+)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \sin\frac{1}{\sqrt{k^3}}\cos k.$

Návod: Platí, že
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{k^{3/2}}}{\frac{1}{k^{3/2}}}=1,$$
a tudíž řada (bez kosinu)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{k^3}}$$
konverguje (absolutně) pomocí limitního srovnávacího kritéria srovnáním s řadou $\sum_k \frac{1}{k^{3/2}}$. A protože
$$\left|(-1)^k\sin\frac{1}{\sqrt{k^3}}\cos k\right|\le\sin\frac{1}{k^{3/2}},$$
konverguje vyšetřovaná řada absolutně pomocí srovnávacího kritéria.

II.21. *(+)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ln\left(1-\frac{(-1)^k}{k}\right)\sin k.$

Návod: 1. Vyšetřujme absolutní konvergenci.

Uvědomme si, že platí
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1-\frac{(-1)^k}{k})}{-\frac{(-1)^k}{k}}=1.$$
Můžeme to dokázat například počítáním vybraných posloupností lichých a sudých členů; pro liché je
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{2k+1})}{-\frac{-1}{2k+1}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{2k+1})}{\frac{1}{2k+1}}=\lim_{y\to0+}\frac{\ln(1+y)}{y}=1,$$
pro sudé je
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln(1-\frac{1}{2k})}{-\frac{1}{2k}}=\lim_{y\to0-}\frac{\ln(1+y)}{+y}=1.$$
Protože absolutní hodnota je spojitá funkce, platí
$$\lim x_n=x\implies\lim|x_n|=|x|,$$
a proto
$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\ln(1-\frac{(-1)^k}{k})}{-\frac{(-1)^k}{k}}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\ln(1-\frac{(-1)^k}{k})\right|}{\frac{1}{k}}=1.$$
Nyní použijeme limitní srovnávací kritérium. Víme, že řada $\sum_k|\sin k|/k$ je divergentní (z faktu na začátku tohoto oddílu o konvergenci obecných řad). Podle předchozího výpočtu platí
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|(-1)^k\ln\left(-\frac{(-1)^k}{k}\right)\sin k\right|}{\frac{|\sin k|}{k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\ln(1-\frac{(-1)^k}{k})\right|}{\frac{1}{k}}=1.$$
2. Vyšetřeme neabsolutní konvergenci. Zřejmě posloupnost
$$\left((-1)^k\ln\left[1-\frac{(-1)^k}{k}\right]\right)_{k=1}^{\infty}$$
nemění znaménko a přitom
$$\lim_{k\to\infty}(-1)^k\ln\left[1-\frac{(-1)^k}{k}\right]=0,$$
což můžeme dokázat počítáním limit vybraných posloupností lichých členů a sudých členů:
$$\lim_{k\to\infty}\ln\left[1-\frac{1}{2k}\right]=\ln(1)=0,\qquad\lim_{k\to\infty}-\ln\left[1+\frac{1}{2k+1}\right]=-\ln(1)=-0=0.$$
Tudíž $(-1)^k\ln\left[1-\frac{(-1)^k}{k}\right]$ konverguje monotónně k nule. A protože řada $\sum_k\sin k$ má stejně omezené částečné součty, podle Dirichletova kritéria řada konverguje neabsolutně.

II.22. *(+)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\ln(1+k)}{\ln(1+k^3)}$

Návod: Protože

$$\frac{\ln(1+k)}{\ln(1+k^3)} = \frac{\ln[k(1+1/k)]}{\ln[k^3(1+1/k^3)]} = \frac{\ln k + \ln(1+1/k)}{\ln k^3 + \ln(1+1/k^3)} = \frac{\ln k + \ln(1+1/k)}{3\ln k + \ln(1+1/k^3)} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3} \neq 0,$$

řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence.

II.23. *(OVĚŘIT!!)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-k}{k+1}\right)^{-k} \arccos\frac{k}{k^2+1}$

Návod: Podívejme se nejprve na člen $\arccos\frac{k}{k^2+1}$. Protože arccos je klesající funkce a $\frac{k}{k^2+1} = \frac{1}{k+1/k} \searrow 0$, je

$$\arccos\frac{k}{k^2+1} \nearrow \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Speciálně, posloupnost $\left(\arccos\frac{k}{k^2+1}\right)_{k=1}^{\infty}$ je monotónní a omezená (a nekonveguje k nule).

Nyní se podívejme na druhý člen a trochu jej upravme.

$$\left(\frac{-k}{k+1}\right)^{-k} = (-1)^{-k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{-k} = (-1)^k\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = (-1)^k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k.$$

Z tohoto vyjádření je zřejmé, že řada diverguje, protože ani jeden z členů nekonverguje v nekonečnu k nule, a tedy není splněna základní podmínka konvergence.

II.24. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\ln(1+e^{kx})}{\ln(1+e^{3kx})}$

Návod: Pro $x=0$ je řada zřejmě divergentní. Pokud $x\neq 0$, platí

$$\frac{\ln(1+e^{kx})}{\ln(1+e^{3kx})} = \frac{\ln[e^{kx}(1+e^{-kx})]}{\ln[e^{3kx}(1+e^{-3kx})]} = \frac{kx+\ln(1+e^{-kx})}{3kx+\ln(1+e^{-3kx})} = \frac{x+\frac{\ln(1+e^{-kx})}{k}}{3x+\frac{\ln(1+e^{-3kx})}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{1}{3},$$

a tudíž řada diverguje, neboť nesplňuje základní podmínku konvergence; koeficienty nekonvergují k nule.

II.25. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arccotg}^a k}{k^b}\sin kx,$ *kde* $x\in\mathbb{R}$.

Návod: 1. Řada má všechny členy nulové, pokud $x=n\pi$, kde n je libovolné celé číslo. Dále tedy předpokládáme, že $x\neq n\pi$.

2. Připomeňme, že platí pro každé $a\in\mathbb{R}$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{arccotg} k}{\frac{1}{k}} = 1 \implies \lim_{k\to\infty}\frac{\operatorname{arccotg}^a k}{\frac{1}{k^a}} = 1.$$

Z toho vyplývá, že

$$\frac{\operatorname{arccotg}^a k}{k^b} \approx \frac{1}{k^{a+b}},$$

od čehož se budou odvíjet naše další úvahy.

3. Pokud je $a+b>1$, potom řada konverguje absolutně podle limitního srovnávacího kritéria. Srovnáváme přitom s (absolutně) konvergentní řadou $\sum|\sin kx|/k^{a+b}$; o ní víme, že je (absolutně) konvergentní z faktu uvedeného na začátku oddílu o konvergenci obecných řad. Je totiž

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\left|\frac{\operatorname{arccotg}^a k}{k^b}\sin kx\right|}{\frac{|\sin kx|}{k^{a+b}}} = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\operatorname{arccotg}^a k}{\frac{1}{k^a}}\right| = 1.$$

4. Pokud $a+b \leq 0$, potom řada diverguje, neboť nesplňuje základní podmínku konvergence; koeficienty nejdou k nule, jak plyne z výpočtu

$$\frac{\operatorname{arccotg}^a k}{k^b} = \frac{\operatorname{arccotg}^a k}{k^{-a}} \cdot \frac{1}{k^{a+b}},$$

přičemž první člen napravo konverguje k jedné a druhý je buď jednička (pokud $a+b=0$) nebo konverguje do plus nekonečna.

5. Pokud $0 < a+b \leq 1$, potom řada nekonverguje absolutně. To plyne z limitního srovnávacího kritéria. Srovnáváme přitom s tentokráte divergentní řadou $\sum |\sin kx|/k^{a+b}$; víme, že je divergentní pro $0 < a+b \leq 1$ z faktu uvedeného na začátku oddílu o konvergenci obecných řad. A platí

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{\operatorname{arccotg}^a k}{k^b} \sin kx\right|}{\frac{|\sin kx|}{k^{a+b}}} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\operatorname{arccotg}^a k}{\frac{1}{k^a}}\right| = 1,$$

takže absolutní konvergence je vyloučena.

6. Pokud $0 < a+b \leq 1$, potom řada konverguje neabsolutně. K tomu dospějeme následující sérií úvah.

Protože řada $\sum_k \sin kx$ má stejně omezené částečné součty (podle faktu uvedeného na začátku oddílu o konvergenci obecných řad) a $\frac{1}{k^{a+b}}$ konverguje monotónně k nule, je řada $\sum_k \frac{\sin kx}{k^{a+b}}$ konvergentní podle Dirichletova kritéria.

Dokážeme-li nyní monotonii a omezenost posloupnosti $(k^a \operatorname{arccotg}^a k)_{k=1}^{\infty}$, bude vyšetřovaná řada

$$\sum_k \frac{\operatorname{arccotg}^a k}{k^b} \sin kx = \sum_k (k^a \operatorname{arccotg}^a k) \cdot \frac{\sin kx}{k^{a+b}}$$

konvergentní podle Abelova kritéria, neboť podle předchozího řada $\sum_k \frac{\sin kx}{k^{a+b}}$ konverguje.

Víme ale, že

$$\lim_{k\to\infty} k^a \operatorname{arccotg}^a k = \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arccotg}^a k}{\frac{1}{k^a}} = 1,$$

čímž je dokázána omezenost této posloupnosti. Pro monotonii stačí dokázat monotonii posloupnosti $(k \operatorname{arccotg} k)_{k=1}^{\infty}$.

Důkaz monotonie. Derivujme

$$(x \operatorname{arccotg} x)' = \operatorname{arccotg} x - \frac{x}{1+x^2}.$$

Derivace je pro nějaké $x \in (0, +\infty)$ nulová, pokud

$$\operatorname{arccotg} x = \frac{x}{1+x^2}$$

Proveďme substituci $x = \operatorname{cotg} y$, kde tedy bude $y \in (0, \pi/2)$ vzhledem k tomu, že $x \in (0, +\infty)$.

$$y = \frac{\operatorname{cotg} y}{1+\operatorname{cotg}^2 y}$$

$$y = \frac{\cos y/\sin y}{1/\sin^2 y}$$

$$y = \cos y \sin y$$

$$y = \frac{1}{2} \sin 2y.$$

$$2y = \sin 2y.$$

Poslední rovnice ale zřejmě nemá na $(0, \pi/2)$ řešení, neboť platí známá nerovnost $\sin t < t$ na $(0, \pi/2)$. Proto derivace $(x \operatorname{arccotg} x)'$ nemůže být nulová na $(0, +\infty)$, a protože je spojitá, nemůže měnit znaménko. Nyní stačí vypočíst, že například v bodě jedna nabývá hodnoty $(x \operatorname{arccotg} x)'(1) = \operatorname{arccotg} 1 = \pi/4 > 0$. Funkce $(x \operatorname{arccotg} x)$ je tedy rostoucí na $(0, +\infty)$. □

Závěr: Řada je absolutně konvergentní pokud $x = n\pi$, kde n je celé číslo nebo pokud $a+b > 1$. Řada je pouze neabsolutně konvergentní, pokud $x \neq n\pi$ a $0 < a+b \leq 1$. Jinak diverguje.

II.26. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+k^a) \cos kx,$ *kde* $a \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$.

Návod: 1. Nechť $a > 0$. Potom
$$\ln(1+k^a) \xrightarrow{k\to\infty} +\infty,$$
a tudíž řada diverguje, porotože nesplňuje základní podmínku konvergence; koeficienty řady nekonvergují k nule.

2. Nechť $a = 0$. Potom $\ln(1+k^a) = \ln(1+1) = \ln 2$ a řada diverguje z téhož důvodu.

3. Nechť $a < 0$. Potom
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+k^a)}{k^a} = 1.$$
Z toho ihned vyplývá:

3a. Pokud $a < -1$, potom řada konverguje absolutně podle limitního srovnávacího kritéria srovnáním s řadou $\sum_k |\cos kx|/k^{-a}$ (ta konverguje podle faktu na začátku oddílu o konvergenci obecných řad), neboť
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\ln(1+k^a)\cos kx|}{|\cos kx|/k^{-a}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+k^a)}{k^a} = 1.$$

3b. Pokud $-1 \le a < 0$, potom řada nekonverguje absolutně podle limitního srovnávacího kritéria srovnáním s řadou $\sum_k |\cos kx|/k^{-a}$ (neboť ta diverguje podle faktu na začátku oddílu o konvergenci obecných řad), neboť
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\ln(1+k^a)\cos kx|}{|\cos kx|/k^{-a}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+k^a)}{k^a} = 1.$$

3c. Pokud $-1 \le a < 0$ a $x \ne 2n\pi$, kde n je libovolné celé číslo, potom řada konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria, neboť $\ln(1+k^a) \to 0$ monotónně pro $k \to \infty$ a řada $\sum_k \cos kx$ má omezené částečné součty pro každé $x \in \mathbb{R},\ x \ne 2n\pi$.

3d. Pokud $1- \le a < 0$ a $x = 2n\pi$, kde n je libovolné celé číslo, pak řada diverguje podle limitního srovnávacího kritéria srovnáním s divergentní řadou $\sum_k k^a$, neboť v tom případě
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+k^a)\cos(2\pi nk)}{k^a} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1+k^a)}{k^a} = 1.$$

Závěr: Řada konverguje absolutně, pokud $a < -1$ a pouze neabsolutně, pokud $-1 \le a < 0$ a $x \ne 0$ modulo 2π. Jinak diverguje.

II.27. *(+)* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sinh kx + \cosh kx}{e^{2kx}}$, *kde* $x \in \mathbb{R}$.

Návod: Upravme
$$\frac{\sinh kx + \cosh kx}{e^{2kx}} = \frac{e^{kx} - e^{-kx} + e^{kx} + e^{-kx}}{2e^{2kx}} = \frac{e^{kx}}{e^{2kx}} = \frac{1}{e^{kx}} = e^{-kx}.$$
Odtud je zřejmé:

1. Pro $x \le 0$ řada diverguje, neboť nesplňuje nutnou podmínku konvergence; koeficienty řady nekonvergují do nuly.

2. Pro $x < 0$ řada konverguje absolutně, neboť
$$\sum_k |(-1)^k e^{-kx}| = \sum_k (e^{-x})^k$$
je konvergentní geometrická řada, protože $0 < e^{-x} < 1$.

II.28. *(+)* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k^a} \cos k$

Návod: Pokud $a > 1$, potom existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $a - \varepsilon > 1$. Řada konverguje absolutně podle srovnávacího kritéria, porovnáním s konvergentní řadou $\sum_k \frac{1}{k^{a-\varepsilon}}$, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|(-1)^k \frac{\ln k}{k^a} \cos k\right|}{1/k^{a-\varepsilon}} = \lim_{k\to\infty} |\cos k| \frac{\ln k}{k^\varepsilon} = 0.$$

Pokud $a \geq 0$, řada diverguje, neboť její koeficienty nekonvergují k nule.

Pro $0 < a \leq 1$ řada nekonverguje absolutně. K tomu si stačí uvědomit, že

$$\left|(-1)^k \frac{\ln k}{k^a} \cos k\right| \geq \frac{|\cos k|}{k^a}$$

a že řada napravo je divergentní.

Pro $0 < a \leq 1$ řada konverguje neabsolutně. K tomu stačí ukázat, že $\frac{\ln k}{k^a}$ monotónně konverguje k nule, neboť řada $\sum_k (-1)^k \cos k$ má stejně omezené částečné součty, což plyne z odhadu

$$\left|\sum_{k=1}^{N} (-1)^k \cos k\right| = \left|\sum_{k=2,4,6,\ldots}^{N} \cos k - \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{N} \cos k\right| \leq \left|\sum_{k=2,4,6,\ldots}^{N} \cos k\right| + \left|\sum_{k=1,3,5,\ldots}^{N} \cos k\right|$$

a již v dřívějších příkladech jsme ukázali, proč obě řady napravo (liché členy a sudé členy) mají stejně omezené částečné součty.

Je zřejmé, že $\frac{\ln k}{k^a} \to 0$ pro $k \to \infty$. Monotonii dokážeme derivováním: je

$$\left(\frac{\ln x}{x^a}\right)' = \frac{x^{a-1} - a x^{a-1} \ln x}{x^{2a}},$$

derivace je nulová, pokud

$$x^{a-1} - a x^{a-1} \ln x = 0$$
$$\ln x = \frac{1}{a} \implies x = e^{1/a}.$$

Tedy derivace, protože je spojitá, pro $x > e^{1/a}$ nemůže měnit znaménko, funkce bude tedy na nějakém okolí nekonečna monotónní a tedy také posloupnost $\frac{\ln k}{k^a}$ musí být od jistého členu počínaje monotónní.

II.29. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k+1} \frac{\cosh k!}{\sinh k!}$

Návod: Zřejmě

$$\frac{\cosh k!}{\sinh k!} = \frac{e^{k!} + e^{-k!}}{e^{k!} - e^{-k!}} = \frac{1 + e^{-2\cdot k!}}{1 - e^{-2\cdot k!}} \xrightarrow{k\to\infty} 1.$$

Přičemž si všimněte, že konvergence je monotónní – v každém kroku čitatel poklesne a jmenovatel vzroste!

Napišme si tedy řadu následujícím způsobem

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{k} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{\cosh k!}{\sinh k!}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{\cosh k!}{\sinh k!}$$

Všimněte si ještě, že

$$\frac{k}{k+1} = \frac{1}{1 + 1/k} \text{ konverguje monotónně k jedné.}$$

1. Nejprve vyloučíme absolutní konvergenci. K tomu stačí porovnat řadu s divergentní řadou $\sum_k \frac{1}{\sqrt{k}}$ a použít limitní srovnávací kritérium, neboť

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{\cosh k!}{\sinh k!}\right|}{1/\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} \cdot \frac{\cosh k!}{\sinh k!} = 1.$$

2. Nyní dokážeme, že řada konverguje neabsolutně. Provedeme následující sérii úvah.

2a. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$$

konverguje neabsolutně podle Leibnizova kritéria, neboť $\frac{1}{\sqrt{k}}$ konverguje monotónně k nule.

2b. Nyní přilepíme první člen. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{k}{k+1}$$

konverguje podle Abelova kritéria, neboť řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ konverguje podle (2a) a posloupnost $(\frac{k}{k+1})$ je omezená (má limitu) a monotónní.

2c. Nyní přilepíme druhý člen. Řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \frac{\cosh k!}{\sinh k!}$$

konverguje podle Abelova kritéria, neboť řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \cdot \frac{k}{k+1}$ konverguje podle (2b) a posloupnost $(\frac{\cosh k!}{\sinh k!})$ je omezená (má limitu) a monotónní.